Corrado Mencuccini

Vittorio Silvestrini

FISICA II
ELETTROMAGNETISMO
OTTICA

Corso di fisica per le facoltà tecnico-scientifiche corredato di esempi ed esercizi

Liguori Editore

INDICE

III. Elettrostatica in presenza di dielettrici

IV. Corrente elettrica stazionaria

V. Fenomeni magnetici stazionari nel vuoto

VI Magnetismo nella materia

VII. Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo. Terza e quarta equazione di Maxwell

VIII. Correnti alternate

IX. Onde elettromagnetiche

X. Fenomeni classici di interazione fra radiazione e materia

XI. Ottica geometrica

XII. Fotoni e materia

Appendice A - **Alcuni utili strumenti matematici**

PARTE PRIMA

PARTE SECONDA

Prefazione

Questo testo di Fisica II, Elettromagnetismo e Ottica, si affianca a Fisica I, Meccanica e Termodinamica: nel loro insieme questi due volumi coprono il programma di Fisica Generale svolto nei primi due anni nelle facoltà scientifiche delle università italiane. Naturalmente, è stata curata la coerenza metodologica e la complementarità degli argomenti trattati nei due volumi.

Tenuto conto della compattezza logica e della coerenza interna dell'elettromagnetismo, e approfittando del fatto che al secondo anno gli studenti posseggono già un buon bagaglio di conoscenze matematiche, abbiamo preferito evidenziare al massimo le potenzialità predittive della teoria, facendo discendere l'ottica dalle equazioni dell'elettromagnetismo, ed utilizzando la relativa fenomenologia come strumento di verifica sperimentale delle previsioni; differenziandoci così rispetto allo sviluppo storico delle conoscenze. Anche per questo, i numerosi esempi ed esercizi che corredano il testo ne costituiscono parte integrante. Per quanto riguarda gli esercizi, di cui viene fornita la soluzione in appendice, raccomandiamo allo studente di utilizzare tale appendice solo per verificare la correttezza della soluzione da essi stessi prodotta; e di utilizzare i suggerimenti, da noi forniti alla fine di ogni capitolo, solo dopo avere dedicato uno spazio serio al tentativo di risolvere ogni esercizio con i propri mezzi esclusivi.

Abbiamo fatto uno sforzo per includere nel testo una panoramica di molti moderni sviluppi dell'elettromagnetismo e delle relative filiazioni tecnologiche; viene trattata con una certa diffusione la covarianza relativistica della teoria; e nell'ultimo capitolo viene presentata sinteticamente, ma con un certo rigore, una introduzione ai concetti della meccanica quantistica partendo da una discussione dei fatti sperimentali che ne sono stati il punto di partenza.

Nel suo complesso, il testo risulta pertanto in certa misura ridondante rispetto al tempo dedicato al corso di fisica nel secondo anno della maggior parte dei corsi di laurea, escluso quello di fisica. Per facilitare l'uso del testo negli altri corsi di laurea, viene individuato all'interno di esso un «percorso ridotto», evidenziando graficamente (carattere piccolo e banda colorata a fianco) quegli argomenti la cui trattazione non è propedeutica alla comprensione degli argomenti presentati nei capitoli successivi.

L'appendice matematica, in cui vengono presentati alcuni strumenti che aiutano a raggiungere in termini sintetici e rapidi molte conseguenze dell'elettromagnetismo, è stata realizzata da Joseph M. Quartieri, che gli autori ringraziano per il prezioso contributo; così come ringraziano i matematici Alessandro Ossicini e Francesco Rosati per la revisione critica, dal punto di vista matematico, di alcuni dei capitoli del libro.

*L'appendice matematica
è stata realizzata
da Joseph M. Quartieri*

Capitolo primo

Elettrostatica nel vuoto.

Campo Elettrico e Potenziale

I fenomeni elettromagnetici si presentano in natura con una una straordinaria varietà e complessità di manifestazioni. Dalle prime osservazioni fenomenologiche riportate nelle cronache, opera del filosofo Talete, alla definitiva formalizzazione teorica ad opera di Maxwell-Faraday (e la successiva estensione relativistica da parte di Einstein, e quantistica da parte di Dirac) sono trascorsi circa 25 secoli. L'elettromagnetismo rappresenta, nel suo insieme, uno dei massimi raggiungimenti della mente umana: teoria di meravigliosa eleganza, caratterizzata da grande forza di sintesi e capacità di predizione.

Nel presentarla in questo libro seguiremo come usuale l'approccio caratteristico del metodo scientifico, ripercorrendo in maniera euristica i passi storici e procedendo attraverso schematizzazioni: partiremo dalla situazione di massima semplicità (oggetti fermi e puntiformi nel vuoto) e introdurremo gradualmente le successive complicazioni (dimensioni finite, movimento, materia, ecc.)

È da osservare fin d'ora che la descrizione dell'elettromagnetismo che verrà presentata è quella usualmente detta *classica*. Con ciò si vuole significare che essa precede storicamente le evoluzioni dell'inizio del 1900 riguardanti la meccanica quantistica e la teoria della relatività; evoluzioni cui dedicheremo in questo libro solo uno spazio marginale. È da tenere però presente che la teoria della relatività ristretta risulta, come vedremo, perfettamente compatibile con l'elettromagnetismo classico, laddove la meccanica quantistica comincia ad imporre ad esso delle modifiche significative solo a distanze inferiori alle dimensioni atomiche.

1.1. Azioni elettriche

Come abbiamo visto nei corsi di meccanica e termodinamica, la maggior parte delle forze che si manifestano nelle interazioni fra oggetti macroscopici è riconducibile a forze di contatto (attrito, pressione, forze elastiche, ecc.) o alla gravitazione (e in particolare alla forza peso), che costituisce l'unica azione a distanza che sia stata fino qui formalmente trattata.

sostanze uguali, strofinate, si respingono

Semplici osservazioni sperimentali, la cui prima registrazione risale al VI secolo a.C., mostrano che fra oggetti macroscopici opportunamente trattati (ad esempio mediante strofinio con un panno di lana) si esercita un'altra forma di azioni a distanza, dette *azioni elettriche*.

Azioni elettriche

In estrema sintesi, l'essenza del fenomeno può essere riassunta come segue:

a) due oggetti della *medesima sostanza* (plastica, vetro, ambra, ecc.) dopo essere stati strofinati con un panno o con altro, se posti l'uno in vicinanza dell'altro *si respingono*;

b) ponendo in vicinanza l'un dell'altro, dopo averli strofinati, due oggetti di *sostanze diverse* (uno di plastica e uno di vetro; uno di plastica e uno d'ambra; ecc.), si riscontra ancora l'esistenza di forze di mutua interazione: tali forze possono essere però, a seconda dei casi, *repulsive o attrattive*. In particolari accoppiamenti (vetro e plastica; vetro e ambra; ecc.) le forze mutue sono infatti attrattive.

sostanze diverse, opportunamente accoppiate, si attraggono

Naturalmente, anche queste forze di natura elettrica soddisfano il terzo principio della dinamica (principio di azione e reazione): quando, in particolare, i due oggetti che interagiscono siano puntiformi, le forze che si scambiano costituiscono una coppia di braccio nullo.

Indagando sulle azioni elettriche fra oggetti costituiti da sostanze diverse, si conclude che, dopo «elettrizzazione per strofinio»

- se un corpo A e un corpo B sono separatamente attratti da un corpo C, allora A e B si respingono fra loro;
- se A è attratto da C e B è respinto da C (o viceversa), allora A e B si attraggono fra loro.

Carica elettrica

Tutta la semplice fenomenologia fin qui menzionata porta a concludere che in natura esistono due tipi diversi di «elettrizzazione», ovvero, come si usa dire, due tipi di *cariche elettriche*.

Carica positiva e carica negativa

Convenzionalmente si dice che corpi come il *vetro*, per strofinio con lana, acquistano *carica elettrica positiva* (o vetrosa).

Corpi come l'ambra, o le materie plastiche o le resine, per strofinio acquistano *carica elettrica negativa* (o resinosa).

Con queste convenzioni sui segni delle cariche elettriche, gli aspetti qualitativi della fenomenologia di mutua interazione possono essere riassunti dicendo che:

- cariche elettriche dello stesso segno si respingono;
- cariche elettriche di segno opposto si attraggono.

I costituenti elementari della materia
protone p
neutrone n
elettrone e

Prima di procedere nello studio dei fenomeni elettrici conviene anticipare, sia pure in termini elementari, alcuni fondamenti conoscitivi sulla struttura microscopica della materia; elementi che, del resto, sono già familiari allo studente.

La materia esistente nel mondo che ci circonda (corpi animati o inanimati; enormi come le galassie o microscopici come le cellule degli esseri viventi, o le molecole e gli atomi) è formata a partire da tre soli costituenti fondamentali, che dal nostro presente punto di vista possono essere considerati a tutti gli effetti come elementari: protone p, neutrone n ed elettrone e.

La massa del protone m_p è circa uguale alla massa del neutrone m_n; mentre la massa m_e dell'elettrone è circa 2000 volte più piccola:

Massa, dimensioni geometriche e carica elettrica delle particelle elementari

$$m_p = 1{,}6725 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

$$m_n = 1{,}6748 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

$$m_e \simeq \frac{1}{1840}\, m_p \simeq 9{,}1091 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

Protoni e neutroni vengono anche detti *nucleoni*.

Nucleoni

Quanto alle dimensioni geometriche, il diametro di protone e neutrone è dell'ordine di 10^{-15} m; mentre l'elettrone ha dimensioni più piccole della precisione di tutte le misure fino ad oggi eseguite, e può essere considerato come puntiforme.

Secondo la convenzione più sopra enunciata sul segno della carica elettrica, risulta che il protone ha carica elettrica positiva e l'elettrone carica elettrica negativa (fra di loro uguali in valore assoluto). Fino ad oggi, non è mai stata osservata alcuna carica elettrica che sia frazione della carica del protone (o dell'elettrone): essa può essere considerata come la *carica elementare*. Ovvero: la carica elettrica si presenta come una grandezza fisica *quantizzata*. Il neutrone è elettricamente neutro, cioè privo di carica elettrica.

La carica elementare

La carica elettrica è quantizzata

I tre costituenti elementari della materia, unendosi in una grande varietà di combinazioni, danno origine alle varie manifestazioni che la materia assume nel mondo macroscopico. Tali combinazioni avvengono per effetto di due delle forze fondamentali della natura.

FORZE ELETTRICHE FRA PARTICELLE

Particelle	Forza
elettrone-protone	attrattiva
elettrone-elettrone	repulsiva
protone-protone	repulsiva
neutrone—altro	nulla

— Protoni e neutroni si legano fra di loro in virtù della forza nucleare a formare il *nucleo* degli atomi. La carica del nucleo è positiva, ed è dovuta al *numero di protoni* presenti nel nucleo (*numero atomico*). La massa del nucleo è approssimativamente pari alla somma delle masse dei nucleoni (protoni e neutroni) che costituiscono il nucleo. Il *numero di nucleoni* costituenti un nucleo viene detto *numero di massa*.
— Intorno al nucleo, attratti da forze di tipo elettrico, orbitano elettroni, in numero pari al numero atomico (numero di protoni) nel nucleo. L'atomo appare, nel suo complesso, come elettricamente neutro.

Nucleo atomico

Numero atomico e numero di massa

La neutralità elettrica dell'atomo rappresenta una manifestazione di una legge di carattere generale, che verrà meglio precisata dalle leggi dell'elettrostatica: un sistema costituito da più cariche, manifesta una carica elettrica complessiva pari alla somma algebrica delle cariche costituenti.

Gli atomi dei vari elementi chimici, che costituiscono gli ingredienti di tutte le sostanze conosciute, differiscono fra di loro per il loro diverso numero atomico. Se a parità di numero atomico (cioè di protoni nel nucleo) cambia il numero di massa (cioè cambia il numero di neutroni) si hanno diversi *isotopi* dello stesso elemento.

Isotopi

Nelle varie sostanze, è diversa l'intensità del legame con cui gli elettroni (e in particolare quelli periferici) sono trattenuti in vicinanza del nucleo: da ciò deriva anche, come vedremo, la sostanziale differenza fra materiali detti *conduttori* e materiali detti *isolanti*.

Lo strofinio fra due corpi, con il contatto locale che così si realizza, può produrre il passaggio di un certo numero di elettroni da un corpo all'altro: cioè dal corpo in cui gli elettroni sono meno fortemente legati verso quello in cui lo sono di più. Così ad esempio un pezzo di vetro strofinato con un panno di lana resta depauperato di elettroni: e partendo da uno stato ini-

zialmente neutro, resta carico positivamente. Per sua parte, il panno di lana guadagna un eccesso di elettroni e si carica negativamente.

Isolanti

Conduttori

Nei materiali come vetro, ambra, ebano, plastica, ecc. (*isolanti*) le cariche elettriche trasferite per strofinio restano localizzate. Nei metalli (*conduttori*) si osserva che le cariche elettriche negative sono libere di migrare all'interno del corpo e non restano localizzate.

Possiamo riassumere dicendo che le forze elettriche:

a) sono manifestazioni della natura (attributo di carica elettrica) delle particelle che costituiscono tutta la materia, e di una legge di interazione fondamentale fra particelle cariche (interazione elettromagnetica);
b) si manifestano a livello macroscopico quando si distrugga in qualche modo (ad esempio per strofinio) la simmetria naturale tra cariche elettriche positive e negative (neutralità elettrica della materia).

Elettrizzazione per contatto

Da quanto appena detto, si capisce che l'elettrizzazione può anche trasmettersi da un corpo carico ad un corpo neutro mediante semplice contatto meccanico. Supponiamo, per esempio, di avere un corpo isolante caricato positivamente per strofinio, ed un corpo metallico inizialmente scarico. Si è già detto che il corpo metallico (neutro) possiede al suo interno un gran numero di elettroni (pari al numero di protoni complessivamente presenti nei nuclei) dei quali una parte, dell'ordine di uno per atomo, è praticamente libera di muoversi. Se si pone il corpo carico positivamente in vicinanza del metallo, gli elettroni, che all'interno del metallo si muovono liberamente, tendono ad addensarsi di più in vicinanza del corpo positivo verso cui, essendo negativi, sono attratti. Stabilendo il contatto meccanico, alcuni di questi elettroni si trasferiscono dal metallo verso il corpo carico positivamente. Se a questo punto si staccano i due corpi, il metallo, depauperato di elettroni a partire dalla iniziale condizione di neutralità, risulta carico positivamente. Per contro il corpo carico positivamente, avendo ricevuto cariche negative, tende a ridurre il suo stato di positività.

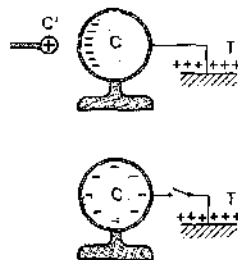
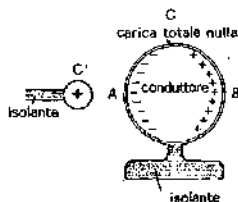
Naturalmente, lo stesso meccanismo consente di ripartire per contatto la carica elettrica, inizialmente presente su un conduttore, fra il conduttore stesso e un altro inizialmente scarico.

Induzione elettrostatica

Un fenomeno di grande interesse teorico e pratico che si ingenera nei conduttori quando questi siano posti in vicinanza di corpi carichi è il fenomeno della *induzione elettrostatica*, che qui di seguito descriviamo.

Consideriamo un conduttore C elettricamente scarico, sostenuto da un supporto isolante; e ad esso venga avvicinato un corpo C' carico, ad esempio positivamente.

In virtù delle forze elettriche che C', essendo carico, esercita sulle cariche microscopiche presenti in C, quelle fra tali cariche microscopiche che sono libere di muoversi (cioè gli elettroni) si muovono, avvicinandosi a C': la parte A di C più prossima a C' risulta carica negativamente; e quella B lontana risulta carica positivamente (l'opposto accadrebbe, ovviamente, se C' fosse carico negativamente). Benché l'eccesso di cariche positive nella zona B non derivi dal moto di cariche positive, ma dalla migrazione di cariche negative da B ad A, nel linguaggio comune si usa dire che cariche positive si sono portate in B (e che cariche negative si sono portate in A): noi ci adegueremo a questo modo di dire.

Notiamo che le cariche positive, per conseguenza della induzione esercitata su C dalla carica positiva posseduta da C', si sono portate nella posizione su C che ha la massima distanza da C'. Pertanto se il conduttore C fosse collegato (ad esempio mediante un filo metallico) ad un conduttore T molto esteso (come la Terra) cosicché C si estenda in pratica fino all'infinito,

allora le cariche positive *si allontanano* molto da C' (idealmente verso ∞). Se a questo punto si interrompe il collegamento di C a T, il conduttore C resta carico negativamente; e se C' viene allontanato da C, le cariche negative si distribuiscono su C.

1.2. Carica elettrica e legge di Coulomb

Elettroscopio a foglie

Per procedere alla definizione operativa della grandezza fisica "carica elettrica" conviene introdurre un semplice strumento, l'*elettroscopio a foglie*, costruito così come indicato schematicamente in figura. In un recipiente trasparente (ad esempio di vetro) penetra un'asta metallica M attraverso un opportuno foro che mantiene l'asta bloccata. All'estremità inferiore dell'asta, nella parte interna del recipiente, sono appese due leggere foglioline metalliche f libere di ruotare intorno ad un asse orizzontale O. Quando l'asta metallica è elettricamente scarica, le foglioline si dispongono verticalmente per effetto della forza di gravità.

Se si tocca l'asta M con un corpo carico C (ad esempio metallico) l'asta M si carica anch'essa, e parte della carica posseduta da M si dispone anche sulle foglioline: queste, essendo cariche dello stesso segno, si respingono fra di loro, e divergono di un angolo α che può essere misurato con la scala graduata S dell'elettroscopio. Dunque l'elettroscopio è in grado di denunciare l'esistenza di cariche elettriche su C (siano esse positive o negative) attraverso la deflessione delle sue foglioline quando C tocca M.

Uguaglianza di cariche

Per procedere alla definizione operativa di carica si ammette che se due corpi uguali C_1 e C_2 (ad esempio due sfere metalliche uguali) toccando M (inizialmente scarico: foglioline verticali) producono la stessa deflessione, allora su C_1 e C_2 si trovava la stessa carica elettrica (in valore assoluto).

Suddivisione di cariche

Con l'elettroscopio si constata anche che qualora una sfera metallica C_1 carica venga messa a contatto con una seconda sfera C_2 uguale alla prima, ma inizialmente scarica, allora la carica presente inizialmente in C_1 si suddivide in parti uguali fra C_1 e C_2. Per successive suddivisioni si possono così produrre cariche che siano una frazione prestabilita di una carica data.

Poiché l'uso dell'elettroscopio ci consente di stabilire l'uguaglianza fra due cariche e di suddividere una carica elettrica in un numero arbitrario di parti, si può procedere ora alla indagine sperimentale degli aspetti quantitativi delle interazioni fra cariche elettriche.

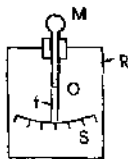
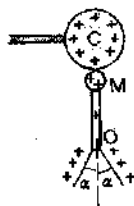
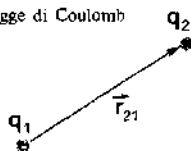
Legge di conservazione della carica elettrica

Una prima proprietà che l'elettroscopio consente di verificare con precisione modesta, ma cui nemmeno con gli strumenti più raffinati si è mai rilevata eccezione, è che, in un sistema isolato, *la somma algebrica delle cariche elettriche si mantiene costante nel tempo* (*legge di conservazione della carica*). Nei vari processi fisici (strofinio, contatto, ecc.) si producono spostamenti di cariche da un corpo a un altro, ma *non si realizza* mai la creazione di cariche elettriche la cui somma algebrica sia diversa da zero. In particolare, nei processi di elettrizzazione per strofinio, se si genera una certa carica sul corpo strofinato, una carica uguale e di segno opposto si genera sul corpo strofinante.

Legge di Coulomb

Mediante l'uso di una bilancia di torsione, del tipo di quella usata da Cavendish per la misura delle proprietà delle forze gravitazionali, si arriva a stabilire la legge delle forze di natura elettrostatica, detta **legge di Coulomb**.

Se due cariche puntiformi q_1 e q_2 vengono poste *a distanza r nel vuoto*, la forza $\vec{f}_{21}$ che q_2 subisce ad opera di q_1 (uguale e opposta alla forza $\vec{f}_{12}$ che q_1 subisce ad opera di q_2: $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$) può essere espressa come

$$\vec{f}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21} \qquad [1.1]$$

dove:

- k è una costante di proporzionalità (positiva) il cui valore dipende dalle unità di misura;
- $\vec{r}_{21}$ è il vettore posizione di q_2 rispetto a q_1, ed $\hat{r}_{21}$ è il suo versore (r è il modulo di $\vec{r}_{21}$);
- $q_1 q_2$ è il prodotto delle due cariche. La [I.1] implica che se q_1 e q_2 hanno lo stesso segno, $\vec{f}_{21}$ è concorde con $\hat{r}_{21}$ ed è dunque repulsiva; mentre se q_1 e q_2 hanno segno opposto la forza è attrattiva.

Come si vede la legge Coulomb è formalmente analoga alla legge di gravitazione universale, con la grandezza fisica carica elettrica al posto della massa gravitazionale: l'unica differenza (ma non è differenza di poco conto!) è che la massa gravitazionale ammette un solo segno e la forza gravitazionale è sempre attrattiva.

Unità di misura delle cariche

Una volta stabilita la forma [I.1] della legge della forza elettrostatica, la sua espressione potrebbe essere semplificata scegliendo le unità di misura in modo che sia in essa $k = 1$. A tal fine, la carica unitaria dovrebbe essere definita come quella carica che posta nel vuoto a distanza unitaria da una carica uguale subisce una forza unitaria. Ciò viene fatto in effetti in alcuni sistemi di unità di misura (sistema c.g.s. elettrostatico). Tuttavia gli ordini di grandezza delle cariche che si presentano in molti problemi pratici sono tali da essere espressi, in tale sistema di unità di misura, da numeri non facilmente maneggevoli. Nel sistema di unità di misura SI, l'unità di misura delle cariche è il *Coulomb C*, definito come quella *carica che attraversa in un secondo un conduttore percorso dalla corrente di un Ampere (A)*; questa definizione verrà ripresa e precisata nel capitolo dedicato alle correnti elettriche. Nel sistema SI (detto anche MKSA: metro, kilogrammo, secondo, Ampere), la costante k che compare nella [I.1] assume valore pari a $k \simeq 9 \cdot 10^9 \dfrac{N \cdot \mathrm{m}^2}{C^2}$. Si conviene tuttavia di porre $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, per cui la [I.1] assume la forma

Il Coulomb

Legge di Coulomb nel vuoto nel sistema SI

$$\boxed{\vec{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}_{21}} \qquad [I.2]$$

Costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \dfrac{C^2}{N \cdot \mathrm{m}^2}$

dove ε_0 (detta **costante dielettrica del vuoto**) assume il valore

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot \mathrm{m}^2}.$$

Esempi

Confronto fra forza elettrostatica e forza gravitazionale

E.I.1. *Valutare e confrontare la forza gravitazionale F_G e la forza elettrostatica F_E che elettrone e protone si scambiano in un atomo di idrogeno, sapendo che la loro carica elettrica è $e \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C e che il raggio dell'orbita è $r_0 \simeq 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ m.*

Si ha:

$$F_G = \frac{G\, m_p\, m_e}{r_0^2}$$

$$F_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e \cdot e}{r_0^2}$$

Sostituendo i valori numerici, e ricordando che $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2}$, si ha

$$F_G = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg) \cdot (9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg)}{(0{,}5 \cdot 10^{-10}\ m)^2} = 4 \cdot 10^{-47}\ N$$

$$F_E = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C)^2}{(0{,}5 \cdot 10^{-10}\ m)^2} = 9 \cdot 10^{-8}\ N$$

Si ha dunque:

$$\frac{F_E}{F_G} \simeq 2{,}2 \cdot 10^{39}$$

Come si vede, la forza gravitazionale, pur esercitandosi anche fra particelle subatomiche cariche, gioca un ruolo del tutto trascurabile rispetto alla forza elettrostatica.

E.I.2. *Immaginiamo che un grammo di idrogeno venga completamente ionizzato, e il gas di protoni così ottenuto venga disposto in un contenitore. Analogamente, il gas di elettroni viene disposto in un altro contenitore. Se questi due contenitori vengono posti alla distanza di 10 metri, con che forza si attraggono?*

Ordini di grandezza delle forze elettrostatiche

Un grammo di idrogeno contiene un numero di atomi (e dunque di protoni) pari al numero di Avogadro $N = 6 \cdot 10^{23}$. La carica Q contenuta nel contenitore di protoni è dunque

$$Q = N \cdot e = 6 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \simeq 10^5\ C$$

e la stessa carica (negativa) si trova nel contenitore di elettroni. La forza di mutua attrazione è dunque

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{10^{10}\ C^2}{100\ m^2} \simeq 10^{18}\ N$$

Come si vede, si tratta di una forza assai intensa, pari al peso di una massa di centomila miliardi di tonnellate. L'esperimento immaginato in questo esempio non è praticamente fattibile. Infatti forze dello stesso ordine di grandezza (ma repulsive) si esplicano anche fra i protoni contenuti nel primo contenitore, così come fra gli elettroni contenuti nel secondo; per cui non è praticamente realizzabile un contenitore capace di mantenerli localizzati.

Abbiamo fino a qui parlato di interazioni fra cariche disposte nel vuoto. Va notato che praticamente la stessa forza si esplica anche fra cariche disposte *nell'aria*. In tutto questo capitolo limiteremo la nostra attenzione all'elettrostatica *nel vuoto*, che dunque descrive con approssimazione estremamente elevata anche le interazioni fra cariche disposte nell'aria.

I.3. Il campo elettrico

Consideriamo una carica puntiforme Q, disposta in una certa posizione (fissa in un sistema inerziale) nello spazio. Se una seconda carica q viene posta, ferma, in presenza della prima, essa subisce una forza $\vec{F}$ data dalla [I.2]. $\vec{F}$ dipende dalla posizione occupata da q; ed è, in modulo, proporzionale a q.

Il rapporto $\frac{\vec{F}}{q}$ è dunque, in ogni posizione, indipendente da q. Se q è una carica qualunque puntiforme, posta nella posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, il rapporto $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ viene detto *campo elettrico generato nella posizione* $\vec{r}$ *dalla carica* Q:

Campo elettrico generato da una carica puntiforme Q fissa nello spazio (rispetto a un osservatore inerziale)

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}}{q} \qquad [1.3]$$

Le dimensioni fisiche del campo elettrico sono quelle di una forza divisa per una carica. L'unità di misura usuale è il Volt/m che verrà introdotto nel seguito.

Misurando punto per punto il vettore $\vec{E}$, può essere determinata la configurazione spaziale di tale campo vettoriale: configurazione che in forma grafica può essere espressa disegnando, secondo le convenzioni usuali, le linee di forza (o linee di flusso) di $\vec{E}$; e in forma matematica scrivendo le equazioni che specificano il vettore $\vec{E}$ in funzione delle coordinate. Nel caso particolare che abbiamo fin qui considerato (campo generato da una carica puntiforme Q fissa nello spazio vuoto) l'espressione matematica di $\vec{E}$ discende immediatamente dalla [1.1]; supponendo per semplicità che la carica Q sia disposta nell'origine del sistema di riferimento, $\vec{E}$ ha la forma

carica puntiforme **positiva**

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \qquad [1.4]$$

Linee di forza del campo elettrico

Con il pedice ad $\vec{E}_0$ indichiamo che si tratta di campo elettrico nel vuoto. In pratica, possiamo affermare che la presenza della carica Q modifica le proprietà dello spazio circostante, come mostrato dal fatto che ponendo in tale spazio una carica di prova q, quest'ultima risulta sottoposta ad una forza di tipo elettrostatico. Tale modificazione è misurata punto per punto dalla grandezza vettoriale *campo elettrico* $\vec{E}$, *definito* come la forza subita dall'unità di carica, o meglio *come rapporto* $\frac{\vec{F}}{q}$ *fra la forza* $\vec{F}$ *subita dalla carica di prova* q *e la carica* q *stessa.*

carica puntiforme negativa

Sorgente del campo

La carica Q viene detta *sorgente* del campo elettrico.

Il concetto di campo elettrico può essere immediatamente ed utilmente generalizzato al caso che la sorgente non sia rappresentata da una unica carica puntiforme Q, ma da un insieme discreto o da una distribuzione continua di cariche.

Per la rappresentazione grafica dei campi è usuale la convenzione delle linee di forza. Le linee di forza sono linee di flusso: in ogni punto il campo è tangenziale alla linea di forza. Inoltre, in ogni regione del campo viene disegnato un numero di linee di forza tale che la loro densità sia proporzionale all'intensità del campo.

Consideriamo dunque un insieme (discreto o continuo) di cariche, che chiamiamo sorgenti, ferme in un riferimento inerziale. Se nello spazio circostante viene posta, ferma, una carica di prova q, questa risulta soggetta a una forza $\vec{F}$. In generale, la forza $\vec{F}$ non è proporzionale alla carica di prova q. Infatti se le cariche sorgenti sono disposte su corpi estesi (o se comunque qualche corpo esteso è presente nelle vicinanze) allora la presenza della carica di prova q può modificare la distribuzione delle cariche microscopiche presenti su tali corpi: sui conduttori, possono aversi spostamenti macroscopici di cariche (fenomeno dell'induzione); negli isolanti, pur essendo impossibili migrazioni macroscopiche di cariche, possono aversi comunque fenomeni di modificazioni localizzate nelle distribuzioni di cariche (nel terzo capitolo, discuteremo diffusamente il fenomeno della polarizzazione).

In ogni posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ *si definisce* comunque *il campo elettrico generato da quella distribuzione delle cariche sorgenti come il rapporto* $\frac{\vec{F}}{q}$ *purché la carica di prova q sia abbastanza piccola da produrre una perturbazione trascurabile nella configurazione delle cariche circostanti* Più precisamente, il campo elettrico $\vec{E}$ è definito come

Campo elettrico generato da una distribuzione qualunque (stazionaria) di cariche sorgenti

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}} \qquad [1.5]$$

Il modulo E di $\vec{E}$ viene detto *intensità* del campo elettrico.

Il concetto di campo è di fondamentale importanza, teorica e pratica, per la descrizione e l'interpretazione delle interazioni a distanza. In particolare il campo elettrico è non solo adeguato a descrivere in termini compatti la forza esercitata, su una carica di prova ovunque disposta nello spazio, da una configurazione fissa delle cariche sorgenti (*campo elettrostatico*). Esso è indispensabile anche, come vedremo, per descrivere la configurazione che l'energia elettrostatica assume nello spazio; e nel caso di sorgenti mobili, esso descrive correttamente (insieme al campo magnetico che a suo tempo introdurremo) la propagazione di energia nello spazio (in particolare nello spazio vuoto). Gli effetti prodotti dalle cariche sorgenti possono allora manifestarsi, con intensità significativa, anche in porzioni di spazio molto lontane da quelle occupate dalle sorgenti; e il ritardo con cui tali effetti si manifestano può essere interpretato in termini del tempo che il campo impiega a propagarsi nello spazio.

Campo elettrico

Il campo elettrico resta allora una grandezza fisica significativa anche a prescindere dalla sua connessione con la fenomenologia relativa alle sorgenti che hanno generato il campo stesso.

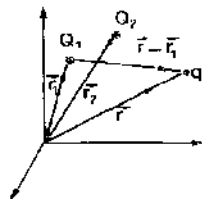
I.4. Campo elettrostatico generato da sistemi di cariche con distribuzione spaziale fissa e nota

Salvo esplicito avviso contrario supporremo sempre di porci in un sistema di riferimento inerziale.

Consideriamo due cariche sorgenti puntiformi, ferme, Q_1 e Q_2; siano $\vec{r}_1$ ed $\vec{r}_2$ i rispettivi vettori posizione, costanti nel tempo. Supponiamo che nelle vicinanze, ad esempio nella posizione specificata dal raggio vettore $\vec{r}$, sia posta una carica di prova q.

Sperimentalmente, si verifica che *la forza subita dalla carica q è pari alla somma* (vettoriale) *delle forze di Coulomb esercitate su q singolarmente da Q_1 e da Q_2*. Per conseguenza, il *campo elettrico* $\vec{E}(\vec{r})$ generato nella posizione generica $\vec{r}$ dal sistema costituito dalle due cariche Q_1 e Q_2, *è pari alla somma vettoriale dei campi elettrici* generati in $\vec{r}$ separatamente da Q_1 e da Q_2. Questo risultato è detto *principio di sovrapposizione* per il campo elettrico.

Principio di sovrapposizione

Tenuto conto che la distanza di q da Q_1 è data da $\vec{r} - \vec{r}_1$ (e analogamente la distanza di q da Q_2 è data da $\vec{r} - \vec{r}_2$), usando la [I.3] si ricava immediatamente il campo elettrico $\vec{E}_0(\vec{r})$:

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}(\vec{r} - \vec{r}_2) \qquad [1.6]$$

La [I.6] può essere immediatamente generalizzata al caso che il sistema delle sorgenti sia costituito da n cariche puntiformi Q_i disposte ciascuna nella posizione di raggio vettore $\vec{r}_i$; si ha:

Campo elettrostatico generato da una distribuzione discreta di cariche puntiformi

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i) \qquad [I.7]$$

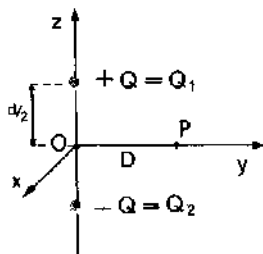
Proiettando la [I.7] sugli assi cartesiani, si ha:

$$E_{0x}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i(x-x_i)}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]^{3/2}}$$

$$E_{0y}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i(y-y_i)}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]^{3/2}} \qquad [I.8]$$

$$E_{0z}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i(z-z_i)}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]^{3/2}}$$

Esempio

E.I.3. *Due cariche puntiformi, di pari modulo Q ma segno opposto, sono poste lungo l'asse z simmetricamente rispetto all'origine, a distanza $\frac{d}{2}$ dall'origine stessa. Calcolare il campo elettrico da esse generato nel punto P dell'asse delle y posto a distanza D dall'origine.*

Usando i simboli introdotti nella [I.7] e [I.8] si ha:

$$\vec{r} \equiv (x,y,z) = (0, D, 0)$$

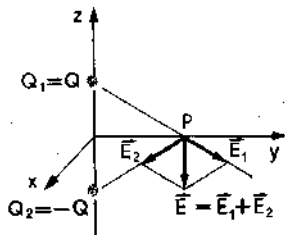
$$\vec{r}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1) = \left(0, 0, +\frac{d}{2}\right)$$

$$\vec{r}_2 \equiv (x_2, y_2, z_2) = \left(0, 0, -\frac{d}{2}\right)$$

da cui

$$|\vec{r}-\vec{r}_1| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} = \sqrt{D^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

e analogamente

$$|\vec{r}-\vec{r}_2| = \sqrt{D^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Per semplicità di notazioni, indichiamo con Δ la quantità $\sqrt{D^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$.

Inserendo i valori numerici nelle [I.8] si ha dunque:

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\Delta^3}(0-0) = 0$$

$$E_{0y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\Delta^3}(QD - QD) = 0 \qquad [I.9]$$

$$E_{0z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\Delta^3}\left(Q\left(-\frac{d}{2}\right) + \left(-(Q)\frac{d}{2}\right)\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Qd}{\Delta^3}$$

Dipolo elettrico
Momento di dipolo elettrico

Un sistema di due cariche fisse, puntiformi, uguali in modulo e opposte in segno, viene detto *dipolo elettrico*; e il vettore $\vec{p} = Q\vec{d}$ (con $\vec{d}$ orientato dalla carica negativa a quella positiva) è detto *momento elettrico* del dipolo. In termini di $\vec{p}$, il campo elettrico nella posizione considerata (eq. [I.9]) può essere scritto in forma vettoriale come

$$\vec{E}_0(0, D, 0) = \frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\left[D^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Come si vede, anche nel caso di un sistema così semplice come un dipolo elettrico, il calcolo del campo elettrico mediante la [I.8] può risultare abbastanza laborioso.

Il calcolo del campo elettrico può risultare talvolta più semplice ricorrendo a considerazioni geometriche; ad esempio nel caso in esame il risultato poteva essere ottenuto geometricamente così come risulta dalla seconda figura di pag. 16.

Nel caso del dipolo, le linee di forza del campo elettrico hanno l'andamento qualitativo mostrato in figura.

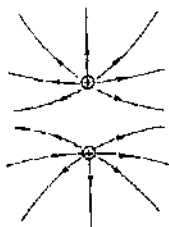
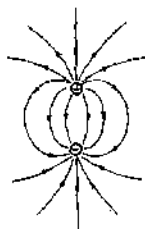
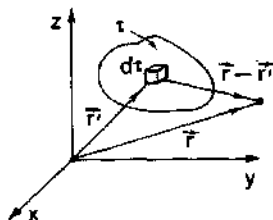
Analogamente, nel caso di due cariche puntiformi positive le linee di forza del campo elettrico avrebbero l'andamento qualitativo mostrato nella seconda figura.

In generale, nella pratica si ha a che fare con numeri molto grandi di cariche puntiformi (ad esempio elettroni); e l'uso del formalismo relativo a distribuzioni discrete diventa impraticabile. A titolo di esempio, si pensi che 1 mm^3 di rame contiene circa $2{,}5 \cdot 10^{21}$ elettroni.

Densità di carica

Per ovviare questa difficoltà si introduce il concetto di *distribuzione continua di carica* descritta da una *densità spaziale di carica* ρ definita dalla relazione:

$$dq = \rho(x, y, z)\, d\tau \qquad [I.10]$$

dove $d\tau = dx\,dy\,dz$ è l'elemento di volume attorno al punto di coordinate x, y, z, e dq è la carica contenuta in tale elemento di volume. In realtà, a stretto rigore la funzione $\rho(x, y, z)$ sarebbe una funzione fortemente variabile nello spazio e nel tempo, essendo diversa da zero e di valore assai grande nelle posizioni occupate dagli elettroni (e dai nuclei); e nulla negli spazi interatomici. Nella pratica però questa struttura «granulare» si perde perché *tutte* le misure si riferiscono a *medie* effettuate su volumetti $d\tau$ che, per quanto piccoli, contengono sempre un numero assai grande di cariche microscopiche.

Considerata dunque una distribuzione di carica «continua», che occupa la porzione di spazio τ, il campo elettrico $\vec{E}$ nel punto P di posizione $\vec{r}$, si ottiene come semplice generalizzazione della [I.7]:

Campo elettrico generato dalla distribuzione di carica ρ

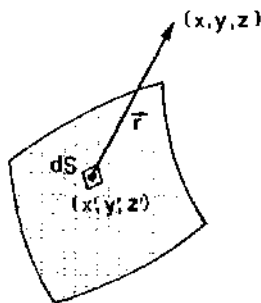
$$\boxed{\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x', y' z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\,dx'\,dy'\,dz'} \qquad [I.11]$$

L'integrale si intende esteso al volume τ; ovvero a tutto lo spazio, tenuto conto che ρ è nulla (e dunque l'integrale non dà contributo) laddove non v'è carica elettrica.

Analogamente, nel caso di distribuzione continua di cariche le [I.8] vengono rimpiazzate dalle seguenti relazioni che forniscono le componenti cartesiane del campo elettrico:

$$E_{0x}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x', y', z')(x-x')\,dx'\,dy'\,dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$E_{0y}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x', y', z')(y-y')\,dx'\,dy'\,dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \qquad [I.12]$$

$$E_{0z}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x', y', z')(z-z')\,dx'\,dy'\,dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

Ribadiamo che la [I.11] e la [I.12], così come accadeva per la [I.7] e la [I.8], sono utili al calcolo del campo elettrico quando la distribuzione spaziale delle cariche sorgenti sia costante nel tempo, e sia nota a priori (attraverso la conoscenza della densità $\rho(x, y, z)$).

Capita spesso che le cariche sorgenti, anziché essere localizzate in una regione tridimensionale τ, occupino un dominio spaziale ben approssimato da una superficie Σ (*distribuzione superficiale*) o da una linea Λ (*distribuzione lineare*).

In questi casi conviene introdurre la *densità superficiale* σ e, rispettivamente, la *densità lineare* λ; grandezze definite dalle relazioni:

Densità superficiale di carica

$$dq = \sigma(x, y, z)\,dS \qquad [I.13]$$

$$dq = \lambda(x, y, z)\,dl \qquad [I.14]$$

Densità lineare di carica

dove dS e dl sono, rispettivamente, l'elemento di superficie Σ e l'elemento di linea Λ; e dq è la carica posseduta da tale elemento.

Al posto della [I.11] abbiamo allora le seguenti relazioni:

Campo elettrico generato da una distribuzione superficiale di carica

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma(x', y', z')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dS' \qquad [I.15]$$

Campo elettrico generato da una distribuzione lineare di carica

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda(x', y', z')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dl' \qquad [I.16]$$

e relazioni analoghe alle [I.12] per le componenti cartesiane del campo.

Esempi

E.1.4. *Consideriamo una distribuzione uniforme di carica su un supporto rettilineo $\vec{l}$ molto lungo (infinito) e di dimensioni trasverse trascurabili. Sia λ la densità lineare di carica uniforme e nota. Calcolare il campo elettrico $\vec{E}$ in un punto P a distanza R dal supporto.*

Il campo elettrico può essere calcolato come somma (integrale) dei campi elettrici elementari $d\vec{E}$ generati in P da trattini elementari dl della distribuzione lineare rettilinea $\vec{l}$. Ognuno degli elementi $d\vec{E}$ giace nel piano individuato da $\vec{l}$ e da P; e in tale piano giacerà dunque anche il campo risultante $\vec{E} = \int d\vec{E}$. Notiamo inoltre che per ogni elemento $d\vec{l}_1$, esiste un secondo elemento $d\vec{l}_2$ simmetrico ad esso rispetto ad O: questi due elementi generano due contributi elementari $d\vec{E}_1$ e $d\vec{E}_2$ al campo che hanno componente parallela ad $\vec{l}$ uguale ed opposta, per cui la loro somma $d\vec{E}$ è ortogonale ad $\vec{l}$.

Da semplici considerazioni geometriche si ricava inoltre:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = (|dE_1| + |dE_2|)\cos\theta\,\hat{n} = \frac{2\cos\theta\,\hat{n}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{r^2} \qquad [1.17]$$

dove $\hat{n}$ è il versore della normale ad $\vec{l}$ e dl è il modulo comune di $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$; si è tenuto conto del fatto che, per la legge di Coulomb, deve essere

$$|d\vec{E}_1| = |d\vec{E}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{r^2}.$$

Per eseguire l'integrale $\vec{E} = \int d\vec{E}$ esprimiamo dl ed r in funzione di θ e della lunghezza R (costante). Si ha:

$$r = \frac{R}{\cos\theta};\ l = R\,\mathrm{tg}\,\theta.\ \text{Da cui, differenziando, } dl = R\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Sostituendo nella [1.17] e tenendo conto che λ è costante:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\hat{n}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\ \lambda\ \frac{R\,d\theta}{\cos^2\theta}\ \frac{\cos^2\theta}{R^2} =$$

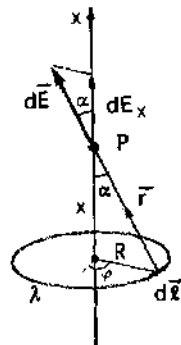
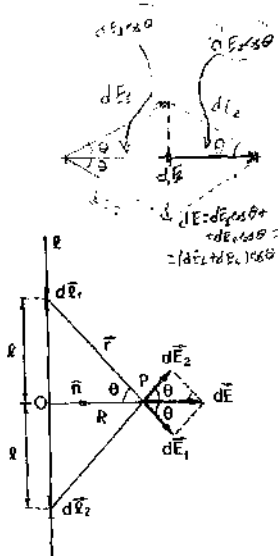
$$= \frac{\hat{n}}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{\lambda}{R}\cos\theta\,d\theta = \frac{\hat{n}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}$$

Osserviamo che il modulo del campo elettrico, all'aumentare della distanza R, diminuisce in misura inversamente proporzionale alla distanza R, contrariamente al caso di sorgente puntiforme in cui il campo è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Il risultato che abbiamo ottenuto, che è rigoroso nel caso che l sia di lunghezza infinita, vale con buona approssimazione anche nel caso che sia $R << l$.

E.1.5. *Calcolare il campo elettrico generato sull'asse da una distribuzione uniforme di carica distribuita su una spira circolare filiforme.*

Sia R il raggio del cerchio e λ la densità lineare di carica. L'elemento $d\vec{l}$ di circonferenza genera un campo $d\vec{E}$ diretto come $\vec{r}$ e dato da:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{r^3}\vec{r}$$

Interessa calcolare solo la componente dE_x di $d\vec{E}$ lungo l'asse della spira. Infatti per ogni elemento $d\vec{l}$ esiste un altro elemento, diametralmente opposto, che genera una componente di campo normale all'asse x uguale e opposta a quella generata dall'elemento considerato. Si ha

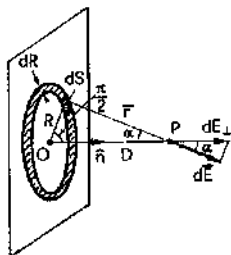
$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\cos\alpha$$

Integrando su dl lungo tutta la circonferenza, e considerato che, fissato x, sia r che α sono costanti, si ha

$$|\vec{E}| = E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cos\alpha}{r^2}\int dl = \frac{2\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cos\alpha}{r^2} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Notiamo che il campo è nullo sia per $x = 0$ (centro della spira) che per $x \to \infty$. Notiamo che per $x >> R$ si ha:

$$|\vec{E}| \simeq \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{x^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}$$

($2\pi R\lambda$ rappresenta infatti la carica totale posseduta dalla spira). A grande distanza la spira si comporta dunque come una carica puntiforme.

E.I.6. *Calcolare il campo elettrico generato da una distribuzione di carica uniformemente distribuita su un piano, a una distanza D dal piano stesso. Sia σ (uniforme) la densità superficiale di carica distribuita sul piano.*

Sia P il punto in cui si vuole calcolare il campo; e D la distanza di P dal piano. Suddividiamo il piano in tanti anelli concentrici (spire), con centro intorno ad O (piede della perpendicolare condotta da P al piano).

Il campo $d\vec{E}$ generato dalla spira di raggio R vale:

$$d\vec{E} = \frac{\sigma\, 2\pi R\, dR}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{n}\,\frac{\cos\alpha}{r^2} \qquad [I.18]$$

dove $\hat{n}$ è, come al solito, il versore normale al piano.

Notiamo infatti che la carica dQ posseduta dalla spira vale $dQ = \sigma\, 2\pi R\, dR$; che tutti i punti della spira si trovano alla stessa distanza r dal punto P; e che, coerentemente con quanto visto nell'esempio E.I.5, solo la componente $dE_\perp$ di $d\vec{E}$ ortogonale al piano contribuisce al campo risultante prodotto dalla spira.

Per calcolare il campo generato dall'intero piano dobbiamo ora sommare su tutte le spire. A tal fine, conviene esprimere R ed r in funzione di D (costante) e di α:

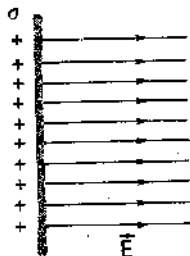
$$r = \frac{D}{\cos\alpha}; \qquad R = D\,\mathrm{tg}\,\alpha; \qquad dR = D\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Sostituendo nella [I.18] questa diviene:

$$d\vec{E} = \frac{\hat{n}\,\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\, d\alpha$$

Integrando su $d\alpha$ fra $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$ si ottiene immediatamente:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{n} \qquad [I.19]$$

Campo elettrico generato da uno strato uniforme piano

Una distribuzione uniforme distribuita su un piano molto esteso viene detta *uno strato uniforme*. Dalla [I.19] vediamo che il campo elettrico generato da uno strato uniforme è ortogonale allo strato, ed è uniforme in tutto lo spazio. Naturalmente, se lo strato è carico positivamente ($\sigma > 0$), il campo è concorde ad $\hat{n}$ (normale uscente); e viceversa nel caso di carica negativa.

I.5. Teorema di Gauss

Come abbiamo visto, il calcolo del campo elettrico generato da una qualunque distribuzione di carica *nota e costante* (cioè *indipendente dal tempo*), anche se talvolta laborioso, è tuttavia concettualmente assai semplice: si tratta di suddividere le cariche sorgenti in elementi puntiformi, e calcolare in base alla legge di Coulomb il contributo che ciascun elemento fornisce al campo risultante.

Va notato che affinché la distribuzione delle cariche sorgenti sia nota a priori, è necessario che le cariche *non* siano libere di muoversi per effetto delle loro reciproche interazioni: condizione necessaria – e non sufficiente – affinché ciò accada con buona approssimazione è che le cariche siano dislocate su corpi isolanti.

Diverso, e assai più complesso, è il caso in cui le cariche sorgenti siano dislocate su conduttori. In tal caso il problema dell'elettrostatica si presenta nei seguenti termini: sono note le *cariche totali* possedute da ciascun conduttore (o i relativi potenziali, che più avanti introdurremo); e si vuole calcolare non solo il campo elettrico generato nello spazio circostante, ma anche *la distribuzione che la carica posseduta da ciascun conduttore assume sul conduttore stesso*.

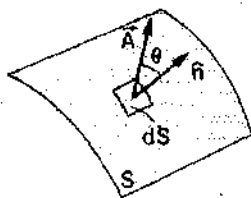
Per arrivare a risolvere queste situazioni più complesse, è necessario procurarsi alcuni ulteriori strumenti metodologici; cosa che faremo, in questo paragrafo e nei prossimi, introducendo la *legge di Gauss* e la grandezza fisica *potenziale elettrico*. Vedremo che questi strumenti, idonei per impostare il problema dell'elettrostatica nella generalità necessaria per affrontare e risolvere anche i casi più complessi, consentono spesso di risolvere in maniera più semplice e diretta anche i problemi – cui fino a qui abbiamo limitato la nostra attenzione – relativi a distribuzioni di carica completamente note a priori.

Il *teorema di Gauss* vale per qualunque campo vettoriale che sia additivo e che, per sorgenti puntiformi, abbia modulo proporzionale all'inverso del quadrato della distanza e sia diretto come la congiungente con il punto sorgente; esso è già stato da noi dimostrato nel testo di fisica I in relazione al campo gravitazionale, ma in vista del ruolo fondamentale che esso gioca in elettromagnetismo ne riprendiamo qui, seppur brevemente, la dimostrazione.

Sia dato un campo vettoriale $\vec{A}(x, y, z)$; e, immersa nel campo, una superficie S cui si assegna convenzionalmente una faccia come positiva: nel caso di superficie chiusa, come faccia positiva si assume sempre quella rivolta verso l'esterno.

Consideriamo una porzione elementare $d\vec{S}$ della superficie: ricordiamo che l'elemento vettoriale $d\vec{S}$ è definito come $\hat{n}\, dS$, dove $\hat{n}$ è il *versore normale* all'elemento di superficie (con verso uscente dalla faccia positiva) e dS è l'area dell'elemento di superficie stesso. Si definisce come *flusso elementare* del vettore $\vec{A}$ attraverso l'elemento di superficie $d\vec{S}$ la quantità:

Flusso elementare

$$d\Phi(\vec{A}) = \vec{A} \cdot d\vec{S} = \vec{A} \cdot \hat{n} \cdot dS = A\, dS \cos\theta \qquad [I.20]$$

Flusso attraverso una superficie estesa

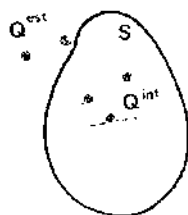
Il *flusso del vettore* $\vec{A}$ attraverso l'intera superficie S è definito come l'integrale dei flussi elementari:

$$\Phi_S(\vec{A}) \equiv \int_S d\Phi(\vec{A}) = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \qquad [I.21]$$

Le terminologie relative al flusso derivano dall'idraulica, dove il flusso del campo vettoriale delle velocità di un fluido attraverso una superficie S rappresenta il volume di fluido che attraversa S nell'unità di tempo (portata).

Teorema di Gauss

L'enunciato del teorema di Gauss è il seguente:

Il flusso del campo elettrostatico nel vuoto $\vec{E}_o$ attraverso una superficie chiusa qualunque S è pari alla somma algebrica (nel caso di distribuzione continua di cariche, è pari *all'integrale*) *delle cariche contenute all'interno di S, divisa per ε_o.*

$$\boxed{\Phi_S(\vec{E}_o) \equiv \int_S \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum Q_{\text{interne}} = \frac{Q_{\text{TOT}}^{\text{int}}}{\varepsilon_o}} \qquad [I.22]$$

Eventuali cariche disposte esternamente alla superficie chiusa S non portano alcun contributo al flusso di $\vec{E}_o$

La dimostrazione è assai semplice. Cominciamo infatti col considerare il caso in cui, all'interno della superficie S, si trovi una sola carica puntiforme Q.

Il flusso elementare attraverso l'elemento di superficie $d\vec{S}$ è dato da:

$$d\Phi(\vec{E}_o) = \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{n}\, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\cos\theta\, dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dS_n}{r^2}$$

dove con $dS_n = dS\cos\theta$ abbiamo indicato la proiezione dell'elemento di superficie $d\vec{S}$ sulla sfera di raggio r e centro Q. D'altra parte il rapporto $\frac{dS_n}{r^2}$ rappresenta l'angolo solido $d\Omega$ del cono, con vertice in Q, delimitato dall'elemento di superficie dS; per cui in definitiva

$$d\Phi(\vec{E}_o) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\, d\Omega. \qquad [I.23]$$

Integrando su tutta la superficie chiusa S si ha:

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS_n}{r^2}$$

$$\Phi(\vec{E}_o) = \int_S d\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{4\pi} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Carica puntiforme interna

Infatti la superficie (chiusa) S copre intorno a Q l'intero angolo solido $\int d\Omega = 4\pi$. Vediamo dunque che il flusso di E_o uscente dalla superficie S non dipende dalla forma della superficie, né dalla posizione che Q occupa all'interno della porzione di spazio racchiusa da S. Il risultato ora ottenuto si estende immediatamente al caso in cui all'interno della superficie siano poste più cariche Q_i. Si ha infatti:

Molte cariche puntiformi interne

$$d\Phi(\vec{E}_o) = \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = \left(\sum \vec{E}_{oi}\right)\cdot d\vec{S} = \sum(\vec{E}_{oi}\cdot d\vec{S}) = \sum d\Phi_i$$

Abbiamo utilizzato il fatto che in ogni posizione il campo $\vec{E}_0$ totale è pari alla somma dei campi $\vec{E}_{0i}$ generati dalle singole cariche (principio di sovrapposizione).

Integrando su tutta la superficie:

$$\Phi = \int d\Phi = \int \sum d\Phi_i = \sum \int d\Phi_i = \sum \Phi_i = \sum \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int TOT}}}{\varepsilon_0} \qquad [1.24]$$

$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_{int} \qquad [1.24a]$$

Consideriamo ora una carica Q_e (per semplicità, sia Q_e puntiforme) che si trovi, invece, esterna alla superficie S. Ogni cono di angolo solido $d\Omega$ con vertice in Q_e o non intercetta la superficie S (nel qual caso non si ha contributo al flusso) o la intercetta in due elementi di superficie $d\vec{S}_1$ e $d\vec{S}_2$. I flussi elementari $d\Phi_1$ e $d\Phi_2$ attraverso questi due elementi di superficie hanno, per conseguenza della [1.23], lo stesso valore assoluto $\left(\frac{dS_{1n}}{r_1^2} = \frac{dS_{2n}}{r_2^2} = d\Omega\right)$. Tuttavia mentre $d\Phi_2$ è positivo ($\theta_2 < \pi/2$), $d\Phi_1$ è negativo ($\theta_1 > \pi/2$); per cui la loro somma è nulla. Dunque in ogni caso dalla carica Q_e non deriva alcun contributo al flusso.

Carica puntiforme esterna

Resta così completamente dimostrato l'enunciato del teorema di Gauss.

Qualora anziché un insieme di cariche puntiformi si abbia una distribuzione continua di carica, la [1.24] si generalizza in maniera piuttosto ovvia assumendo la seguente forma:

Distribuzione continua di cariche

$$\Phi_S(\vec{E}_0) = \int_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\tau \rho(x, y, z)\, d\tau \qquad [1.25]$$

dove ρ è la densità di carica [1.10], e τ è il volume racchiuso dalla superficie S.

Il teorema di Gauss è diretta conseguenza della legge di Coulomb, secondo cui ogni carica puntiforme produce un campo radiale proporzionale a $1/r^2$, e il campo prodotto dalle varie cariche si compone in maniera additiva; esso non aggiunge dunque nulla rispetto alla legge di Coulomb stessa. Tuttavia esso è di grande utilità non solo perché consente, tramite la [1.22] (o la [1.25]) di calcolare le cariche presenti in ogni fissata porzione di spazio una volta noto il campo elettrico. Esso consente anche, specie quando il problema sia dotato di particolare simmetria, di calcolare il campo quando sia nota la distribuzione di cariche, così come viene illustrato dagli esempi che seguono e dalle molte applicazioni che ne faremo. Ma in più, esso può essere posto, come vedremo nel prossimo paragrafo, in forma «locale» anziché nella forma integrale [1.25]. La forma locale della legge di Gauss sarà il punto di partenza per porre il problema dell'elettrostatica in termini assai generali e matematicamente efficaci, nonché per la generalizzazione al caso non stazionario.

Esempi

E.1.7. *Espressione del campo elettrico generato da una distribuzione di cariche dotata di simmetria sferica.*

Campo elettrico generato da una distribuzione di cariche dotata di simmetria sferica

Una distribuzione di cariche con simmetria sferica è caratterizzata da una densità di carica del tipo

$$\rho = \rho(r)$$

La densità di carica varia dunque in generale da punto a punto dello spazio, ma in modo tale da assumere lo stesso valore nei luoghi di punti equidistanti da un punto O (cioè su ogni superficie sferica con centro in O).

Per conseguenza di questa simmetria delle cariche, segue che anche il campo elettrico deve avere necessariamente simmetria sferica: esso sarà cioè *diretto radialmente* (rispetto al centro O), e il suo modulo è costante su ogni sfera con centro in O, e dipende pertanto solo dal modulo r del raggio vettore $\vec{r}$

$$\vec{E}_0 = E_0(r) \cdot \hat{r}$$

Per conseguenza di questa simmetria, se come superficie S per il calcolo del flusso si sceglie una sfera centrata in O, il calcolo dell'integrale al primo membro della [I.25] risulta particolarmente semplice:

$$\Phi_S(\vec{E}_0) = \int_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \int_S E_0(r) \cdot \hat{r} \cdot d\vec{S} = E_0(r) \int_S dS = E_0(r) \cdot 4\pi r^2 \qquad [I.26]$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che $d\vec{S}$, essendo un elemento di superficie sferica, è parallelo ad $\hat{r}$, ed inoltre del fatto che su tutta la superficie sferica S è costante r e dunque anche $E_0(r)$; che può essere portato fuori dal segno di integrale. Per conseguenza della [I.26], la [I.25] diviene:

$$E_0(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{sfera}} \rho(r)\, d\tau$$

da cui infine

$$E_0(r) = \frac{\int_{\text{sfera}} \rho(r)\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} \qquad [I.27]$$

dove con $q(r) = \int_{\text{sfera}} \rho(r)\, d\tau$ abbiamo indicato la carica contenuta dentro la sfera S con centro in O e raggio r. La [I.27] ci dice che *a distanza r dal centro O, la distribuzione sfericamente simmetrica di cariche produce un campo elettrico pari a quello che sarebbe prodotto da una carica puntiforme q (r) disposta nel centro O, e pari alla carica totale contenuta all'interno della sfera di raggio r.*

E.I.8. *Consideriamo una regione sferica S di raggio R, dotata di carica Q uniformemente distribuita sul suo volume (dunque* $\rho = \dfrac{Q}{(4/3)\pi R^3}$ *= costante). Calcolare (nel vuoto) il campo* $E_0(r)$ *presente internamente ed esternamente alla sfera.*

Consideriamo una sfera s di raggio r, concentrica con la sfera S. Se $r > R$, allora dentro s è contenuta tutta la carica Q. La [I.27] diviene allora:

$$\text{per } r > R: \qquad E_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

Esternamente al volume da essa occupata, una distribuzione sferica di carica produce lo stesso campo che sarebbe prodotto da una carica puntiforme di pari valore disposta nel centro della sfera.

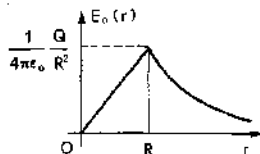
Se $r < R$, internamente ad s si trova una carica $q(r)$ pari a:

$$q(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{4/3\,\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q r^3}{R^3}$$

La [I.27] diviene dunque:

$$\text{per } r < R: \qquad E_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r$$

Come si vede, un guscio sferico come quello rosa in figura non dà alcun contributo al campo elettrico presente al suo interno.

Nel suo complesso, il campo elettrico $E_0(r)$ generato nello spazio dalla distribuzione sferica omogenea di raggio R ha, in funzione di r, l'andamento mostrato in figura.

E.I.9. *Calcolare in modo diretto, mediante la [I.15], il campo elettrico in un punto P interno a un guscio sferico di spessore trascurabile, dotato di densità di carica superficiale σ uniforme.*

Consideriamo un cono elementare, con vertice in P e angolo solido $d\Omega$; siano dS' e dS'' gli elementi di supeficie che il cono intercetta sulla sfera. I contributi $d\vec{E}_0'$ e $d\vec{E}_0''$ che dS' e dS'' portano al campo elettrico in P sono, evidentemente, diretti in verso opposto. Dimostriamo che essi sono uguali in modulo, cosicché essi portano un contributo totale nullo al campo in P.

Si ha infatti:

$$dE_0' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS'}{r_A^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\frac{dS_n'}{\cos\theta'}\frac{1}{r_A^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{\cos\theta'}\frac{dS_n'}{r_A^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{\cos\theta'}d\Omega$$

Nel penultimo passaggio, abbiamo scritto dS' in termini della proiezione dS_n' di dS' normalmente a r_A ($dS_n' = dS'\cos\theta'$); nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la definizione di angolo solido $\left(d\Omega = \frac{dS_n'}{r_A^2}\right)$. Analogamente si ha:

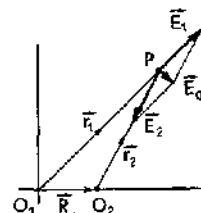
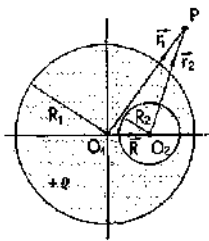
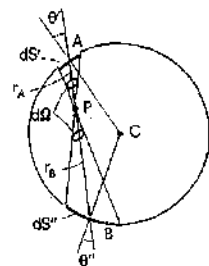
$$dE_0'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{\cos\theta''}d\Omega$$

D'altra parte, è $\cos\theta' = \cos\theta''$ (il triangolo ABC è isoscele); dunque $dE_0' = dE_0''$. Integrando su tutta la sfera, si ha che il campo in P è espresso in termini di contributi elementari che sono, a coppie, uguali ed opposti. Il campo $\vec{E}_0$ totale in P è dunque nullo.

E.I.10. *In una sfera con centro in O_1 uniformemente carica con densità di carica ρ è praticato un foro sferico con centro in O_2, all'interno del quale c'è il vuoto. Siano R_1 ed R_2 rispettivamente il raggio della sfera e il raggio del foro. Calcolare il campo elettrico $\vec{E}$ in un punto P esterno alla sfera, e in un punto P' interno al foro.*

In problemi di questo tipo conviene ricorrere al principio di sovrapposizione applicato a una distribuzione di cariche equivalente a quella data. La distribuzione data equivale a una sfera di centro O_1 e raggio R_1 con densità di carica ρ uniforme su tutto il suo volume, alla quale si sovrapponga una distribuzione di densità uniforme $-\rho$ limitata alla sfera di centro O_2 e raggio R_2. La distribuzione data è così ricondotta alla sovrapposizione di due distribuzioni dotate di simmetria sferica, per le quali valgono le considerazioni precedentemente svolte.

Poiché P è disposto esternamente ad entrambe le sfere, ogni sfera genera in esso lo stesso campo che genererebbe una carica puntiforme disposta al suo centro. Dunque:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}$$

dove:

$\vec{r}_1$ è il vettore posizione di P rispetto a O_1

$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{R}$ è il vettore posizione di P rispetto a O_2

$\vec{R}$ è il vettore posizione di O_2 rispetto a O_1

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \cdot \rho$$

$$Q_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \cdot (-\rho)$$

Anche per il punto P' interno alla cavità si applica il principio di sovrapposizione; il campo $\vec{E}_0'$ è ancora dato dalla somma dei campi $\vec{E}_1'$ ed $\vec{E}_2'$ generati da due cariche puntiformi disposte rispettivamente in O_1 ed O_2, il cui valore è però dato dalle cariche q_1 e q_2 espresse da:

$$q_1 = \frac{4}{3}\pi (r_1')^3 \cdot \rho \qquad \text{(carica interna a una sfera di raggio } r_1'\text{, con densità } \rho\text{)}$$

$$q_2 = \frac{4}{3}\pi (r_2')^3 \cdot (-\rho) \qquad \text{(carica interna a una sfera di raggio } r_2'\text{, con densità } -\rho\text{)}$$

Dunque:

$$\vec{E}_0' = \vec{E}_1' + \vec{E}_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 \vec{r}_1'}{(r_1')^3} + \frac{q_2 \vec{r}_2'}{(r_2')^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi (r_1')^3 \rho \frac{\vec{r}_1'}{(r_1')^3} + \frac{4}{3}\pi (r_2')^3 (-\rho) \frac{\vec{r}_2'}{(r_2')^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_1' - \vec{r}_2') = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1' - \vec{r}_2') = \frac{\rho\vec{R}}{3\varepsilon_0}$$

Vediamo che il campo all'interno della cavità è uniforme (è sparita la dipendenza da $\vec{r}_1'$ ed $\vec{r}_2'$) ed è proporzionale alla distanza $\vec{R}$ fra i centri delle due sfere. Nel caso particolare che i due centri coincidano, il campo elettrico all'interno della cavità è nullo ($\vec{R} = 0$) coerentemente con quanto avevamo visto negli esempi E.I.8 ed E.I.9.

E.I.11. ***Campo elettrico generato da una distribuzione di carica uniforme su un filo rettilineo molto lungo (lunghezza infinita).***

Sia λ (costante) la densità lineare di carica disposta sul filo. Consideriamo una superficie cilindrica S (raggio r e altezza L) coassiale col filo, ed applichiamo ad S il teorema di Gauss. Per motivi di simmetria, il campo elettrico è ortogonale al filo, ed è costante su ogni punto del mantello cilindrico. Si ha pertanto:

$$\Phi_S(\vec{E}_0) = E_0(r) \cdot 2\pi r L$$

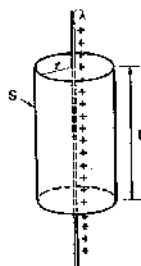
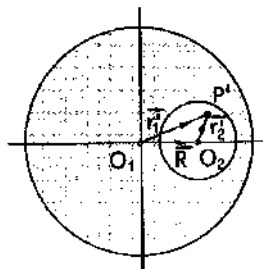
(il flusso è nullo attraverso le basi del cilindro dove $\vec{E} \perp d\vec{S}$). D'altra parte la carica Q^{int} contenuta internamente al cilindro è:

$$Q^{int} = \lambda \cdot L$$

In virtù di queste relazioni il teorema di Gauss (eq. [I.22]) si scrive:

$$E_0(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

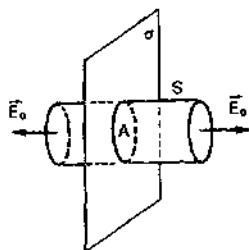
da cui:

$$E_0(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

E.I.12. *Campo generato da una distribuzione uniforme di carica disposta su un piano infinitamente esteso (strato piano).*

Piano uniformemente carico

Sia σ (costante) la densità superficiale di carica. Consideriamo una superficie cilindrica S di sezione normale A con le generatrici ortogonali al piano, e applichiamo a S il teorema di Gauss. Per ragioni di simmetria il campo $\vec{E}_0$ è ortogonale al piano (non si ha dunque contributo al flusso dalla superficie laterale del cilindro) ed ha modulo uguale a parità di distanza dal piano. Il flusso attraverso S è dunque solo quello attraverso le sue basi, e vale $\Phi(\vec{E}_0) = 2AE_0$. D'altro canto la carica contenuta in S è semplicemente $Q^{int} = A \cdot \sigma$, per cui la [I.22] si scrive in definitiva:

$$2AE_0 = \frac{A \cdot \sigma}{\varepsilon_0}$$

da cui si ricava per E_0 la stessa espressione [I.19] che avevamo calcolato direttamente a partire dalla [I.15]. Si conferma, ovviamente, che il campo elettrico è uniforme nei due semispazi in cui il piano carico suddivide lo spazio.

E.I.13. *Doppio strato piano. Consideriamo due piani paralleli infinitamente estesi, su cui sia disposta una densità di carica σ uniforme, uguale in modulo ma opposta in segno. Calcolare il campo elettrico generato nello spazio circostante, sia internamente che esternamente all'intercapedine fra i due piani.*

Doppio strato carico

Il campo elettrico può essere calcolato facilmente a partire dai risultati relativi allo strato singolo (Esempio E.I.12, ovvero eq. [I.15]) applicando il principio di sovrapposizione.

Chiamiamo S_1 lo strato carico positivamente ed $\vec{E}_1$ il campo elettrico da esso generato, ed S_2 ed $\vec{E}_2$ lo strato negativo e il rispettivo campo. $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ sono uniformi nei rispettivi semispazi, sono fra di loro uguali in modulo, e sono orientati così come mostrato in figura. Come si vede, essi si annullano a vicenda nelle regioni (1) e (3) esterne all'intercapedine; mentre all'interno essi si sommano dando luogo a un campo risultante $\vec{E}_0$ di modulo

$$E_0 = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad [I.28]$$

ed orientato dallo strato positivo verso quello negativo.

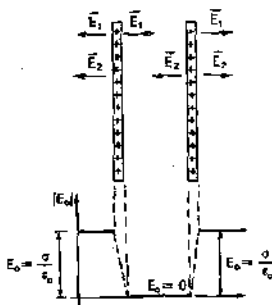
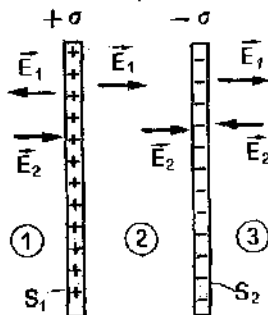
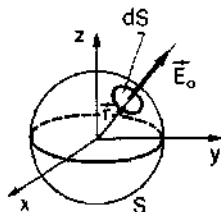
In maniera del tutto analoga si può calcolare il campo generato da due strati dotati di densità di carica σ uniforme dello stesso segno; si ottiene il risultato mostrato in figura.

E.I.14. *Misurando, in una certa regione di spazio, le componenti cartesiane di un campo elettrico $\vec{E}_0$, si trova che esse possono essere espresse nella seguente forma:*

$$\begin{cases} E_{0x} = krx \\ E_{0y} = kry \\ E_{0z} = krz \end{cases}$$

dove k è una costante e r è la distanza dall'origine del punto P(x, y, z) nel quale si considera il campo.
Calcolare la quantità di carica Q contenuta all'interno di una sfera di raggio R e centro nell'origine degli assi cartesiani di riferimento.

In termini vettoriali, il campo può essere scritto nella forma:

$$\vec{E}_0 = kr\vec{r}$$

Infatti x, y, z costituiscono le componenti del vettore $\vec{r}$. Si tratta dunque di un campo radiale.

La carica Q contenuta all'interno della superficie sferica S di raggio R può essere calcolata facilmente usando il teorema di Gauss (eq. [I.24]):

$$Q = \varepsilon_0 \Phi_S(\vec{E}_0)$$

dove $\Phi_S(\vec{E}_0)$ è il flusso di $\vec{E}_0$ attraverso la superficie S. Considerata la particolare simmetria del campo $\vec{E}_0$, il calcolo del flusso uscente dalla superficie sferica è immediato:

$$\Phi_S(\vec{E}_0) = \int \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \int k r \vec{r} \cdot d\vec{S} = \int k r^2 \, dS = k R^2 \int dS = k R^2 \cdot 4 \pi R^2 = 4 \pi k R^4$$

Si ha pertanto in definitiva:

$$Q = 4 \pi \varepsilon_0 k R^4$$

I.6. La prima equazione di Maxwell

La prima equazione di Maxwell esprime la legge di Gauss in forma locale, anziché nella forma integrale [I.22]. Rispetto alla espressione integrale, la prima equazione di Maxwell è soggetta ad alcune limitazioni, sulle quali richiameremo l'attenzione del lettore; tuttavia essa è per contro suscettibile di generalizzazioni e manipolazioni matematiche che ne fanno uno strumento irrinunciabile per affrontare nella sua generalità il problema dell'elettrostatica, e più in generale i problemi di elettromagnetismo.

Cominciamo col dimostrare un teorema di matematica, detto *teorema della divergenza*, che ci servirà per ricavare la prima equazione di Maxwell.

Consideriamo un campo vettoriale $\vec{E}(x,y,z)$, definito entro un dominio spaziale all'interno del quale le componenti di $\vec{E}$ siano derivabili rispetto alle tre variabili x, y, z. Ci proponiamo di calcolare il flusso di $\vec{E}$ uscente da un volumetto elementare di forma parallelepipeda e dimensioni lineari dx, dy, dz. Cominciamo col calcolare il flusso elementare uscente dalle facce ortogonali all'asse x

$$d\Phi_{ABCD} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = - E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) \, dy \, dz$$

dove x è il valore della coordinata x all'altezza della faccia $ABCD$; $\bar{y}$, $\bar{z}$ sono il valor medio delle coordinate y e z sulla faccia $ABCD$. Il segno meno deriva dal fatto che la normale $\hat{n}$ uscente dalla faccia $ABCD$ ha verso opposto all'asse x. Analogamente si ha, per il flusso attraverso la faccia $EFGH$:

$$d\Phi_{EFGH} = E_x(x + dx, \bar{y}, \bar{z}) \, dy \, dz$$

A meno di infinitesimi di ordine superiore, si ha:

$$E_x(x + dx, \bar{y}, \bar{z}) = E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, \bar{y}, \bar{z}) \, dx$$

e dunque

$$d\Phi_{EFGH} = E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) \, dy \, dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \, dx \, dy \, dz$$

da cui scende:

$$d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{EFGH} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\, d\tau$$

dove $d\tau = dx\, dy\, dz$ è l'elemento di volume. In maniera analoga si trovano i contributi di flusso attraverso le coppie di facce ortogonali agli assi y e z, ottenendo in definitiva, per il flusso totale $d\Phi$, l'espressione:

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) d\tau \qquad [1.29]$$

Divergenza di un vettore

Si definisce *divergenza del vettore* $\vec{E}$ (e la si indica con $\mathrm{div}\vec{E}$) la quantità:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad [1.30]$$

per cui si scrive:

$$d\Phi = \mathrm{div}\vec{E}\, d\tau = \mathrm{div}\vec{E}\, dx\, dy\, dz$$

che è l'espressione che assume il flusso uscente attraverso le facce del volumetto elementare $d\tau$. A partire da questa relazione, si ricava facilmente, per semplice integrazione, il flusso uscente attraverso la superficie S che racchiude un volume finito τ. Va infatti osservato che la somma dei flussi elementari $d\Phi$ dà contributo nullo per tutte le superfici elementari interne ad S, ognuna delle quali è attraversata due volte, ma in versi opposti, quando si calcola il flusso uscente da due volumetti contigui. Integrando, si ottiene dunque in definitiva:

$$\Phi_S(\vec{E}) \equiv \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \mathrm{div}\vec{E} \cdot d\tau \qquad [1.31]$$

Teorema della divergenza

Il flusso di un vettore $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa S è pari all'integrale della divergenza di $\vec{E}$ calcolato sul volume τ racchiuso da S (teorema della divergenza)

Notiamo che la divergenza è un *operatore differenziale* che applicato al campo vettoriale $\vec{E}$ fornisce la funzione scalare $\mathrm{div}\vec{E}$. Un formalismo compatto ed efficace per esprimere il teorema della divergenza (e più in generale per esprimere le equazioni dell'elettromagnetismo) si basa sull'introduzione dell'*operatore differenziale vettoriale* detto operatore *nabla* $\vec{\nabla}$:

Operatore differenziale nabla $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad [1.32]$$

dove $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ sono i versori degli assi coordinati. In termini dell'operatore nabla, si può scrivere:

$$\mathrm{div}\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \qquad [1.33]$$

La divergenza di un vettore può essere scritta come prodotto scalare fra l'operatore nabla e il vettore stesso. Tenuto conto della [I.33], la [I.31] può essere scritta come:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot d\tau \qquad [I.34]$$

Accoppiando il teorema della divergenza (eq. [I.31] o [I.34]) con il teorema di Gauss (eq. [I.25]), si ha:

$$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 \cdot d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_\tau \rho(x,y,z)\, d\tau \qquad [I.35]$$

Poiché il teorema di Gauss vale qualunque sia la superficie chiusa di integrazione S, la [I.35] deve valere qualunque sia il volume τ di integrazione; ciò implica l'uguaglianza delle funzioni integrande. Dunque:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x,y,z)} \qquad [I.36]$$

Prima equazione di Maxwell

ovvero, usando il formalismo dell'operatore nabla:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x,y,z)} \qquad [I.36.a]$$

La [I.36] costituisce la **prima equazione di Maxwell.** Questa equazione è sostanzialmente equivalente alla legge di Gauss, dalla quale è stata dedotta senza aggiungere altra ipotesi se non quella che valga il teorema della divergenza. Ciò richiede, tuttavia, che il campo vettoriale $\vec{E}$ sia derivabile in ogni punto del dominio considerato: ipotesi che non era richiesta per la validità della legge di Gauss. In effetti, negli esempi considerati nel precedente paragrafo, ci sono capitati molti casi in cui il campo elettrico presentava discontinuità: ciò succede quando la densità di carica è localizzata in porzioni di spazio di volume trascurabile (ad esempio assimilabili a una superficie, come nel caso dello strato, o del doppio strato). In altri casi (come nell'esempio E.I.8), il campo elettrico, pur essendo ovunque continuo, presenta su una determinata superficie (sfera di raggio R, nel caso dell'esempio) una angolosità, per cui non ammette derivate su tale superficie. Ciò accade quando la densità ρ subisce una discontinuità, passando ad esempio bruscamente (come succede in E.I.8) da valori finiti dentro e sulla sfera a valori nulli fuori della sfera stessa. In tutti questi casi, il teorema di Gauss è applicabile ovunque senza alcun problema nella sua forma integrale (eq. [I.22], o eq. [I.25]); mentre la [I.36] può essere applicata solo all'interno di ognuno dei domini spaziali in cui il campo elettrico è ovunque derivabile, raccordando poi fra di loro le soluzioni ricavate all'interno di ciascuno di tali domini mediante opportune condizioni al contorno sulle superfici di separazione. Esempi di applicazione di questa procedura verranno trattati nei prossimi capitoli.

A fronte di questa limitazione, che la [I.36] presenta rispetto alla [I.25], vedremo però che la [I.36] consente di scrivere il problema generale del-

l'elettrostatica in termini di una equazione differenziale assai compatta ed efficace (equazione fondamentale dell'elettrostatica).

Osserviamo inoltre che la [I.25] collega fra di loro grandezze fisiche calcolate in *posizioni diverse*: il campo elettrico *sulla superficie S* alla densità di carica ρ *nei punti interni alla superficie S stessa*. Ciò non pone alcun problema fino a che le grandezze in gioco sono costanti nel tempo; tuttavia la generalizzazione al caso non stazionario non è immediata, considerato che una eventuale variazione nel tempo – ad esempio – della densità ρ *dentro* la superficie non può tradursi in una simultanea variazione del campo elettrico *sulla* superficie, visto che nessun fenomeno fisico può propagarsi istantaneamente (cioè con velocità infinita).

Al contrario la [I.36] è una *equazione locale*, che lega cioè fra di loro grandezze fisiche diverse calcolate *nella stessa posizione*. Essa si presta pertanto a immediata generalizzazione al caso non stazionario, introducendo semplicemente la dipendenza dal tempo delle grandezze che in essa compaiono. In effetti, la [I.36] costituisce non solo l'equazione fondamentale dell'elettrostatica, ma è anche uno dei fondamenti delle più generali leggi dell'elettromagnetismo.

Esempi

E.I.15. *Calcolare la divergenza del campo vettoriale $\vec{f} = k\vec{r}$, con k costante.*

Si ha evidentemente:

$$\begin{cases} f_x = kx \\ f_y = ky \\ f_z = kz \end{cases}$$

e dunque:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \frac{\partial kx}{\partial x} + \frac{\partial ky}{\partial y} + \frac{\partial kz}{\partial z} = 3k$$

E.I.16. *Calcolare il flusso del vettore $\vec{f} = k\vec{r}$ uscente dalla sfera con centro nell'origine e raggio R. Verificare la validità del teorema della divergenza.*

Si ha:

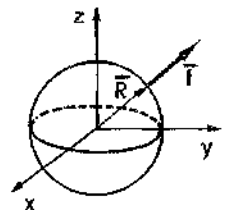
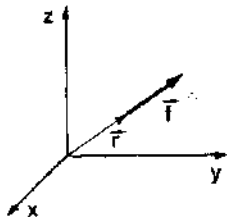
$$\Phi_S(\vec{f}) = \int_S k\vec{r}\cdot d\vec{S} = \int_S kR\,dS = kR\int_S dS = kR\,4\pi R^2 = k\,4\pi R^3$$

$$\int_\tau \operatorname{div}\vec{f}\,d\tau = \int_\tau 3k\,d\tau = 3k\int_\tau d\tau = 3k\frac{4}{3}\pi R^3 = k\,4\pi R^3$$

L'uguaglianza fra queste due quantità verifica la validità, in questo caso, del teorema della divergenza.

E.I.17. *Un campo elettrostatico nel vuoto ha, in coordinate cartesiane, l'espressione:*

$$\vec{E}_0 = \hat{i}Ax^2$$

dove $\hat{i}$ è il versore dell'asse delle ascisse e A una costante. Calcolare la densità volumica ρ della carica elettrica che produce il campo.

Il problema può essere risolto usando la prima equazione di Maxwell, che stabilisce una relazione locale fra il campo elettrico $\bar{E}_0$ e la densità di carica ρ

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

Essendo $\bar{E}_0 \equiv (A x^2, 0, 0)$, si ha

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E}_0 = \operatorname{div} \bar{E}_0 = \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial E_{0z}}{\partial z} = 2 A x$$

Dunque la densità di carica ρ ha l'espressione:

$$\rho = \varepsilon_0 \bar{\nabla} \cdot \bar{E}_0 = 2 \varepsilon_0 A x$$

La densità di carica assume valori costanti su strati a x costante, cioè su piani paralleli al piano yz.

E.1.18. *Struttura granulare della materia.*

Nel paragrafo 1.1 abbiamo osservato che la materia, essendo costituita di atomi e di molecole, ha struttura granulare. A dispetto di ciò, nel paragrafo 1.4 abbiamo introdotto una funzione continua (la densità di carica ρ) per descrivere la distribuzione spaziale della carica: abbiamo visto infatti, a commento della definizione [1.10], che ogni volumetto di dimensioni significative dal punto di vista macroscopico, contiene comunque un numero estremamente elevato di cariche microscopiche.

Nei precedenti due paragrafi, abbiamo considerato alcune situazioni fisiche nelle quali la densità di carica è stata schematizzata come una funzione dotata di discontinuità su particolari superfici; o addirittura nelle quali la carica era localizzata completamente su domini bidimensionali (superfici geometriche), dotati dunque di volume nullo.

Forniamo in questo esempio alcuni ordini di grandezza delle dimensioni lineari che intervengono alla scala atomica, a giustificazione del fatto che le suddette schematizzazioni sono pienamente adeguate a descrivere la distribuzione di carica a livello macroscopico.

In un atomo di carbonio, il nucleo è costituito da 6 protoni e 6 neutroni (numero atomico $N = 6$; numero di massa $A = 12$), con intorno una «nuvola elettronica» costituita da sei elettroni la cui massa è circa 2000 volte più piccola della massa del nucleo.

Le dimensioni lineari (raggio R) del nucleo atomico possono essere qualitativamente espresse tramite la relazione empirica

Raggio atomico

$$R = R_0 A^{1/3} \qquad [1.37]$$

dove $R_0 \simeq 1{,}5 f = 1{,}5 \cdot 10^{-15}$ m ($1 f = 1$ fermi $= 10^{-15}$ m). Nel caso del carbonio ($A = 12$), risulta $R \simeq 3{,}5 f$. Osserviamo per inciso che, essendo $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg la massa di ogni nucleone, la densità di massa δ del nucleo atomico è dell'ordine di:

Densità di massa della materia nucleare

$$\delta = \frac{12 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{4/3\, \pi R^3} \simeq \frac{2 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}}{1{,}8 \cdot 10^{-43}\ \text{m}^3} \simeq 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^5 \frac{\text{ton}}{\text{mm}^3}$$

(centomila tonnellate per millimetro cubo!).

Il raggio della nuvola di elettroni (il raggio dell'atomo) è molto più grande (circa 100.000 volte maggiore) del raggio del nucleo; esso è infatti dell'ordine di 10^{-10} m (10^{-10} m $= 1$ Å, un Angstrom). Questo valore del raggio atomico è tuttavia molto minore delle lunghezze significative nei problemi macroscopici.

La materia si presenta elettricamente carica per conseguenza di variazioni, percentualmente assai modeste, della popolazione di elettroni nei suoi atomi. Queste variazioni si manifestano, in corrispondenza delle superfici che delimitano i vari materiali, su spessori confrontabili con il raggio atomico, cioè su spessori dell'ordine dell'Ångstrom. Si tratta di spessori che sono in effetti trascurabili rispetto alle dimensioni caratteristiche degli oggetti macroscopici.

I.7. Il *potenziale elettrico*

Il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q è espresso dalla legge di Coulomb (eq. [I.4]):

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r} \qquad [I.4]$$

Se moltiplichiamo scalarmente la [I.4] per uno spostamento elementare $d\vec{l}$, e poi integriamo lungo una qualunque traiettoria che porti da una posizione A a una posizione B, si ha:

$$\int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}r\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$$

Questa relazione mostra che il campo elettrico generato da una carica puntiforme è un campo conservativo; il suo integrale di linea fra due posizioni A e B dipende infatti solo dalle posizioni A e B non dalla particolare traiettoria che si segue per andare da A a B.

Il campo elettrostatico è conservativo

Ponendo $V_0(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} + C$ (con C costante arbitraria), si ha:

$$\int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = V_0(A) - V_0(B) \qquad [I.38]$$

Ovvero, se A è una posizione di riferimento e P la posizione generica di coordinate x, y, z:

$$V_0(x,y,z) = -\int_A^P \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} + V_0(A) \qquad [I.39]$$

La funzione $V_0(x,y,z)$, di cui la [I.39] (o la [I.38]) rappresenta la definizione, viene detta *potenziale elettrostatico* generato dalla carica puntiforme Q. Il potenziale $V_0(x,y,z)$ corrisponde all'*energia potenziale* già introdotta per i campi conservativi, con la precisazione che ci si riferisca a una *carica unitaria* (con le cautele specificate a commento della [I.5]). Le dimensioni fisiche del potenziale elettrico sono quelle di *una energia fratto una carica elettrica*; l'unità di misura nel sistema SI è detta *Volt*, ed equivale a un Joule fratto Coulomb:

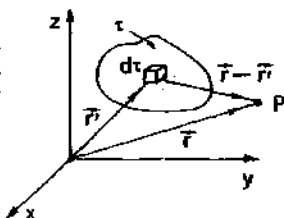
Potenziale elettrostatico V_0: energia potenziale per unità di carica

Volt, unità di misura del potenziale elettrico

$$[V] = \frac{[\text{Energia}]}{[\text{Carica}]} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} \equiv \text{Volt}$$

esso ammetterà dunque un potenziale V_o legato al campo dalle medesime relazioni [I.38] (ovvero [I.39]) e [I.40] (ovvero [I.41]).

Se le sorgenti hanno una distribuzione costante e nota, in domini limitati dello spazio, così che si possa porre uguale a zero la costante additiva arbitraria, allora l'espressione esplicita del potenziale $V_o(x,y,z)$ si ottiene per immediata generalizzazione della [I.42]:

$$V_o(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \qquad \text{per distribuzione discreta} \qquad [I.43]$$

$$\boxed{V_o(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{\rho(x',y',z')\,d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \qquad \text{per distribuzione continua su dominio tridimensionale} \qquad [I.44]$$

$$V_o(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{\sigma(x',y',z')\,dS'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \text{per distribuzione continua su dominio bidimensionale} \qquad [I.44.a]$$

Principio di sovrapposizione o additività dei potenziali

$$V_o(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{\lambda(x',y',z')\,dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \text{per distribuzione continua su dominio unidimensionale} \qquad [I.44.b]$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione del punto dove si calcola il potenziale; $\vec{r}_i$ è il vettore posizione della carica iesima; $\vec{r}' \equiv (x',y',z')$ è la posizione dell'elemento di carica di cui si calcola via via il contributo al potenziale; ρ, σ, λ rappresentano la densità di carica, rispettivamente volumica, superficiale o lineare; $d\tau'$, dS', dl' l'elemento di volume, di superficie o di linea su cui si esegue l'integrale.

Queste relazioni sono le analoghe della [I.7], [I.11], [I.15] e [I.16] per il campo elettrico.

Osserviamo che il potenziale V_o è una funzione (scalare), che ovviamente risulta dipendere in generale dal vettore posizione $\vec{r}$ (e dunque dalle coordinate cartesiane x,y,z) e non solo dal modulo r di $\vec{r}$. Il fatto che il potenziale sia una funzione scalare, rende il suo calcolo meno laborioso di quanto non sia il calcolo del campo elettrico $\vec{E}_o$ attraverso le relazioni introdotte nel par. I.4. Quando siano note a priori le distribuzioni di carica, il metodo più efficace per calcolare il campo elettrico è quello di calcolare il potenziale tramite la [I.43] e le [I.44] e da questo il campo elettrico tramite la [I.41]; anziché calcolare direttamente il campo elettrico attraverso la [I.7], [I.11], [I.15], [I.16].

Osserviamo anche che nel caso più generale possono essere presenti sia distribuzioni discrete che distribuzioni continue (sia volumiche, sia superficiali, sia lineari), e il potenziale è allora somma dei potenziali generati separatamente da ogni tipo di distribuzione. (Principio "di sovrapposizione")

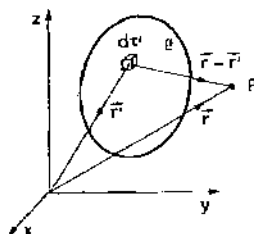
Quando le distribuzioni delle cariche sorgenti non ci siano note a priori (ciò accade ad esempio se esse sono dislocate su conduttori), la [I.43] e le [I.44] non sono più utilizzabili per il calcolo del potenziale; discuteremo più avanti (cap. II) le tecniche che possono essere impiegate in questi casi.

derà dunque solo dalla coordinata x. Quanto alla dipendenza di V_0 da x, si ha dalla [I.44.a]:

$$V_0(x) = \int \frac{\sigma\, dS'}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_0^\infty \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi R\, dR}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + x^2}\right]_0^\infty$$

Per $R = 0$, questa espressione vale $\dfrac{\sigma x}{2\varepsilon_0}$; mentre per $R \to \infty$ essa tende a infinito. Per cui la relazione precedente ci fornisce, per il potenziale, l'espressione formale

$$V_0(x) = -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} + \infty$$

Distribuzioni di carica che si estendono all'infinito

Espressione, questa, priva di significato matematico. *Questa difficoltà nell'uso delle [I.44] si incontra tutte le volte in cui la distribuzione delle cariche sorgenti si estende fino all'infinito*: difficoltà che potevamo aspettarci, considerato che nello scrivere le [I.44] abbiamo ipotizzato che ogni elemento di carica fornisca al potenziale un contributo che si annulla all'infinito; ma all'infinito è situata la maggior parte della carica che genera il potenziale stesso.

Le [I.44], così come sono scritte, *sono utilizzabili solo qualora tutte le sorgenti siano localizzate in una regione limitata dello spazio.*

Questa non pare una limitazione significativa, considerato che, nella realtà del laboratorio, non esiste distribuzione di carica che si estenda fino all'infinito.

Tuttavia quella di considerare distribuzioni che si estendono all'infinito è una schematizzazione utile in molti problemi; e conviene sviluppare una espressione alternativa per le [I.44], che sia utilizzabile per distribuzioni che si estendono all'infinito.

All'interno della distribuzione di carica ρ, consideriamo l'elemento di volume $d\tau'$, il cui vettore posizione è $\vec{r}'$. Il contributo che esso fornisce al potenziale $V_0(\vec{r})$ nel punto P è:

$$dV_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\, d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + dC \qquad \text{[I.46]}$$

La costante arbitraria, a meno della quale il potenziale è definito, è stata scritta come dC, poiché essa è in generale dello stesso ordine di dV_0.

Per arrivare alla [I.44], avevamo supposto che ognuno di questi contributi fosse tale da non fornire alcun apporto al potenziale all'infinito; cioè avevamo supposto che fosse nulla la costante dC. Poiché ciò ingenera la difficoltà che abbiamo più sopra riscontrato quando la distribuzione si estende all'infinito, scegliamo ora la costante dC nella precedente relazione in modo che dV_0 sia nullo, anziché all'infinito, in una posizione di riferimento P_0, peraltro arbitraria, di vettore posizione $\vec{r}_0$. Osserviamo che la costante dC è – per definizione stessa di «costante» – indipendente dalla posizione $\vec{r}$ di P; tuttavia essa dipende in generale dalla coordinata $\vec{r}'$ del particolare elemento di volume $d\tau'$ di volta in volta considerato. Ponendo nella [I.46] $\vec{r} = \vec{r}_0$ e imponendo che in tale posizione sia $dV_0 = 0$, si ha:

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\, d\tau'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|} + dC$$

da cui:

$$dC = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\tau'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|}$$

Sostituendo nella [I.46] e integrando su tutta la distribuzione delle cariche sorgenti, otteniamo:

$$V_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho\, d\tau' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|}\right) \qquad [I.47]$$

e relazioni analoghe nel caso che la distribuzione di carica sia una distribuzione di superficie o una distribuzione lineare. La [I.47] sostituisce la [I.44] nel caso che la distribuzione delle cariche sorgenti si estenda fino all'infinito.

Esempi

E.I.22. *Utilizzare la [I.47] per calcolare il potenziale generato da una distribuzione superficiale uniforme di densità superficiale (costante) σ su un piano infinito.*

Si tratta di ricavare, direttamente, la [I.45]. Usando i simboli definiti in figura, e imponendo che il potenziale si annulli in A (e dunque sia $\vec{r}_0 = OA$), abbiamo:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}'| = R$$

Per cui la [I.47] diviene:

$$V_0(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \sigma\, dS' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|}\right) =$$

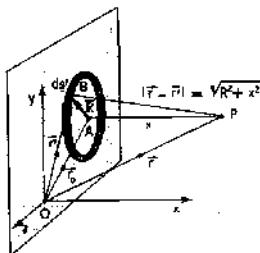
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \sigma\, 2\pi R\, dR \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} - \frac{1}{R}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^\infty \left(\frac{R\, dR}{\sqrt{R^2 + x^2}} - dR\right)$$

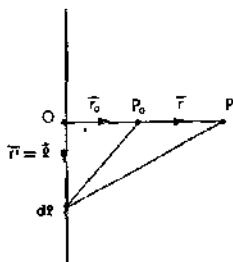
Trattandosi di una distribuzione superficiale, al posto di $\rho\, d\tau'$, abbiamo posto $\sigma\, dS' = \sigma\, 2\pi R\, dR$. Eseguendo l'integrale si ha:

$$V_0(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + x^2} - R\right]_{R=0}^{R=\infty} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo tenuto conto del fatto che:

$$\lim_{R\to\infty}(\sqrt{R^2 + x^2} - R) = \lim_{R\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{R^2 + x^2} + R} = 0$$

Il primo passaggio si ha moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{R^2 + x^2} + R)$.

E.I.23. *Usando la [I.47], calcolare il potenziale generato da un filo rettilineo uniformemente carico (densità lineare λ).*

Scegliendo come punto in cui $V_0 = 0$ un punto arbitrario P_0 a distanza r_0 dal filo, usando i simboli definiti in figura la [I.47] si scrive

$$V_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{l^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{l^2+r_0^2}}\right]\lambda\, dl =$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{l^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{l^2+r_0^2}}\right] dl$$

Tenendo conto che

$$\int\frac{dl}{\sqrt{l^2+r^2}} = \ln|l + \sqrt{l^2+r^2}\,| + C$$

e sostituendo nella relazione precedente si ottiene con semplici passaggi:

$$V_0(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

I.8. Alcune considerazioni sul significato di gradiente

La definizione di potenziale elettrico comporta che esso sia legato al campo elettrico dalla relazione differenziale [I.38.a]:

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = -dV_0 \qquad \text{[I.38.a]}$$

Ciò implica che il campo elettrico possa essere ricavato, a partire dal potenziale V_0, applicando a questo un opportuno operatore differenziale; operatore che abbiamo chiamato – a parte il segno – gradiente di V_0 ($\overrightarrow{\text{grad}}\, V_0$; vedi eq. I.41]):

$$\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_0 \qquad \text{[I.41]}$$

Combinando queste due relazioni si ricava la relazione che intercorre fra il gradiente di una funzione e il suo differenziale

relazione fra il gradiente $\overrightarrow{\text{grad}}\, V_0$ e il differenziale dV_0

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V_0 \cdot d\vec{l} = dV_0 \qquad \text{[I.48]}$$

La [I.48] costituisce, in effetti, la definizione dell'operatore *gradiente*. Se siamo in coordinate cartesiane, allora

$$V_0 = V_0(x,y,z) \Rightarrow dV_0 = \frac{\partial V_0}{\partial x}dx + \frac{\partial V_0}{\partial y}dy + \frac{\partial V_0}{\partial z}dz$$

e inoltre

$$d\vec{l} \equiv (dx, dy, dz)$$

Componenti cartesiane del gradiente

per cui la [I.48] si scrive:

$$(\text{grad } V_o)_x \cdot dx + (\text{grad } V_o)_y \cdot dy + (\text{grad } V_o)_z \cdot dz =$$
$$= \frac{\partial V_o}{\partial x} dx + \frac{\partial V_o}{\partial y} dy + \frac{\partial V_o}{\partial z} dz$$

relazione che deve valere per qualunque valore di $d\vec{l} \equiv (dx, dy, dz)$; da cui si ricava, per confronto fra il primo e il secondo membro, l'espressione delle *componenti cartesiane dell'operatore gradiente*:

$$(\text{grad. } V_o)_x = \frac{\partial V_o}{\partial x}$$
$$(\text{grad. } V_o)_y = \frac{\partial V_o}{\partial y} \qquad [I.49]$$
$$(\text{grad. } V_o)_z = \frac{\partial V_o}{\partial z}$$

coerentemente con quanto segue dal confronto fra la [I.40] e la [I.41]. Qualora nel problema si usino le coordinate polari, allora:

$$V_o = V_o(r, \theta, \varphi) \Rightarrow dV_o = \frac{\partial V_o}{\partial r} dr + \frac{\partial V_o}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V_o}{\partial \varphi} d\varphi$$

e inoltre

$$d\vec{l} \equiv (dr, r\, d\theta, r \sin\theta \, d\varphi)$$

per cui la [I.48] diviene

$$(\text{grad } V_o)_r \cdot dr + (\text{grad } V_o)_\theta \, r\, d\theta + (\text{grad } V_o)_\varphi \, r \sin\theta \, d\varphi =$$
$$= \frac{\partial V_o}{\partial r} dr + \frac{\partial V_o}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V_o}{\partial \varphi} d\varphi$$

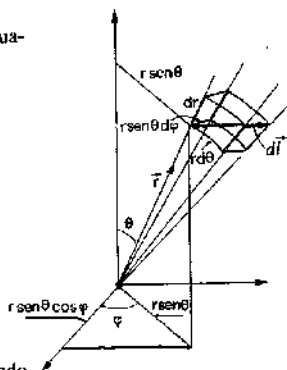
da cui per confronto fra i coefficienti di dr, $d\theta$, $d\varphi$ al primo e al secondo membro:

Componenti polari del gradiente

$$(\text{grad } V_o)_r = \frac{\partial V_o}{\partial r}$$
$$(\text{grad } V_o)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V_o}{\partial \theta} \qquad [I.50]$$
$$(\text{grad } V_o)_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_o}{\partial \varphi}$$

Queste rappresentano le *componenti del gradiente in coordinate polari*, cui conviene ricorrere (anziché alle componenti cartesiane) quando il problema abbia particolare simmetria in tali coordinate.

Ma torniamo ora alla [I.48] esprimendola, anziché in termini di componenti, in termini dei moduli dei vettori che in essa compaiono. Si ha

$$dV_o = \text{grad } V_o \cdot dl \cdot \cos\alpha$$

Derivata direzionale di una funzione di più variabili

dove α è l'angolo che fra loro formano il vettore $\overrightarrow{\text{grad}}\, V_o$ e lo spostamento elementare $d\vec{l}$. Dividendo ambo i membri per dl, si ottiene il rapporto $\frac{dV_o}{dl}$, che rappresenta la variazione per unità di lunghezza della funzione V_o lungo la direzione $\hat{l}$ di $d\vec{l}$ (*derivata direzionale di V_o lungo la direzione $\hat{l}$*):

$$\frac{dV_o}{dl} = \text{grad } V_o \cdot \cos\alpha \qquad \text{[I.51]}$$

La [I.51] ci dice che *la derivata direzionale di V_o parallelamente a $\hat{l}$ è data dalla proiezione su $\hat{l}$ del gradiente di V_o.*

$\overrightarrow{\text{grad}}\, V_o$ è ortogonale alle superfici equipotenziali

In una posizione generica P il gradiente di V_o è un vettore, in generale non nullo, le cui componenti cartesiane sono date dalle [I.49]. Se a partire da P ci si sposta di un tratto $d\vec{l}$ ortogonalmente a $\overrightarrow{\text{grad}}\, V_o$ (cosicché $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \cos\alpha = 0$), si ha $\frac{dV_o}{dl} = 0$, cioè $V_o =$ costante. Ciò significa che *$\overrightarrow{\text{grad}}\, V_o$ è diretto ortogonalmente* alle superfici $V_o =$ costante, cioè ortogonalmente *alle superfici equipotenziali*. Se anche $d\vec{l}$ è diretto ortogonalmente alle superfici equipotenziali ($\cos\alpha = 0$) allora la derivata direzionale $\frac{dV_o}{dn}$ risulta massima, e coincide con il modulo del gradiente:

La derivata direzionale è massima ortogonalmente alle superfici equipotenziali, e in tal caso $\frac{dV_o}{dn} = \text{grad } V_o$

$$\frac{dV_o}{dn} = \text{grad } V_o \qquad \text{[I.52]}$$

Osserviamo anche che il *verso di $\overrightarrow{\text{grad}}\, V_o$ è nella direzione* (ortogonale alle superfici equipotenziali) *in cui il potenziale aumenta con la sua derivata massima*.

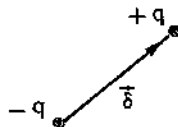
Nel caso particolare in cui V_o rappresenti il potenziale elettrostatico, tenuto conto della [I.41] ($\vec{E}_o$ è *opposto* a $\overrightarrow{\text{grad}}\, V_o$):

$$\vec{E}_o = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_o \qquad \text{[I.41]}$$

Il campo elettrico $\vec{E}_o$ è ortogonale alle superfici equipotenziali

Si ha da quanto fin qui detto che *il campo elettrico $\vec{E}_o$ è ortogonale alle superfici equipotenziali, nel verso in cui il potenziale elettrostatico diminuisce* con derivata direzionale massima (in modulo).

I.9. Il dipolo elettrico

Nell'esempio E.I.3 abbiamo già calcolato, in una particolare posizione, il campo elettrico generato da un sistema costituito da due cariche q uguali ed opposte poste a distanza fissa pari a δ l'una dall'altra; sistema che abbiamo chiamato *dipolo elettrico*, caratterizzandolo con il suo *momento di dipolo* $\vec{p} = q\vec{\delta}$ ($\vec{\delta}$ orientato dalla carica negativa alla positiva)

$$\vec{p} = q\,\vec{\delta} \text{ [momento elettrico]} = \text{[Coulomb]} \cdot \text{[metro]} \qquad \text{[I.53]}$$

Il dipolo elettrico è la più semplice fra le distribuzioni di cariche, subito dopo quella costituita da una singola carica puntiforme. Lo studio delle azioni elettrostatiche esercitate o subite da un dipolo elettrico, cui dedicheremo il presente paragrafo e il prossimo, è di particolare rilievo

perché ad esse sono riconducibili le interazioni elettrostatiche più semplici cui sono soggetti sistemi microscopici elettricamente neutri (atomi o molecole non ionizzati).

Calcoliamo in primo luogo l'espressione del potenziale elettrostatico generato dal dipolo a distanze r molto maggiori delle dimensioni lineari del dipolo stesso: $r >> \delta$.

Il potenziale V nel punto P è dato da (vedi eq. [I.43]):

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r_- - r_+)}{r_- \cdot r_+}$$

Per $r >> \delta$ sono valide le seguenti approssimazioni:

$$r_+ r_- \simeq r^2$$

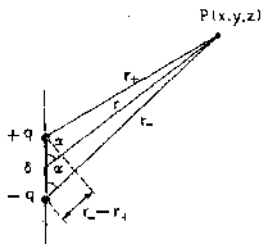
$$r_- - r_+ \simeq \delta \cos\alpha$$

per cui il potenziale $V(P)$ può essere scritto come:

$$V(P) = \frac{q\,\delta\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\,r\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

ovvero:

$$\boxed{V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}} \qquad [I.54]$$

Potenziale generato da un dipolo a $r >> \delta$

Ricordiamo che questa espressione del potenziale include la condizione che il potenziale sia nullo all'infinito. Osserviamo anche che mentre il potenziale generato da una carica puntiforme decresce come $1/r$ per $r \to \infty$, il potenziale generato da un dipolo decresce come $1/r^2$.

Noto il potenziale V_0, possiamo ora calcolare il campo elettrico E_0 semplicemente applicando a V_0 l'operatore di gradiente: tale procedura risulta in questo caso più immediata se si opera in coordinate polari. Scegliendo l'asse z coincidente con la direzione di $\vec{p}$, l'angolo α che $\vec{p}$ forma col raggio vettore $\vec{r}$ coincide con l'azimut θ del punto P in cui si calcola il potenziale; la [I.54] diviene:

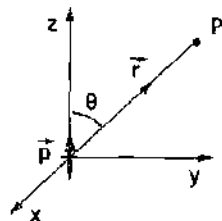
$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

Applicando a questa espressione di V_0 le [I.50] si ha:

$$E_{0r} = -(\text{grad } V_0)_r = -\frac{\partial V_0}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_{0\theta} = -(\text{grad } V_0)_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V_0}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} \qquad [I.55]$$

$$E_{0\varphi} = -(\text{grad } V_0)_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_0}{\partial\varphi} = 0$$

Campo elettrico generato da un dipolo espresso in coordinate polari

Osserviamo che il campo elettrico giace nel piano zr (cioè nel piano pr) come è evidenziato dal fatto che $E_{0\varphi} = 0$.

Esempio

E.I.24. *Calcolare le componenti cartesiane del campo elettrico generato da un dipolo, esprimendo il risultato in coordinate cartesiane.*

Tenuto conto che $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $r\cos\theta = z$, il potenziale [I.54] assume in coordinate cartesiane la seguente espressione:

$$V(x,y,z) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Applicando le [I.49] si ottiene facilmente:

Campo elettrico generato da un dipolo espresso in coordinate cartesiane

$$E_{0x} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\,xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$E_{0y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\,yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \qquad \text{[I.56]}$$

$$E_{0z} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\,z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

E.I.25. *Trovare le posizioni in cui la direzione del campo elettrico generato da un dipolo è parallela o antiparallela al momento $\vec{p}$ del dipolo.*

Più sinteticamente, le [I.56] possono essere scritte come:

$$E_{0x} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\,xz}{r^5}$$

$$E_{0y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\,yz}{r^5} \qquad \text{[I.56.a]}$$

$$E_{0z} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\,z^2 - r^2}{r^5}\right)$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Le [I.56] sono scritte nell'ipotesi che $\vec{p}$ sia posto nell'origine, orientato parallelamente all'asse z. Pertanto le posizioni cercate sono quelle in cui $E_{0x} = E_{0y} = 0$ (ma $E_{0z} \neq 0$). Ciò accade:

a) nei punti situati sull'asse z ($x = 0$; $y = 0$).
In tali punti si ha $E_{0x} = E_{0y} = 0$; ed essendo inoltre $r = z$, si ha

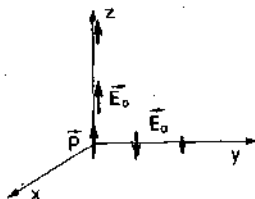
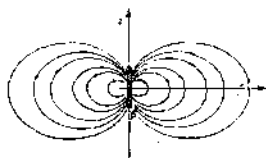
$$E_{0z} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\,z^2}{z^5} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{z^3} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}$$

Allontanandosi dal dipolo, il campo diminuisce come $1/r^3$; poiché $E_{0z} > 0$, il campo è parallelo al momento $\vec{p}$.

b) Nei punti situati sul piano xy ($z = 0$).
In tali punti si ha $E_{0x} = E_{0y} = 0$, ed inoltre

$$E_{0z} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}$$

Anche su tale piano, il campo diminuisce come $1/r^3$ allontanandosi dalla posizione del dipolo; essendo $E_{0z} < 0$, il campo è antiparallelo a $\vec{p}$.

Ricordiamo che le espressioni [I.56] (così come le equivalenti [I.55]) sono valide, per le approssimazioni fatte, solo fino a che ci si trova a distanza molto grande dal dipolo ($r >> \delta$).

Le linee di forza del campo di dipolo sono, per un dipolo disposto lungo l'asse z, del tipo di quelle riportate in figura sul piano yz. Le linee di forza nello spazio si ottengono per rotazione intorno all'asse z.

Osservazione: Consideriamo la funzione $V(r) = 1/r$, ed applichiamo ad essa l'operatore di gradiente. Ciò può essere fatto ricorrendo alla espressione cartesiana [I.49] dell'operatore gradiente, tuttavia il calcolo risulta assai più immediato utilizzando l'espressione polare [I.50]:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Relazioni che possono essere sintetizzate nella seguente espressione vettoriale:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad [I.57]$$

Utilizzando la [I.57] nell'espressione [I.54] del potenziale generato da un dipolo, otteniamo:

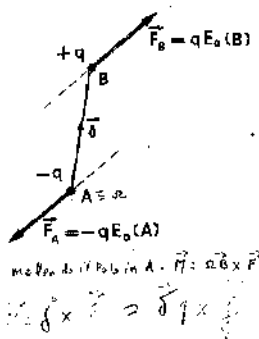
$$V_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad [I.58]$$

Questa espressione del potenziale generato dal dipolo ci tornerà utile nel terzo capitolo.

I.10. Azioni meccaniche su dipoli elettrici in un campo elettrico esterno

Consideriamo un dipolo rigido con momento di dipolo $\vec{p}$, immerso in un campo elettrico esterno descritto dal potenziale V_0. Ad opera del campo, il dipolo è sottoposto ad azioni meccaniche. Come per ogni altro sistema rigido, tali azioni meccaniche sono completamente descritte dal risultante $\vec{F}$ e dal momento risultante $\vec{M}$ delle forze.

Allo scopo di chiarire gli aspetti fisici essenziali del fenomeno, conviene esaminare, innanzi tutto, alcuni aspetti particolari sui quali ragionare con procedure dirette e già acquisite. Successivamente svilupperemo considerazioni più generali che daranno luogo alla formalizzazione completa del fenomeno.

Consideriamo dunque il caso semplice in cui un dipolo elettrico di momento $\vec{p}$ sia immerso in un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0$. Come evidente dalla figura, sul dipolo si manifesta una coppia di forze di momento $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0$, mentre il risultante delle forze risulta essere nullo. Nel caso in cui il campo elettrico non sia uniforme, oltre ad una coppia di forze, si manifesta un risultante non nullo delle forze. Nell'ipotesi che la distanza δ tra le

cariche del dipolo sia piccola rispetto alle altre distanze in gioco, il risultante delle forze avrà l'espressione:

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = (-q)\,\vec{E}(x, y, z) + q\vec{E}(x + dx, y + dy, z + dz)\,.$$

La componente F_x del risultante, a meno di infinitesimi di ordine superiore, avrà allora l'espressione:

$$F_x = qE_x(x + dx, y + dy, z + dz) - qE_x(x, y, z) =$$
$$= q\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz\right] = q\vec{\delta}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,E_x = \vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,E_x\,.$$

Per le componenti y e z si ottengono relazioni analoghe, così che sinteticamente si può scrivere:

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{E} \equiv (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{E}\,,$$

dove l'espressione $(\vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})$ indica l'operatore differenziale:

$$(\vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}) = p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Allo stesso risultato si giunge considerando che, trattandosi di forze conservative, esse ammettono una funzione energia potenziale U; ed $\vec{F}$ ed $\vec{M}$ devono essere deducibili da U una volta che questa sia nota. L'energia potenziale U del dipolo, d'altro canto, è immediatamente esprimibile in termini del potenziale V_0, ricordando che V_0 rappresenta l'energia potenziale per unità di carica. Con ovvio significato dei simboli, si ha dunque:

$$U = U_{(-)} + U_{(+)} = -q\cdot V_0(\vec{r}) + q\cdot V_0(\vec{r} + \vec{\delta})$$

Ponendo $V_0(\vec{r} + \vec{\delta}) = V_0(\vec{r}) + dV_0$, questa relazione diviene:

$$U = -q\cdot V_0(\vec{r}) + q\,V_0(\vec{r}) + q\,dV_0 = q\,dV_0$$

D'altra parte, usando la [1.48] (ponendo in essa $d\vec{l} = \vec{\delta}$) la precedente relazione può essere scritta in termini del gradiente di V_0:

$$U = q\cdot dV_0 = q\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,V_0\cdot\vec{\delta} = \overrightarrow{\text{grad}}\,V_0\cdot\vec{\delta}q = -\vec{E}_0\cdot\vec{p}$$

avendo ricordato che $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V_0$ e $\vec{p} = q\cdot\vec{\delta}$. Dunque in definitiva l'energia potenziale del dipolo immerso nel campo elettrico $\vec{E}_0$ è espressa dalla semplice relazione:

Energia potenziale di un dipolo di momento $\vec{p}$ immerso nel campo elettrico esterno $\vec{E}_0$

$$\boxed{U = -\vec{E}_0\cdot\vec{p}} \qquad [1.59]$$

Una volta nota l'espressione dell'energia potenziale U, possiamo ora ricavare il risultante $\vec{F}$ delle forze e il loro momento risultante $\vec{M}$. Ricordiamo a tal fine che il lavoro elementare dL compiuto dalle forze che agiscono su un sistema rigido quando questo compie uno spostamento elementare caratterizzato dalla traslazione $d\vec{l}$ e dalla rotazione $d\vec{\theta} = \hat{u}\,d\theta$ ($\hat{u}$ = asse di rotazione; $d\theta$ = «spostamento angolare» elementare) è dato da:

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{l} + \vec{M}\cdot d\vec{\theta}$$

D'altra parte, è $dL = -dU$, dove dU può essere posto nella forma:

$$-dL = dU = \frac{\partial U}{\partial l}\, dl + \frac{\partial U}{\partial \theta}\, d\theta$$

$\frac{\partial U}{\partial l}$ è la derivata direzionale dell'energia potenziale U nella direzione $d\vec{l}$; e $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ è la derivata di U rispetto all'angolo θ. Per confronto fra le due precedenti relazioni si ha:

$$\begin{cases} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial U}{\partial l} \cdot dl \\ \vec{M} \cdot d\vec{\theta} = -\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \cdot d\theta \end{cases} \qquad [I.60]$$

Osserviamo ora che nella relazione $U = -\vec{E}_0 \cdot \vec{p} = -E_0 \cdot p \cdot \cos\theta$ la dipendenza dalla posizione è contenuta solo in $\vec{E}_0$; mentre la dipendenza dal θ compare solo tramite $\cos\theta$.

Pertanto si ha, usando la [I.48]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial l}\, dl = (dU)_{\theta=\text{cost}} = \overrightarrow{\text{grad}}\, U \cdot d\vec{l} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, (\vec{E}_0 \cdot \vec{p}) \cdot d\vec{l} \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta}\, d\theta = \dfrac{\partial}{\partial \theta}(-E_0 \cdot p \cdot \cos\theta)\, d\theta = E_0 \cdot p \cdot \sin\theta\, d\theta = (\vec{E} \times \vec{p}) \cdot d\vec{\theta} \end{cases} \qquad [I.61]$$

Confrontando queste due relazioni con le [I.60] otteniamo il risultato cercato:

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, (\vec{E}_0 \cdot \vec{p})} \quad (\vec{p} = \text{cost}) \qquad [I.62.a]$$

Risultante e momento risultante delle forze esercitate dal campo *sul dipolo*.

$$\boxed{\vec{M} = -\vec{E}_0 \times \vec{p} = \vec{p} \times \vec{E}_0} \qquad [I.62.b]$$

Osserviamo che la [I.62.a], scritta componente per componente, assume la forma:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{E}_0 \cdot \vec{p}) = \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial x} \cdot \vec{p} = \frac{\partial E_{0x}}{\partial x}\, p_x + \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \cdot p_y + \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \cdot p_z \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\vec{E}_0 \cdot \vec{p}) = \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial y} \cdot \vec{p} = \frac{\partial E_{0x}}{\partial y}\, p_x + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} \cdot p_y + \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \cdot p_z \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial z}(\vec{E}_0 \cdot \vec{p}) = \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial z} \cdot \vec{p} = \frac{\partial E_{0x}}{\partial z}\, p_x + \frac{\partial E_{0y}}{\partial z} \cdot p_y + \frac{\partial E_{0z}}{\partial z} \cdot p_z \end{aligned} \qquad [I.63]$$

Ricordiamo che, essendo il campo $\vec{E}_0$ conservativo, deve essere:

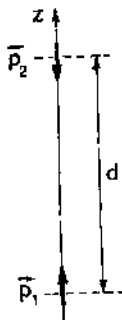
$$\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} = \frac{\partial E_{0x}}{\partial y}; \quad \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = \frac{\partial E_{0x}}{\partial z}; \text{ ecc.}$$

Sostituendo queste relazioni nella prima delle [I.63], e le altre analoghe nella seconda e nella terza di tali relazioni, si ha:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} \cdot p_x + \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \cdot p_y + \frac{\partial E_{0x}}{\partial z} \cdot p_z = (\overrightarrow{\text{grad}}\, E_{0x}) \cdot \vec{p} \equiv (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\, E_{0x} \\ F_y &= \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \cdot p_x + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} \cdot p_y + \frac{\partial E_{0y}}{\partial z} \cdot p_z = (\overrightarrow{\text{grad}}\, E_{0y}) \cdot \vec{p} \equiv (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\, E_{0y} \\ F_z &= \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \cdot p_x + \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \cdot p_y + \frac{\partial E_{0z}}{\partial z} \cdot p_z = (\overrightarrow{\text{grad}}\, E_{0z}) \cdot \vec{p} \equiv (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\, E_{0z} \end{aligned} \qquad [I.64]$$

Le [1.63] e [1.64] rappresentano relazioni fra di loro equivalenti per il calcolo della forza risultante che il dipolo subisce ad opera del campo esterno $\vec{E}_o$; esse esplicitano, componente per componente, la [1.62.a].

Notiamo che il risultante delle forze agenti sul dipolo è diverso da zero solo qualora il campo $\vec{E}_0$ dipenda dalle coordinate (o meglio dipenda da almeno una delle coordinate). *Nel caso in cui il campo E_o sia uniforme, l'unica azione meccanica che si esercita sul dipolo è equivalente a una coppia di momento $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_o$.*

Esempio

E.1.26. *Un dipolo elettrico di momento $\vec{p}_1 = q_1 \vec{\delta}$ è vincolato a mantenere fissa la sua configurazione (posizione e orientamento). Sulla retta individuata da $\vec{p}_1$, e nel suo verso positivo, a distanza $d >> \delta$ è disposto un secondo dipolo di momento $\vec{p}_2 = q_2 \vec{\delta}$. Quest'ultimo è mantenuto in posizione fissa, ma il suo orientamento è libero. Inizialmente, l'orientamento di $\vec{p}_2$ è opposto a quello di $\vec{p}_1$. Quale orientamento raggiunge $\vec{p}_2$ all'equilibrio, e di quanto è variata la sua energia potenziale? A quale forza risultante $\vec{F}$ è soggetto $\vec{p}_2$ ad opera di $\vec{p}_1$ nella situazione finale?*

Il campo elettrico $\vec{E}_o$ generato dal dipolo $\vec{p}_1$ nella posizione occupata da $\vec{p}_2$ può essere calcolato usando le [1.56.a]; ponendo in esse $x = y = 0$ e $z = r = d$ si ha:

$$E_{ox} = 0 \qquad E_{oy} = 0 \qquad E_{oz} = \frac{p_1}{2\pi\varepsilon_0 d^3}$$

Inizialmente $\vec{p}_2$ è diretto in verso opposto all'asse z, per cui:

$$p_{2x}^{(i)} = 0 \qquad p_{2y}^{(i)} = 0 \qquad p_{2z}^{(i)} = -p_2$$

L'energia potenziale di $\vec{p}_2$ nel campo $\vec{E}_o$ vale dunque:

$$U_{IN} = -\vec{E}_o \cdot \vec{p}_2 = -E_{oz} \cdot p_{2z}^{(i)} = \frac{p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 d^3} > 0$$

All'equilibrio, $\vec{p}_2$ assume la configurazione di energia potenziale minima, che è quella diretta concordemente a $\vec{E}_o$ in cui:

$$p_{2x}^{(f)} = 0 \qquad p_{2y}^{(f)} = 0 \qquad p_{2z}^{(f)} = p_2 \tag{1.65}$$

In tale configurazione è:

$$U_{FIN} = -\vec{E}_o \cdot \vec{p}_2 = -E_{oz} \cdot p_{2z}^{(f)} = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 d^3} < 0$$

La variazione di energia è dunque:

$$U_{FIN} - U_{IN} = -\frac{p_1 p_2}{\pi\varepsilon_0 d^3} < 0$$

Per il calcolo della forza, usiamo le [1.63] ponendo in esse per $\vec{E}_o$ le [1.56.a] e per $\vec{p}_2$ le [1.65]:

$$\vec{E}_o \cdot \vec{p}_2 = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}[3xz \cdot 0 + 3yz \cdot 0 + (3z^2 - r^2) \cdot p_2] = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)$$

Eseguendo le derivate parziali di questa funzione, e calcolando tali derivate nel punto $x = 0$; $y = 0$; $z = d$ si ottiene:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = -\dfrac{3\, p_1\, p_i}{2\pi\varepsilon_0\, d^4} \end{cases}$$

Si tratta di una forza diretta in verso opposto all'asse z, e dunque attrattiva. È una forza proporzionale all'inverso della quarta potenza della distanza d, e dunque decresce molto rapidamente all'aumentare della distanza stessa.

I.11. Sviluppo in serie di multipoli

Consideriamo una distribuzione di carica, descritta dalla funzione densità $\rho(x,y,z)$, contenuta in una regione limitata di spazio. Supponiamo che la distribuzione sia mediamente neutra, cioè che contenga nel suo insieme tanta carica positiva quanta carica negativa; in formule:

$$q = \int \rho(x,y,z)\, d\tau = 0$$

Consideriamo una supeficie chiusa S, per comodità sia essa sferica, che contenga la distribuzione di carica al suo interno. Per il teorema di Gauss (eq. [I.25]) il flusso del campo elettrico uscente da S è nullo. Se la distribuzione di carica ha simmetria sferica (in tal caso S può essere presa concentrica con essa) per ragioni di simmetria segue che il campo elettrico su ogni punto di S (che per altro è generica) è nullo. *Una distribuzione di carica mediamente neutra, se dotata di simmetria sferica genera al suo esterno un campo ovunque nullo.*

Se la distribuzione di carica, benché neutra, non ha simmetria sferica, questa conclusione non vale più: il flusso uscente da S è ancora nullo, ma ciò può essere dovuto a una compensazione di porzioni di S in cui il flusso è negativo con altre in cui esso è positivo. Del resto, abbiamo visto, col dipolo elettrico, una situazione concreta in cui ciò accadeva. *In generale, non è detto che un sistema* complessivamente *neutro* dal punto di vista elettrico, *generi intorno a sé un campo elettrico nullo.*

Naturalmente, tutte le caratteristiche del campo generato da una determinata distribuzione di carica sono contenute nella sua espressione [I.11], o nell'equazione di Maxwell [I.36]; ovvero nell'espressione del potenziale [I.44]. Tuttavia, poiché il calcolo esplicito del campo attraverso tali relazioni è usualmente piuttosto laborioso, conviene caratterizzare una distribuzione di carica $\rho(x,y,z)$ con alcune sue proprietà di insieme che consentano di calcolare in maniera più immediata le caratteristiche del campo – o del potenziale – che essa genera a grande distanza; cioè a distanze $\vec{r}$ molto grandi rispetto alle dimensioni lineari della regione di spazio in cui la distribuzione di carica è contenuta.

Ciò può essere fatto sviluppando la distribuzione di cariche in *serie di multipoli.*

Sviluppo in serie di multipoli

Consideriamo dunque una distribuzione di cariche $\rho(x,y,z)$ contenuta in una porzione limitata di spazio, ma senza più porre la condizione che essa sia mediamente neutra. Analizziamo le caratteristiche del potenziale $V_0(\vec{r})$ che tale distribuzione di cariche genera a grande distanza. Benché noi

qui ci riferiamo, per fissare le idee, a una distribuzione continua di volume, le stesse conclusioni valgono per una distribuzione discreta, ovvero per distribuzioni superficiali o lineari. Partiamo dalla equazione [I.44]:

$$V_o(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x',y',z')\,d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad [I.44]$$

ovvero, in coordinate cartesiane

$$V_o(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x',y',z')\,dx'\,dy'\,dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} \qquad [I.66]$$

Per l'ipotesi che ci troviamo a grande distanza ($r >> r'$), il fattore

$$f = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-1/2}$$

che compare nella [I.66] può essere sviluppato in serie intorno al punto $\vec{r}' \equiv (x',y',z') = 0$. Arrestiamo per il momento tale sviluppo al primo ordine, cioè poniamo:

$$f(x',y',z') \simeq f(0) + \frac{\partial f}{\partial x'}(0)\cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y'}(0)\cdot y' + \frac{\partial f}{\partial z'}(0)\cdot z' \qquad [I.67]$$

Tenuto conto della definizione di f si ha:

Carica totale q e momento di dipolo $\vec{p}$ di una distribuzione di carica

$$\begin{aligned}
f(0) &= [x^2+y^2+z^2]^{-1/2} = \frac{1}{r} \\
\frac{\partial f}{\partial x'}(0) &= \{(x-x')[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-3/2}\}_{x',y',z'=0} = \frac{x}{r^3} \\
\frac{\partial f}{\partial y'}(0) &= \{(y-y')[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-3/2}\}_{x',y',z'=0} = \frac{y}{r^3} \\
\frac{\partial f}{\partial x'}(0) &= \{(z-z')[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-3/2}\}_{x',y',z'=0} = \frac{z}{r^3}
\end{aligned} \qquad [I.68]$$

Formula di taylor

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Sostituendo le [I.68] nella [I.67] abbiamo:

$$f(x',y',z') \equiv \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(xx'+yy'+zz') = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} \qquad [I.69]$$

Tenuto conto della [I.69], la [I.44] può essere scritta nella seguente forma approssimata:

$$V_o(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \qquad [I.70]$$

dove

$$q = \int \rho\, d\tau' \qquad [I.71]$$

$$\vec{p} = \int \rho\,\vec{r}'\, d\tau' \qquad [I.72]$$

q rappresenta la *carica totale* contenuta nella distribuzione; e $\vec{p}$ è detto *momento di dipolo* della distibuzione stessa. Il primo termine della [I.70] è detto *termine di monopolo* e il secondo *termine di dipolo*.

Se la distribuzione è una distribuzione discreta, allora $q = \Sigma\, q_i$ e $\vec{p} = \Sigma\, q_i \vec{r}_i$, con $\vec{r}_i$ vettore posizione della carica i-esima q_i. Nel caso particolare di un dipolo, è facile verificare che $\vec{p}$ coincide con la definizione [I.53]; essendo inoltre $q = 0$, la [I.70] coincide con la [I.54].

Termine di monopolo e termine di dipolo

Nel caso generale, la [I.70] ci dice che *il potenziale generato a grande distanza da una generica distribuzione di cariche può essere scritto*, in prima approssimazione, *come somma del potenziale generato da una carica puntiforme pari alla carica totale* q contenuta nella distribuzione data, *più il potenziale generato da un dipolo di momento* $\vec{p}$ pari al momento di dipolo della distribuzione stessa.

Approssimazione di dipolo

Poiché, all'aumentare della distanza, il potenziale di dipolo diminuisce come $1/r^2$ mentre il potenziale di carica puntiforme diminuisce come $1/r$, in generale il termine di dipolo costituisce un termine correttivo, non di rado trascurabile, al potenziale. Se tuttavia il sistema è elettricamente neutro ($q = 0$), il termine di dipolo resta il primo termine – cioè il termine dominante – nella descrizione del potenziale.

In particolare, le molecole sono, nel loro stato fondamentale, elettricamente neutre; tuttavia molte di esse hanno una distribuzione spaziale dei loro costituenti carichi (nuclei ed elettroni) tale che il loro momento di dipolo è diverso da zero (*molecole polari*). Le forze intermolecolari sono in larga misura determinate dalla interazione di dipolo di molecole polari.

Molecole polari e forze intermolecolari

Esempio tipico di struttura polare si ha nella molecola d'acqua, nella quale i legami idrogeno-ossigeno formano un angolo di circa 105°, dando luogo a un momento di dipolo:

$$p\,(H_2O) \simeq 6 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$$

molecola d'acqua

Anche le molecole biatomiche possono essere molecole polari; ad esempio:

$$p\,(HCl) \simeq 3.5 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$$

$$p\,(CO) \simeq 0{,}4 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$$

Nella maggior parte dei casi, l'approssimazione di dipolo fornisce una descrizione sufficientemente accurata delle interazioni elettrostatiche a grande distanza fra sistemi di cariche.

Può capitare tuttavia che si debba ricorrere ad approssimazioni più accurate, introducendo nella [I.67] anche termini successivi dello sviluppo, a cominciare da quelli alle derivate seconde. In particolare ciò succede, evidentemente, quando si abbia a che fare con sistemi per i quali siano nulli sia la carica totale q che il momento di dipolo $\vec{p}$. L'introduzione dei termini successivi dello sviluppo non comporta alcuna particolare difficoltà concettuale, tuttavia essa è abbastanza laboriosa dal punto di vista dei calcoli. Per dettagli al riguardo rimandiamo a testi specializzati.

Qui ci limitiamo a riportare il risultato che si ottiene calcolando il termine successivo dello sviluppo, detto *termine di quadrupolo*. Tale termine decresce come $1/r^3$ al crescere di r in ogni fissata direzione r; esso può essere posto nella forma:

Termine di quadrupolo

$$V_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(\vec{r})}{r^3} \qquad [I.73]$$

dove $Q(\hat{r})$ può essere calcolato tramite la relazione:

$$Q(\hat{r}) = \int \rho(x', y', z') \left[\frac{3}{2} (\vec{r}' \cdot \hat{r})^2 - \frac{(r')^2}{2} \right] d\tau' \qquad [I.74]$$

$\vec{r} = \hat{r} \cdot r$ rappresenta, lo ricordiamo, il vettore posizione del punto in cui si calcola il potenziale.

Esempio

E.I.27. *Una distribuzione di cariche discreta è formata da quattro cariche puntiformi, due positive e due negative, ma tutte di pari valore assoluto pari a q_o. Tali cariche sono disposte così come mostrato in figura, tutte a distanza d dall'origine.*
Mostrare che per questa distribuzione sono nulli sia il termine di monopolo che quello di dipolo.
Tale distribuzione è detta, in effetti, quadruplo elementare.
Calcolare, usando la [I.73] e la [I.74], il potenziale in un punto disposto lungo l'asse y, a distanza $D >> d$ dall'origine.

Poiché si tratta di una distribuzione discreta, gli integrali nella [I.71], [I.72] e [I.74] vanno sostituiti con sommatorie; si ha pertanto:

$$\begin{cases} q = \sum q_i \\ \vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i \\ Q = \sum q_i \left(\frac{3}{2} (\vec{r}_i \cdot \hat{r})^2 - \frac{(r_i)^2}{2} \right) \end{cases} \qquad [I.75]$$

Coi dati del problema, si ha

$$q_1 = -q_o; \quad q_2 = +q_o; \quad q_3 = -q_o; \quad q_4 = +q_o$$
$$\vec{r}_1 = (d, 0\ 0); \quad \vec{r}_2 \equiv (0, -d, 0); \quad \vec{r}_3 \equiv (-d, 0, 0); \quad \vec{r}_4 \equiv (0, d, 0)$$
$$\hat{r} = (0, 1, 0)$$

Dunque le prime due della [I.75] divengono:

$$q = -q_o + q_o - q_o + q_o = 0$$

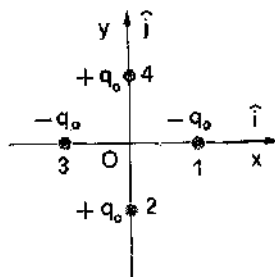
$$\begin{cases} p_x = \sum q_i x_i = -q_o d + q_o d = 0 \\ p_y = \sum q_i y_i = -q_o d + q_o d = 0 \\ p_z = \sum q_i z_i = 0 \end{cases}$$

È così dimostrato che $q = 0$ e $\vec{p} = 0$. Si ha inoltre dalla terza delle [I.75]:

$$Q = -q_o \left(\frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{d^2}{2} \right) + q_o \left(\frac{3}{2} (-d)^2 - \frac{d^2}{2} \right) - -q_o \left(\frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{d^2}{2} \right) + q_o \left(\frac{3}{2} (d)^2 - \frac{d^2}{2} \right) = 3\, q_o\, d^2$$

Ponendo $r = D$, la [I.73] diviene dunque:

$$V_Q(\vec{r}) = V_Q(0, D, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{3\, q_o d^2}{D^3}$$

che risponde al quesito del problema.

I.12. Rotore di un campo vettoriale. Sviluppi derivanti dalla conservatività del campo elettrostatico

Come abbiamo visto, il campo elettrostatico è un campo conservativo: ciò segue dal fatto che in virtù del principio di sovrapposizione un campo generico può essere espresso come somma di campi generati da carica puntiforme; e che ogni carica puntiforme genera un campo del tipo $\bar{E}_o = E_o(r) \cdot \hat{r}$, cioè un campo centrale dotato di simmetria sferica. Osserviamo che per la conservatività del campo non è essenziale che il modulo $E_o(r)$ del campo generato da carica puntiforme sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza (legge di Coulomb); cosa invece necessaria per la validità della legge di Gauss [I.22] e della prima equazione di Maxwell [I.36].

In virtù della conservatività, il campo elettrostatico ammette un potenziale cui è legato dalla relazione [I.38]:

$$V_o(A) - V_o(B) = \int_A^B \bar{E}_o \cdot d\bar{l} \qquad [I.38]$$

valida qualunque sia il percorso l che porta dal punto A al punto B (purché l non passi per punti di singolarità del campo $\bar{E}_o$). In particolare, se A coincide con B, qualunque sia la linea chiusa l scelta per eseguire l'integrale, si ha:

$$\oint \bar{E}_o \cdot d\bar{l} = 0 \qquad [I.78]$$

dove col simbolo $\oint$ si intende l'integrale eseguito su una linea chiusa, che viene detto *circuitazione*. La [I.78] è condizione necessaria e sufficiente perché il campo $\bar{E}_o$ sia conservativo; a parole diremo che *la caratteristica dei campi conservativi è di avere circuitazione nulla su qualunque linea chiusa l* (generalmente regolare) appartenente al dominio di definizione del campo.

Circuitazione

La circuitazione del campo elettrostatico è nulla

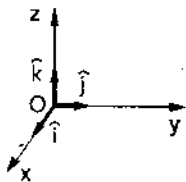
La proprietà [I.78] è una proprietà integrale, nel senso che essa è espressa mediante un integrale (di linea) del campo elettrostatico; nello stesso senso avevamo detto che il teorema di Gauss [I.25] è una proprietà integrale (di superficie) del campo elettrostatico stesso.

Così come dalla proprietà integrale [I.25] che esprime il teorema di Gauss abbiamo tratto la forma locale [I.36] (prima equazione di Maxwell), vogliamo ora sviluppare un'equazione che traduca in forma locale la proprietà integrale [I.78].

A tale scopo introduciamo l'*operatore differenziale vettoriale rotore* (o rotazione) applicabile a un vettore generico $\bar{v}(x,y,z)$ le cui componenti v_x, v_y, v_z siano funzioni continue con le loro derivate parziali. Il rotore di $\bar{v}$ ($\text{rot}\,\bar{v}$) è definito dalla seguente relazione formale

L'operatore differenziale rotore

$$\text{rot}\,\bar{v} \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \qquad [I.79]$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

La [I.79] non è altro che un modo sintetico per indicare che le componenti cartesiane del rotore sono:

$$\mathrm{rot}_x \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$$
$$\mathrm{rot}_y \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \qquad [I.79.a]$$
$$\mathrm{rot}_z \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Ricordando la definizione [I.32] dell'operatore nabla $\vec{\nabla}$, il rotore può essere definito in termini compatti mediante la relazione:

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} \qquad [I.79.b]$$

Esempi

E.I.28. *Calcolare il rotore di un campo vettoriale uniforme.*

$\vec{v}$ uniforme

$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$

Se il campo vettoriale è uniforme, le sue componenti hanno valore indipendente dalle coordinate x, y, z. Dunque tutte le derivate parziali che compaiono nelle [I.79.a] sono nulle; pertanto

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$$

E.I.29. *Calcolare il rotore del campo vettoriale $\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ dove $\vec{r}$ è il vettore posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$.*

Le componenti cartesiane del campo vettoriale $\vec{v}$ sono $\vec{v} \equiv \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$, con $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. L'espressione esplicita della [I.79] diviene pertanto:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)\right] + \\ + \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right] + \\ + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)\right]$$

Calcoliamo la componente x del rotore:

$$\mathrm{rot}_x \vec{v} = \frac{\partial}{\partial y}[z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] - \frac{\partial}{\partial z}[y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] = \\ = z\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2y - y\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2z = \\ = -\frac{3yz}{r^5} + \frac{3yz}{r^5} = 0$$

Con calcolo del tutto analogo si verifica che anche le altre componenti del rotore sono nulle. Dunque:

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

E.I.30. *Calcolare il rotore del campo di velocità $\vec{v}$ dei punti di un cilindro rigido che ruota con velocità angolare ω intorno al suo asse.*

Scegliendo gli assi coordinati così come mostrato in figura, si ha $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$. La velocità $\vec{v}$ del punto P del cilindro caratterizzato dal vettore posizione $\vec{r}$ è data da:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega}\times\vec{r} \quad (\text{con } \vec{\omega} \equiv (0, 0, \omega); \quad \vec{r} = (x, y, z))$$

da cui si ricava la rappresentazione cartesiana del campo vettoriale $\vec{v}$:

$$v_x = \omega_y r_z - \omega_z r_y = 0 \cdot z - \omega y = -\omega y$$
$$v_y = \omega_z r_x - \omega_x r_z = \omega x - 0 \cdot x = \omega x$$
$$v_z = \omega_x r_y - \omega_y r_x = 0 \cdot y - 0 \cdot x = 0$$

Si ha dunque:

$$\text{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\cdot 0 + \hat{j}\cdot 0 + \hat{k}\,(\omega + \omega)$$

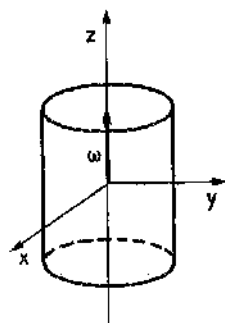
ovvero

$$\text{rot}\,\vec{v} = 2\omega\hat{k}$$

Questo esempio rende ragione dell'origine del nome dato all'operatore rotore: nel moto di un fluido, il campo delle velocità $\vec{v}$ ha rotore diverso da zero in presenza di vortici (se cioè vi sono particelle di fluido che compiono un moto rotatorio), mentre nel caso di moto laminare si ha ovunque $\text{rot}\,\vec{v} = 0$.

Consideriamo una funzione (scalare) $V(x,y,z)$ della posizione, che ammetta derivate parziali continue fino al secondo ordine almeno. Il gradiente di tale funzione $\overrightarrow{\text{grad}}\,V \equiv \vec{\nabla}V$ costituisce un campo vettoriale. È immediato mostrare che il rotore di tale campo vettoriale è ovunque nullo. Si ha infatti:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\right)$$

rot $\vec{\text{grad}}\, V = 0$

Ma per un noto teorema di analisi (teorema di Schwartz) le derivate seconde miste *sono indipendenti dall'ordine di derivazione*; il che comporta che le tre componenti di rot $\vec{\text{grad}}\, V$ siano nulle:

$$\text{rot}\, \vec{\text{grad}}\, V \equiv \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0 \tag{I.80}$$

L'operatore vettoriale rotore permette di esprimere in forma compatta una proprietà di analisi matematica per cui l'integrale curvilineo di un vettore lungo una linea chiusa l può essere trasformato in un integrale eseguito su una superficie S che abbia per contorno l stessa. Tale proprietà si esprime compiutamente nel *teorema di Stokes*, del quale ometteremo la dimostrazione, il cui enunciato (con precisazioni sulla regolarità di S) è il seguente:

Teorema di Stokes

Consideriamo una linea chiusa l orientata ed una superficie aperta S che abbia la linea l come contorno; il versore della normale $\hat{n}$ ad A sia orientato in modo da vedere come antiorario il verso positivo di l. Sia $\vec{v}(x,y,z)$ un qualunque campo vettoriale, che abbia componenti continue insieme alle loro derivate parziali prime su tutti i punti di S e di l; allora si dimostra che:

$$\oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot}\, \vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{I.81}$$

Il teorema di Stokes permette intanto di evidenziare immediatamente il fatto che il rotore di un campo vettoriale $\vec{v}$ non dipende dal sistema di riferimento (come potrebbe apparire dalle relazioni definitorie [I.79]), ma è una proprietà intrinseca del campo vettoriale $\vec{v}(x,y,z)$. A questo scopo consideriamo un contorno l che si contragga intorno a un punto P, fino a che l'area S racchiusa da l si riduca a un elemento infinitesimo di piano di area $dS \to 0$. Il teorema di Stokes applicato a questo contorno infinitesimo si scrive:

mano destra: pollice come $\hat{n}$ dita come l

$$\text{rot}\, \vec{v} \cdot \hat{n} = \lim_{l \to 0} \frac{1}{dS} \oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Poiché il prodotto scalare fra due vettori è invariante rispetto al sistema di riferimento, questa relazione dimostra che la componente di rot $\vec{v}$ nella direzione $\hat{n}$ è invariante rispetto al sistema di riferimento, e dunque è una proprietà intrinseca di $\vec{v}$. In particolare, se $\hat{n}$ è orientato come ciascuno degli assi coordinati, si ottengono le componenti cartesiane [I.79.a] del rotore.

rot $\vec{v}$ è una proprietà intrinseca di $\vec{v}$

Il teorema di Stokes [I.81], applicato al campo elettrostatico $\vec{E}_0$ per il quale vale la relazione [I.78], porta alla relazione

$$\oint_l \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0 = \int_S \text{rot}\, \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} \tag{I.82}$$

Poiché la [I.82] vale per ogni linea chiusa l e per ogni superficie S che abbia l come contorno, dalla [I.82] segue che deve essere nullo l'integrando

$$\text{rot}\, \vec{E}_0 \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0 \tag{I.83}$$

Il campo elettrostatico è irrotazionale

La [I.83] è la relazione cercata, che esprime in forma locale la proprietà di conservatività [I.78] del campo elettrostatico; si dice anche che *il campo elettrostatico è irrotazionale*.

Osserviamo che la [I.83] poteva essere ricavata anche dalla [I.80]: infatti, dalla conservatività [I.78] del campo elettrostatico segue l'esistenza della funzione potenziale V_0 tale che $\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} V_0$; e dunque:

$$\text{rot}\, \vec{E}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V_0 = 0$$

Per concludere, osserviamo che dalla conservatività di $\vec{E}$ ($E_x = -\partial V/\partial x$, $E_y = -\partial V/\partial y$, $E_z = -\partial V/\partial z$) discendono, per il teorema di Schwartz, le seguenti relazioni tra le derivate parziali delle componenti di $\vec{E}$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}.$$

Tali relazioni implicano che valga sempre la relazione:

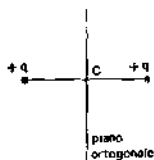
$$\text{rot}\,\vec{E} = 0$$

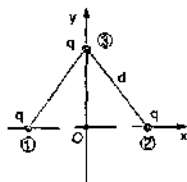
Una relazione del tipo $\text{rot}\,\vec{v} = 0$, invece non implica necessariamente che il campo $\vec{v}$ sia conservativo: ciò avviene certamente se il campo di definizione della funzione vettoriale $\vec{v}(x, y, z)$ risulta essere semplicemente connesso. Ciò significa che due punti qualsiasi del campo devono essere congiungibili con una linea continua tutta appartenente al campo, e che qualunque linea chiusa appartenente al campo può essere fatta convergere a un punto continuando ad appartenere sempre al campo stesso.

Nel caso dell'operatore gradiente si è visto (eq. [I.57], [I.50]) che, per certe situazioni dotate di particolari caratteristiche di simmetria, l'espressione *in coordinate cartesiane [I.49] è convenientemente sostituita* dall'espressione in coordinate polari. Tali considerazioni si estendono ovviamente anche al rotore e riguardano, per completezza, anche le coordinate cilindriche. La tabella che segue sintetizza le espressioni delle grandezze di più frequente uso nei vari sistemi di coordinate.

COORDINATE

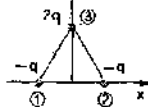
	CARTESIANE (x, y, z)	CILINDRICHE (ρ, φ, z)	POLARI (r, θ, φ)
$d\vec{l}$	$dx,\ dy,\ dz$	$d\rho,\ \rho\, d\varphi,\ dz$	$dr,\ r\,d\theta,\ r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi$
grad f	$(\nabla f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ $(\nabla f)_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ $(\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$	$(\nabla f)_\rho = \frac{\partial f}{\partial \rho}$ $(\nabla f)_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ $(\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$	$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}$ $(\nabla f)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$ $(\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$
div $\vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta \cdot v_\theta)}{\partial \theta} +$ $+ \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$
rot $\vec{v}$	$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$	$(\text{rot}\,\vec{v})_\rho = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)$ $(\text{rot}\,\vec{v})_\varphi = \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right)$ $(\text{rot}\,\vec{v})_z = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi}\right)$	$(\text{rot}\,\vec{v})_r = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta \cdot v_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}\right)$ $(\text{rot}\,\vec{v})_\theta = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r}$ $(\text{rot}\,\vec{v})_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$

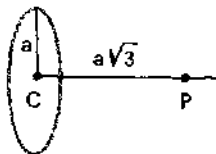
Esercizi del I capitolo

1.1. Due cariche puntiformi positive uguali sono separate da una distanza $2a$. Sul piano ortogonale alla congiungente le due cariche e passante per il centro C della congiungente stessa, determinare il luogo dei punti in cui il campo è massimo.

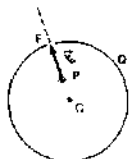
(Risposta: circonferenza di raggio)

1.2. Tre cariche puntiformi positive uguali sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato $d = 10$ cm. Sia $q = 1{,}0\,\mu C$ il valore di ognuna delle cariche. Calcolare la forza elettrostatica F cui è sottoposta ciascuna di esse. Se una di esse viene lasciata libera di muoversi, si allontana per azione delle forze repulsive esercitate dalle altre; quando essa è arrivata molto lontana, che energia cinetica K ha acquisito?

(Risposte:)

1.3. Tre cariche puntiformi sono disposte nella stessa configurazione geometrica dell'esercizio I.2; tuttavia ora le cariche (1) e (2) sono negative e valgono $-q$, mentre la carica (3) è positiva e vale $2q$ ($q = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ C).
Calcolare il momento di dipolo $\vec{p}$ del sistema.
Calcolare inoltre il potenziale elettrico V_0 nel punto P_0 di coordinate $x_0 = 0$, $y_0 = 40$ cm, e valutare con quale precisione tale potenziale viene calcolato se si ricorre alla approssimazione di dipolo.

(Risposte: $\vec{p} = \vec{j} \cdot 1{,}73 \cdot 10^{-7} C \cdot m$; $V_0 = 12{,}7 \cdot 10^3$ J/C; precisione = 4%)

1.4. Consideriamo ancora il sistema di cui all'esercizio I.3, e supponiamo che esso si comporti come un sistema rigido. Lungo l'asse y, nella posizione $y = y_0 = 1{,}0$ m, viene posta una carica positiva puntiforme $Q = 10 \cdot 10^{-6}$ C. Calcolare la sollecitazione meccanica cui è sottoposto il sistema. Utilizzare l'approssimazione di dipolo.

(Risposte: $\vec{F} = -\vec{j} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ N; $\vec{M} = 0$)

1.5. Una carica negativa $-q$ di massa m è posta inizialmente nel punto P, sull'asse di una circonferenza di raggio a vincolata in posizione fissa; P si trova a distanza $a\sqrt{3}$ dal centro C della circonferenza stessa. La circonferenza è caricata uniformemente, con carica positiva totale pari a Q. La carica $-q$ viene lasciata libera di muoversi, partendo dalla situazione di quiete. Con che velocità v_f passa dal centro della circonferenza? (Valori numerici: $q = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ C; $Q = 6 \cdot 10^{-8}$ C; $a = 10$ cm; $m = 10^{-5}$ kg)

(Risposta: $v_f = 2{,}84$ m/s)

1.6. Una superficie sferica cava è disposta nel vuoto, e su di essa è distribuita uniformemente una carica positiva Q, con densità superficiale σ. Nella sfera è praticato un piccolo foro F, attraverso il quale viene lanciata radialmente, dall'interno verso l'esterno, una pallina puntiforme P di massa m, dotata di carica negativa $-q$. Con quale velocità iniziale minima v_0 deve essere lanciata, affinché essa possa allontanarsi indefinitamente sfuggendo all'attrazione della sfera? ($Q = 1{,}0 \cdot 10^{-8} C$; $\sigma = 2{,}0 \cdot 10^{-7}$ C/m^2; $m = 10 \cdot 10^{-6}$ kg; $|q| = |Q|$).

(Risposta: $v_0 \geq 3$ m/s)

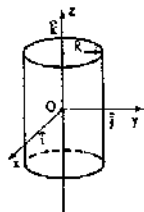
I.7. Una approssimazione adeguata alla soluzione dell'esercizio I.6. è quella consistente nel trascurare la perturbazione che il piccolo foro F porta al potenziale e al campo elettrico presente internamente ed esternamente alla sfera. Tuttavia, se si calcola il campo elettrico $\vec{E}_0$ nel punto A situato al centro del foro F immediatamente all'esterno di esso, si trova una differenza notevole fra il caso in cui il foro sia effettivamente presente e il caso in cui anche nella regione di F prosegua la distribuzione omogenea di carica. Calcolare tale differenza ΔE, e discutere perché, a dispetto di essa, l'approssimazione succitata sia adeguata alla soluzione dell'esercizio I.6.

(Risposta: $\Delta E_0 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$)

I.9. Una distribuzione continua di carica occupa il volume di una regione di spazio cilindrica (raggio di base R; altezza $h = 4R$) con centro nell'origine e asse coincidente con l'asse z. All'interno del cilindro è presente un campo elettrico di equazioni

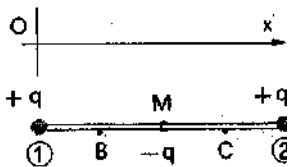
$$E_{0x} = 0 \quad E_{0y} = 0 \quad E_{0z} = az^2 \ (a > 0 \ \text{costante})\,.$$

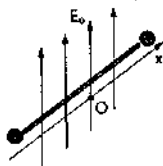
Determinare l'espressione della densità di carica internamente al cilindro, e la carica totale posseduta dal cilindro stesso.

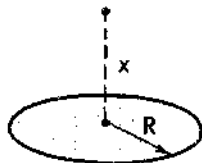
(Risposte: $\rho = 2\varepsilon_0 az$; $Q = 0$)

I.10. Determinare l'andamento del potenziale elettrico generato a grande distanza dall'origine dalla distribuzione cilindrica di carica di cui all'esercizio I.9.

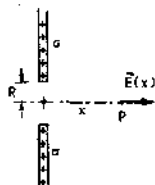
(Risposta: $V_0(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$, con $\vec{p} = \hat{k}\dfrac{32}{3}a\varepsilon_0\pi R^5$)

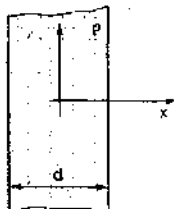
I.11. Ai due estremi di una asticciola isolante di lunghezza $4a$ sono fissate due piccole sfere metalliche dotate di una stessa carica positiva $+q$. Sull'asticciola è infilato un piccolo anello M, libero di muoversi con attrito trascurabile, dotato di carica $-q$. Inizialmente l'anello si trova fermo nel punto centrale dell'asta. Si tratta di una posizione di equilibrio stabile? Discutere l'andamento dell'energia potenziale di M in funzione di x. Se nelle posizioni B e C a distanza pari ad a dal centro sono disposti due fermi, qual'è l'energia cinetica K_f di M quando sbatte contro uno di essi?

(Risposte: L'equilibrio è instabile; $K_f = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{3a}$)

I.12. Una sbarretta omogenea, di sezione trascurabile e lunghezza $2l$, è dotata di una densità lineare di carica non uniforme, descritta dalla legge $\lambda = ax$, dove x è la coordinata longitudinale presa con origine nel centro. Incernierata nel suo punto di mezzo a un asse verticale, la sbarretta è immersa in un campo elettrico uniforme E_0 orizzontale. In che posizione di equilibrio si dispone? Spostata di un piccolo angolo rispetto alla sua posizione di equilibrio, essa prende ad oscillare con pulsazione ω. Quanto vale la sua massa?

(Risposte: a) parallelamente al campo; b) $m = \dfrac{2E_0 a l}{\omega^2}$)

I.13. Una carica Q è distribuita all'interno di una sfera di raggio R, in modo che la densità di carica di volume cresca dal centro verso l'esterno proporzionalmente alla distanza dal centro stesso, dove è nulla. Calcolare la differenza di potenziale tra il centro e la superficie della sfera, se $Q = 10^{-8}\,C$ ed $R = 10$ cm.

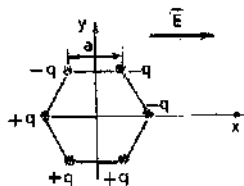
(Risposta: $\Delta V = 3 \cdot 10^3\,V$)

I.14. Calcolare il campo elettrico, nel vuoto, generato da un sottile disco di raggio R, uniformemente carico con densità di carica σ, sull'asse del disco, a distanza x dal disco.

$$\text{(Risposta: } E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)\text{)}$$

I.15. È dato un piano indefinito, nel vuoto, carico con densità superficiale di carica σ uniforme. Sul piano è praticato un foro circolare di raggio R. Ricavare l'espressione del campo elettrico in un punto P, sulla perpendicolare al piano passante per il centro del foro, a distanza x dal piano.

$$\text{(Risposta: } E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\text{)}$$

I.16. Una sfera di raggio a, uniformemente carica, è racchiusa dentro una superficie sferica di raggio b, concentrica alla sfera carica. Il potenziale della sfera di raggio b è tenuto fisso al valore $V = 0$, mentre il centro della sfera carica è a potenziale V. Ricavare l'espressione della densità ρ della carica contenuta nella sfera di raggio a.

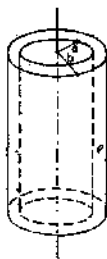
$$\text{(Risposta: } \rho = \frac{6\varepsilon_0 b V}{a^2(3b - 2a)}\text{)}$$

I.17. Uno strato spesso indefinito è uniformemente carico con densità di carica di volume ρ. Lo spessore dello strato è d. Calcolare il campo elettrico in funzione della distanza x dal piano mediano dello strato.

(Risposta: E_{in} [illegible])

I.18. Un sistema rigido neutro è costituito da sei cariche, disposte come mostrato in figura, ai vertici di un esagono regolare di lato a. Calcolare il momento di dipolo elettrico della distribuzione, tenendo conto che le cariche puntiformi ai vertici dell'esagono hanno lo stesso valore assoluto ed i segni mostrati in figura. Se il sistema è immerso in un campo elettrico uniforme $\vec{E}$, diretto lungo l'asse x, ricavare l'espressione dell'energia potenziale del sistema di cariche.

(Risposta: $U = 2qaE$)

I.19. Sulla superficie di un cilindro di altezza molto maggiore del raggio («cilindro indefinito») è distribuita della carica con densità superficiale σ uniforme. Calcolare il campo elettrico in un punto qualsiasi interno al cilindro.

(Risposta: $E^{(INT)} = 0$ ovunque)

I.20. All'interno di un guscio cilindrico indefinito di raggio interno a e raggio esterno b è distribuita una carica elettrica con densità di volume ρ uniforme. Calcolare l'andamento del campo elettrico in funzione della distanza r dall'asse di simmetria della distribuzione.

(Risposta: $0 < r < a \qquad E(r) = 0$

$a < r < b \qquad E(r) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0 r}(r^2 - a^2)$

$r > b \qquad E(r) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0 r}(b^2 - a^2)$)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del I capitolo

I.1. Si calcoli il campo risultante usando il principio di sovrapposizione; il massimo si calcola poi uguagliando a zero la derivata del modulo del campo risultante.

I.2. Il principio di sovrapposizione consente di calcolare con facilità il campo elettrico e il potenziale che due delle cariche generano nella posizione occupata dalla terza; si ricava così la forza subita da quest'ultima, e la sua energia potenziale. L'energia cinetica all'infinito segue dal principio di conservazione dell'energia.

I.3. Calcolato il momento di dipolo del sistema di cariche, il potenziale generato in un punto può essere calcolato sia dall'approssimazione di dipolo, che direttamente usando il principio di sovrapposizione. Dal confronto si valuta la precisione del metodo approssimato.

I.4. Si tratta di calcolare, nel caso in esame, le [I.62]

I.5. Conviene applicare il teorema di conservazione dell'energia $\Delta K = -\Delta U$, tenendo conto che la variazione di energia potenziale è facilmente esprimibile in termini di variazione del potenziale elettrostatico.

I.6. Dati Q e σ, si ricava il raggio R; e quindi il potenziale $V_0(r)$ sulla sfera (nonché internamente ad essa). Si applica poi il principio di conservazione dell'energia al moto della pallina.

I.7. In assenza di foro, il campo elettrico esternamente e internamente ad F può essere calcolato usando la legge di Gauss. In presenza del foro, si può ancora usare la legge di Gauss applicata a una distribuzione di carica equivalente a quella data in base al principio di sovrapposizione.

I.8. La carica si trova integrando ρ sul volume della sfera. Per determinare l'andamento del campo elettrico applicare la legge di Gauss.

I.9. Usare la prima equazione di Maxwell (eq. [I.36]) per calcolare ρ. La carica si trova poi integrando ρ sul volume.

I.10. Calcolare il momento $\bar{p}$ di dipolo della distribuzione; a grande distanza, il potenziale è dato dalla [I.54].

I.11. Il potenziale in funzione di x si calcola col principio di sovrapposizione, e ciò consente di calcolare l'energia potenziale di M e quindi di discutere la stabilità o meno dell'equilibrio. L'energia cinetica finale si calcola col principio di conservazione dell'energia.

I.12. Calcolato il momento di dipolo della sbarretta, si calcola la sua energia potenziale tramite la [I.59], e il momento delle forze tramite la [I.62.b]. Il minimo di energia potenziale individua la posizione di equilibrio; mentre la conoscenza del momento consente di impostare l'equazione del moto.

I.13. Calcolare l'andamento del campo elettrico all'interno della sfera, facendo uso del teorema di Gauss ed osservando che si tratta di distribuzione a simmetria sferica.

I.14. Procedere come nell'esempio E.I.6, arrestando l'integrazione sull'angolo α al valore massimo α_{MAX} determinato dal raggio R e dalla distanza x.

I.15. Per la simmetria della distribuzione il campo elettrico è normale al piano carico. Si può usare la procedura seguita nell'esempio E.I.6 integrando l'espressione [I.18] con l'angolo α che arriva al limite superiore $\pi/2$, ma che parte, non da zero, ma dal valore delimitato dall'apertura del foro di raggio R (vedi esercizio I.14).
Oppure si può osservare che la distribuzione di carica data è equivalente a quella costituita da un piano completo uniformemente carico con densità di carica $(+\sigma)$, sopra al quale sia sovrapposto un disco, di raggio R, uniformemente carico con densità superficiale $(-\sigma)$ (nella zona circolare di sovrapposizione è come se non ci fosse carica, il che è equivalente al foro).

I.16. Per il campo elettrico, procedere come nell'esempio E.I.8. Poi applicare la definizione di potenziale.

I.17. La distribuzione di carica è a simmetria piana rispetto al piano mediano ed il campo $\vec{E}$ risulta pertanto normale allo strato. Applicare il teorema di Gauss.

I.18. Utilizzare la relazione [I.72] adattata al caso di distribuzione discreta di cariche e, successivamente, applicare la [I.59].

I.19. Supporre infinita la lunghezza del cilindro ed utilizzare il teorema di Gauss, tenendo conto della simmetria cilindrica della distribuzione. Ovvero utilizzare un procedimento diretto analogo a quello dell'esempio *E.I.9*.

I.20. Utilizzare il teorema di Gauss, tenendo conto delle proprietà di simmetria del campo elettrico.

Capitolo secondo

Sistemi di conduttori e campo elettrostatico

II.1. Campo elettrostatico e distribuzioni di carica nei conduttori

Conduttore

Con il termine *conduttore* intenderemo in questo capitolo (ed anche, salvo avviso contrario, nel corso di tutto il volume) un oggetto *indeformabile*, all'interno del quale vi sono *elettroni liberi di muoversi*. essi si muovono effettivamente quando sono sottoposti a una forza attiva; cioè, tipicamente, quando all'interno del conduttore sia presente un campo elettrico.

In elettrostatica considereremo sempre, per ipotesi, situazioni in cui le grandezze in gioco, e dunque in particolare anche le distribuzioni di carica, sono costanti nel tempo. Poiché le cariche interne a un conduttore, se sottoposte a un campo elettrico, si muovono, ciò implica che *in elettrostatica il campo elettrico internamente ai conduttori è nullo*.

In elettrostatica il campo elettrico internamente ai conduttori è nullo

In effetti, se un conduttore S viene immerso in un campo elettrico (sia esso generato da cariche esterne, o da cariche che vengano poste sul conduttore stesso), in una prima fase gli elettroni interni al conduttore cominciano a muoversi, alla ricerca di una configurazione di equilibrio: quando la loro disposizione è tale da annullare il campo elettrico presente internamente al conduttore, la configurazione di equilibrio è raggiunta.

Dal fatto che il campo elettrostatico $\vec{E}$ internamente ai conduttori è nullo è facile dedurre, utilizzando la condizione che esso sia conservativo, che esternamente al conduttore, ma molto vicino ad esso, il campo elettrostatico stesso (che fuori dal conduttore chiamiamo $\vec{E}_0$) deve essere normale alla superficie del conduttore.

Formalmente, come abbiamo discusso nel par. I.12, la condizione di conservatività si esprime dicendo che l'*integrale di linea di $\vec{E}$ lungo una qualunque linea chiusa deve essere nullo*:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad [I.78]$$

ovvero: la circuitazione del campo elettrostatico è nulla.

Consideramo ora la superficie di separazione fra due mezzi materiali diversi (mezzo 1 e mezzo 2). Siano $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ i valori che il campo elettrico

Continuità della componente tangenziale del campo elettrostatico

ha rispettivamente nel mezzo 1 e nel mezzo 2, in vicinanza della superficie di separazione. In generale, è $\vec{E}_1 \neq \vec{E}_2$: passando da un mezzo a un altro, il campo elettrico subisce cioè una discontinuità. Applichiamo ora la [I.78] a un percorso chiuso costituito da due tratti elementari di lunghezza dl paralleli alla superficie di separazione (uno in un mezzo, e uno nell'altro) congiunti fra di loro da due tratti elementari di lunghezza dn normali alla superficie stessa. Sia dn infinitesimo di ordine superiore rispetto a dl. Al limite per dn tendente a zero, il contributo alla circuitazione proveniente dai due tratti ortogonali alla superficie può essere trascurato; e la [I.78] si riduce a:

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = 0 \qquad \text{[II.1]}$$

ovvero

$$E_{t1}\, dl - E_{t2}\, dl = 0$$

avendo indicato con E_{t1} e E_{t2} le componenti del campo elettrico parallelamente alla superficie di separazione; da cui segue

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad \text{[II.2]}$$

Passando da un mezzo materiale a un altro, la componente del campo elettrico tangenzialmente alla superficie di separazione non può subire discontinuità.

In vicinanza di un conduttore il campo elettrostatico è ortogonale alla superficie del conduttore stesso

Nel caso particolare che uno dei due mezzi sia un conduttore (ad esempio il mezzo 2), allora si ha $\vec{E}_2 = 0$ e dunque anche $E_{t2} = 0$; dalla [II.2] segue pertanto che anche $E_{t1} = 0$, cioè in vicinanza di un conduttore la componente tangenziale del campo elettrostatico è nulla. Dunque: *in vicinanza di un conduttore il campo elettrostatico $\vec{E}_o$ è ortogonale alla superficie del conduttore stesso.*

Osserviamo che *la componente del campo E_n normale alla superficie* di un conduttore *subisce una discontinuità*, passando dal valore zero internamente al conduttore a un valore generalmente diverso da zero esternamente al conduttore stesso. In realtà, il passaggio dal valore nullo, che il campo ha internamente, al valore non nullo che esso ha esternamente avviene attraversando uno strato superficiale il cui spessore è dell'ordine del diametro atomico: in tale strato superficiale è concentrata come vedremo, la carica di cui sia eventualmente dotato il conduttore. Le linee di forza di $\vec{E}_o$ nascono sulla superficie del conduttore carico e, se questo è isolato, vanno all'infinito.

Dalle proprietà, or ora discusse, del campo elettrostatico internamente e in vicinanza dei conduttori, seguono immediatamente le proprietà del potenziale.

Il volume interno ai conduttori è equipotenziale

Dal fatto che internamente al conduttore è $\vec{E} = 0$, discende dalla [I.39] che il potenziale V_i interno al conduttore è uniforme: *in elettrostatica il volume interno ai conduttori è equipotenziale.*

La superficie che delimita i conduttori è equipotenziale

D'altra parte essendo il campo elettrico esterno al conduttore ortogonale ad esso, poiché il gradiente è ortogonale alle superfici equipotenziali, dalla [I.41] segue che anche esternamente al conduttore il potenziale V_e è, in vicinanza di esso, uniforme: *anche la superficie che delimita i conduttori è equipotenziale.*

La relazione fra il potenziale V_i (uniforme) presente internamente al conduttore e quello V_e (anch'esso uniforme) presente sulla sua superficie

esterna può essere determinata solo ricorrendo alla [I.39], cioè misurando il lavoro L_e necessario per portare una carica di prova q da una posizione interna al conduttore a una posizione esterna (ma prossima) al conduttore stesso (*lavoro di estrazione*):

Lavoro di estrazione

$$\Delta V = V_i - V_e = -\frac{L_e}{q} \qquad [II.3]$$

Sperimentalmente, la quantità ΔV risulta essere una quantità positiva (occorre compiere dall'esterno lavoro positivo per estrarre gli elettroni) indipendente dalla carica posseduta dal conduttore, ed è una quantità caratteristica del materiale che costituisce il conduttore. Essa è detta *funzione lavoro* di quel materiale, e nei metalli è dell'ordine del Volt. La quantità negativa $\Delta V e^-$ (e^-: carica dell'elettrone) rappresenta l'energia con cui gli elettroni sono legati al metallo.

Funzione lavoro

Usualmente, quando nel seguito parleremo di potenziale V di un conduttore, salvo avviso contrario intenderemo il potenziale esterno V_e.

Tenuto conto del fatto che il campo elettrico internamente ai conduttori è nullo, una semplice applicazione del teorema di Gauss ci consente di concludere che le eventuali cariche presenti su un conduttore si dispongono sulla superficie del conduttore stesso.

Dato il conduttore C, consideriamo internamente ad esso una qualunque *superficie* chiusa Σ. Essendo $\vec{E} = 0$, il flusso di $\vec{E}$ attraverso Σ è nullo; e dunque la [I.22] garantisce che la carica netta contenuta internamente a Σ è nulla. Poiché ciò vale per qualunque superficie Σ interna a C *una eventuale carica non può che disporsi sulla superficie del conduttore.*

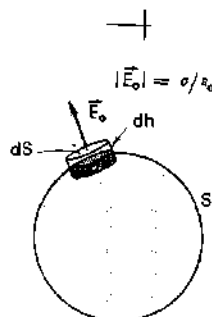
In elettrostatica la carica posseduta da un conduttore si dispone in superficie

Quando su un conduttore viene disposta una carica Q, come abbiamo visto, tale carica si distribuisce sul conduttore in modo da annullare il campo elettrico internamente al conduttore stesso. Determinare quale sia la distribuzione che produce tale effetto è tutt'altro che semplice, e ciò costituisce uno dei problemi dell'elettrostatica dei conduttori, come meglio approfondiremo nel seguito. Ciò che abbiamo ora stabilito è che le cariche si distribuiscono sulla superficie: dunque la loro distribuzione sarà caratterizzata non da una densità di volume $\rho(x,y,z)$, ma da una distribuzione superficiale $\sigma(x,y,z)$ – in generale non uniforme sulla superficie S del conduttore – che soddisfa la condizione di normalizzazione

$$\int_S \sigma\,(x,y,z)\,dS = Q \qquad [II.4]$$

dove S è la superficie del conduttore.

Per la determinazione della distribuzione di carica σ, e più in generale per la soluzione di molti problemi di elettrostatica dei conduttori, è di grande aiuto il *teorema di Coulomb*, che consente di legare fra di loro il valore assunto dal campo elettrico $\vec{E}_0$ in vicinanza del conduttore e il valore che localmente assume la densità superficiale di carica σ.

Dato un conduttore C, consideriamo un cilindretto di base $d\vec{S}$ e altezza dh disposto così come mostrato in figura: le basi del cilindro sono parallele alla superficie del conduttore e l'altezza dh – infinitesima di ordine superiore rispetto alle dimensioni lineari di dS – è ortogonale alla superficie stessa. Applichiamo al cilindretto il teorema di Gauss. Poiché il campo elettrico è nullo internamente al conduttore, ed esternamente ad esso è parallelo alla superficie laterale del cilindretto, il flusso uscente si riduce al

flusso attraverso la base superiore, ed è dato da $\vec{E}_o \cdot d\vec{S} = E_o\, dS$. ($\vec{E}_o$ e $d\vec{S}$ sono fra loro paralleli). D'altra parte, la carica dQ contenuta nel cilindretto è data dalla carica portata dalla porzione di superficie del conduttore intercettata dal cilindretto (tratteggiata in figura): $dQ = \sigma\, dS$. Pertanto il teorema di Gauss si riduce a $\vec{E}_o \cdot d\vec{S} = \dfrac{\sigma\, dS}{\varepsilon_o}$; da cui

Teorema di Coulomb

$$\vec{E}_o = \frac{\sigma \hat{n}}{\varepsilon_o} \qquad \text{[II.5]}$$

$$\vec{D} = \sigma \cdot \hat{n} \qquad \text{[II.5a]}$$

espressione che sintetizza il **teorema di Coulomb**: *in un punto vicino ad un conduttore, il campo elettrico ha modulo pari a σ/ε_o*, dove σ è la densità superficiale di carica in prossimità del punto considerato; *esso è diretto secondo la normale uscente se $\sigma > 0$, e secondo la normale entrante se $\sigma < 0$.*

È da osservare che, benché nella [II.5] compaia la densità σ nel punto considerato, in realtà il campo $\vec{E}_o$ è determinato dall'effetto di tutte le cariche distribuite sul conduttore.

Le conclusioni fin qui raggiunte in questo paragrafo costituiscono importanti premesse alla impostazione del problema della elettrostatica in presenza di conduttori in tutta la sua generalità, così come vedremo nei prossimi paragrafi. Esse sono tuttavia già adeguate, anche nella formulazione fin qui data, alla soluzione di semplici problemi di rilevanza pratica.

Esempi

E.II.1. *Consideriamo un conduttore cavo S scarico, come mostrato in figura. Internamente ad esso poniamo un corpo S' dotato di carica Q, ad esempio positiva. Quale effetto si produce sul conduttore cavo?*

Internamente al conduttore cavo S, consideriamo una superficie chiusa Σ così come rappresentato dalla linea tratteggiata nella seconda figura. Poiché in S, così come in *ogni altro conduttore*, il campo elettrico a regime è nullo, è nullo il flusso del campo elettrico attraverso Σ; e pertanto, per il teorema di Gauss, è nulla la carica netta contenuta internamente a Σ. Affinché ciò accada per ogni Σ interna ad S, ed in particolare per una Σ vicinissima alla superficie interna del conduttore S, è necessario che sulla superficie interna di S si induca una carica pari in modulo, e opposta in segno, rispetto alla carica Q. D'altronde, considerato che S è complessivamente neutro, ciò provoca l'induzione di una carica pari a Q (in valore e segno) sulla superficie esterna di S. Questo fenomeno è detto fenomeno della *induzione completa*. Un conduttore cavo non è dunque in grado di schermare, verso l'esterno, l'effetto di una eventuale carica presente al suo interno.

Induzione completa

L'induzione elettrostatica avviene in modo che:
- la somma delle cariche indotte è nulla;
- le cariche indotte si distribuiscono in modo da rendere equipotenziale tutto il conduttore

Osserviamo che qualora il corpo S', supposto conduttore, sia portato a toccare dall'interno il conduttore cavo S, la carica $+Q$ presente su S' neutralizza la carica $-Q$ presente sulla superficie interna di S: l'effetto netto è quello di trasferire al conduttore S tutta la carica che inizialmente possedeva S'; ed è questa l'unica tecnica che consente di trasferire totalmente, per contatto, una carica da un conduttore a un altro.

E.II.2. *Verificare il teorema di Coulomb nel caso di una sfera conduttrice dotata di carica Q.*

Come abbiamo a suo tempo visto (vedi par. I.5), una distribuzione di carica dotata di simmetria sferica produce lo stesso campo di una carica puntiforme di

pari valore disposta nel centro della distribuzione. Nel caso di una sfera conduttrice, la carica si distribuisce uniformemente (per ragioni di simmetria) sulla sua superficie; dunque se R è il raggio della sfera, il campo esternamente ad essa in vicinanza della sua superficie è dato da (vedi esempio E.I.8):

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

D'altra parte la densità di carica superficiale σ vale $\sigma = \frac{Q}{S}$, dove $S = 4\pi R^2$ è la superficie della sfera; cioè:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Per confronto fra l'espressione di E_0 e quella di σ segue $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$ coerentemente con il teorema di Coulomb.

E.II.3. *Consideriamo un conduttore cavo S, carico con una certa carica q. Quanto vale il campo elettrico nella cavità vuota del conduttore?*

Abbiamo visto che la carica posseduta da un conduttore si dispone, in elettrostatica, sulla superficie del conduttore stesso. Ciò perché, come si è visto precedentemente, all'interno di ogni superficie Σ interna al conduttore, per il teorema di Gauss, la carica totale è nulla. Tale condizione potrebbe, per il solo teorema di Gauss, anche essere verificata da una distribuzione non simmetrica di cariche sulla superficie che delimita la cavità, per esempio come mostrato in figura. Si creerebbe un campo $\vec{E}_0 \neq 0$ all'interno della cavità, ma ciò è incompatibile con la condizione di conservatività del campo elettrostatico. Infatti, presa una linea chiusa l, parte della quale interna alla cavità e parte interna al conduttore, l'integrale di linea $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ risulterebbe diverso da zero, dal momento che, mentre la parte di integrale relativo alla zona di conduttore darebbe contributo nullo ($\vec{E} \equiv 0$), la parte di integrale relativo alla zona vuota della cavità darebbe contributo diverso da zero.

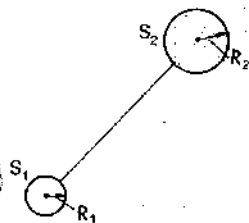
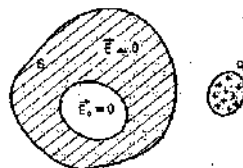
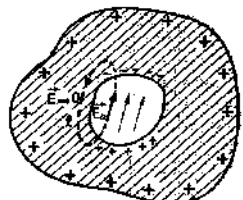
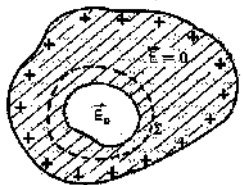
Dunque anche il campo interno alla cavità è nullo.

Lo stesso tipo di ragionamento si può ripetere anche nel caso in cui il conduttore cavo S sia scarico ed all'esterno di questo sia disposta una carica q sorgente di campo elettrico. Anche in questo caso si conclude che il campo elettrico all'interno della cavità è nullo. Si dice che il conduttore cavo funziona da *schermo elettrostatico*.

E.II.4. *Due sfere conduttrici S_1 ed S_2, di raggio rispettivamente R_1 ed R_2, sono unite da un filo conduttore rettilineo, di lunghezza molto maggiore di R_1 ed R_2. Sul sistema viene dislocata una carica Q. Come si suddivide Q sulle due sfere? Quanto vale il campo elettrico in vicinanza delle sfere? (Si trascuri l'effetto della carica che si dispone sul filo in modo tale da rendere nullo il campo elettrico ovunque internamente al filo).*

S₂ R₂ S₁ R₁

Supponiamo che le due sfere siano sufficientemente lontane perché il campo elettrico prodotto dall'una non perturbi la distribuzione di carica sull'altra; in altri termini, supponiamo che intorno a ognuna delle sfere le grandezze fisiche caratteristiche del problema (potenziale, campo elettrico, densità di carica) abbiano simmetria sferica. Il potenziale V_1 e V_2 che S_1 ed S_2 producono in vicinanza della loro superficie vale allora (vedi eq. [1.42]):

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} \qquad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}$$

dove Q_1 e Q_2 sono le cariche possedute rispettivamente dalle due sfere ($Q_1 + Q_2 \simeq Q$). Ma essendo le due sfere unite dal filo a formare un unico conduttore, deve essere $V_1 = V_2$; e ciò comporta $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$; ovvero:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad [II.6]$$

La carica si distribuisce dunque sulle due sfere in misura proporzionale ai rispettivi raggi.

La densità di carica sulle due sfere vale:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}; \qquad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$$

da cui $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{R_1^2} \cdot \frac{R_2^2}{Q_2}$; e tenuto conto della [II.6]:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

La densità di carica sulle due sfere è inversamente proporzionale ai rispettivi raggi; e tenuto conto della [II.5] lo stesso accade al campo elettrico E_0 in vicinanza delle due sfere: quest'ultimo è dunque tanto più intenso quanto più piccolo è il raggio.

Gli esempi E.II.3 ed E.II.4 introducono alcuni fenomeni di grande interesse teorico e pratico relativamente alla elettrostatica in presenza di conduttori.

Schermo elettrostatico

In primo luogo il fenomeno dello *schermo elettrostatico*. Consideriamo una scatola metallica collegata a terra, cosicché il suo potenziale sia lo stesso della superficie terrestre; per comodità, tale scatola può essere realizzata anche mediante una rete metallica («*gabbia di Faraday*»). Per quanto visto nell'esempio E.II.3, tutti i fenomeni elettrici che hanno luogo internamente alla scatola sono determinati unicamente da interazioni mutue fra cariche situate internamente alla scatola, nessuna interazione elettrostatica essendo prodotta da eventuali cariche presenti esternamente alla scatola.

Gabbia di Faraday

Potere delle punte

Il secondo fenomeno è quello dovuto al cosiddetto *potere delle punte*. A causa di fenomeni analoghi a quello descritto nell'esempio E.II.4, in vicinanza di un conduttore il campo elettrico è tanto più intenso quanto più piccolo è il raggio di curvatura di eventuali convessità che la superficie del conduttore presenti. Se tale raggio di curvatura diviene molto piccolo (e ciò accade quando la superficie del conduttore presenta una «punta»), specie se il conduttore è posto ad alto potenziale (o, come si dice spesso nel linguaggio comune, ad «alta tensione») nel gas (ad esempio aria) presente in vicinanza della punta si verificano delle scariche elettriche. La scarica elettrica di una gas si produce quando una carica microscopica vagante (per esempio elettrone) incontra un forte campo elettrico che la accelera. L'energia cinetica che la particella carica acquisisce può essere tale da generare, negli urti contro le molecole neutre del gas, la ionizzazione delle molecole stesse con produzione di coppie elettrone-ione: e queste cariche, accelerate a loro volta dal campo elettrico, possono produrre in urti successivi un fenomeno a valanga con altissime correnti locali (scarica, scintilla, fulmine, ecc.).

Zona di addensamento di superfici equipotenziali e quindi di alto campo elettrico

Osserviamo che, dato un sistema di più conduttori, qualora la carica posseduta da uno di essi venga variata, la densità di carica sulla sua superfi-

cie varia in ogni punto proporzionalmente alla carica posseduta dal conduttore. Infatti la espressione della densità di carica σ (legata a Q dalla relazione $Q = \int \sigma \, dS$) è univocamente definita dalla condizione

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma \, dS}{\Delta r} = V = \text{costante sul conduttore (vedi eq. [I.44.a])}.$$

Pertanto moltiplicando Q per un certo fattore, σ e V risultano moltiplicati per lo stesso fattore. Questa osservazione sarà il punto di partenza delle considerazioni che svilupperemo nel prossimo paragrafo.

II.2. Capacità elettrica

Consideriamo un conduttore disposto nello spazio vuoto, molto lontano da altri oggetti in modo da non essere sottoposto ad alcuna interazione di tipo elettrico. Se al conduttore viene comunicata una certa carica q, questa si dispone sulla sua superficie, ed è descritta dalla densità superficiale di carica $\sigma(x, y, z)$ funzione della posizione. In base a ragionamenti analoghi a quelli già sviluppati precedentemente, è facile concludere che qualora al conduttore venga comunicata una seconda carica q, quest'ultima assume la stessa configurazione che assumerebbe qualora essa fosse disposta sul conduttore inizialmente scarico: in altri termini, in ogni punto della superficie del conduttore la densità superficiale di carica risulta essere proporzionale alla carica totale Q posseduta dal conduttore stesso.

Pertanto, in base al principio di sovrapposizione, in ogni posizione nello spazio circostante al conduttore il campo elettrico è proporzionale alla carica Q stessa. Poiché d'altro canto il potenziale V del conduttore è legato al campo elettrico E_0 dalla relazione

$$V - V(\infty) = \int_{\text{conduttore}}^{\infty} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = V$$

(integrale eseguito lungo una linea qualunque ed avendo assunto uguale a zero il potenziale all'∞), segue che deve sussistere una relazione di diretta proporzionalità fra V e Q:

$$Q = CV$$

La costante di proporzionalità

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \text{[II.7]}$$

Capacità di un conduttore

è detta *capacità* del conduttore.

La capacità elettrostatica di un conduttore può essere posta in analogia con la capacità volumetrica di un recipiente cilindrico: nella analogia idrostatica l'analogo della quantità di carica è la quantità di liquido contenuta nel recipiente, e l'analogo del potenziale elettrostatico è il livello che il liquido raggiunge nel recipiente. Un conduttore ha grande capacità quando può accogliere grandi trasferimenti di carica senza che ciò provochi grandi variazioni del suo livello di potenziale.

Dalla definizione [II.7] segue che le dimensioni della capacità sono quelle di una carica fratto un potenziale

$$[C] = [Q] \cdot [V^{-1}]$$

FARAD, unità di misura della capacità

Tabella dei sottomultipli di Farad		
C (Farad)	Simbolo	Nome
10^{-6}	μF	micro-F
10^{-12}	pF	pico-F

Nel sistema S.I., l'unità di misura della capacità è il **FARAD**, pari a un Coulomb per Volt: un conduttore ha capacità di un farad qualora esso raggiunga il potenziale di 1 Volt, quando ad esso venga comunicata la carica di 1 Coulomb.

La capacità di un conduttore è una costante caratteristica del conduttore che dipende dalla sua forma e dalle sue dimensioni geometriche, oltre che dal mezzo (isolante) in cui il conduttore è immerso.

Esempio

E.II.5. *Calcolare la capacità di una sfera conduttrice di raggio $R = 2\ m$.*

Se alla sfera viene fornita una carica Q, il campo elettrico $\vec{E}_0$ esternamente ad essa è dato da (vedi eq. [I.27]):

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

e dunque il potenziale della sfera vale:

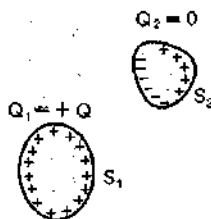
$$V - V(\infty) = V = \int_R^\infty \vec{E}_0(\vec{r})\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

Dunque

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad \text{[II.8]}$$

Se $R = 2$ m,

$$C = 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot\frac{C^2}{N\,m^2}\cdot 2\,m = 222\cdot 10^{-12}\frac{C}{V} = 222\cdot 10^{-12}\,\text{Farad} = 222\,\text{pF}$$

(10^{-12} Farad = 1 pF, 1 picofarad).

Consideriamo ora il caso in cui si abbiano due conduttori S_1 ed S_2, sufficientemente vicini fra di loro da interagire elettrostaticamente quando ad uno o ad entrambi venga fornita della carica.

Fissata la configurazione geometrica, immaginiamo che ad uno di essi (sia S_1) venga fornita una carica ad esempio positiva ($Q_1 = +Q$), mantenendo pari a zero la carica sull'altro. In base a quanto già visto, avremo che la densità di carica superficiale presente in ogni punto della superficie dei due conduttori non può che essere proporzionale a Q_1. Pertanto, in ogni posizione dello spazio il campo elettrostatico $\vec{E}_0$ è proporzionale a Q_1; e dunque risulteranno proporzionali a Q_1 anche i potenziali V_1 e V_2 dei due conduttori (assunto come sempre uguale a zero il potenziale all'infinito). Osserviamo anche che su S_2 si inducono cariche negative nella parte più vicina a S_1, e cariche positive nella parte più lontana, per cui a parità di carica Q_1 il potenziale V_1 è minore rispetto al caso in cui S_2 sia assente: *la presenza del conduttore S_2 aumenta la capacità di S_1.*

Analogamente, se $Q_1 = 0$ e $Q_2 = Q \neq 0$, i potenziali V_1 e V_2 risultano proporzionali a Q_2. Più in generale, nel caso in cui entrambi i conduttori

siano dotati di carica, i potenziali V_1 e V_2 sono legati a Q_1 e Q_2 da due relazioni lineari del tipo:

$$\begin{cases} V_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 \\ V_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 \end{cases} \qquad [II.9]$$

Coefficienti di potenziale

I coefficienti p_{ij} si dicono *coefficienti di potenziale* e dipendono solo dalla configurazione geometrica del sistema di conduttori. Più in generale, se si hanno N conduttori in una configurazione geometrica fissa, si ha:

$$V_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j \qquad i = 1 \ldots N \qquad [II.10]$$

Il sistema di equazioni dei potenziali [II.10] formalizza il fatto che il potenziale di ciascun conduttore può essere espresso come somma dei potenziali parziali che sarebbero assunti dai conduttori stessi se uno solo di essi fosse dotato di carica.

Fissate le cariche possedute da tutti i conduttori, i relativi potenziali sono univocamente determinati; ciò implica che il sistema lineare [II.10] abbia soluzione univoca. Per un noto teorema di algebra (teorema di Cramer), segue che la matrice dei coefficienti di potenziale deve avere determinante diverso da zero.

$$\det \|P\| \equiv \det \|p_{ij}\| \neq 0 \qquad [II.11]$$

Si dimostra inoltre (ma noi non lo faremo) che i coefficienti p_{ij} godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} p_{ij} = p_{ji} & \text{(la matrice } \|P\| \text{ è simmetrica)} \\ p_{ij} > 0 & \text{per ogni } i \text{ e ogni } j \\ p_{ii} \geq p_{ij} & (i \neq j) \end{cases} \qquad [II.12]$$

In virtù della [II.11], il sistema II.10 può essere invertito; si ha dunque:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} V_j \qquad i = 1, \ldots, N \qquad [II.13]$$

Coefficienti di induzione

I coefficienti c_{ij} sono detti *coefficienti di induzione* (per $i \neq j$); essi costituiscono gli elementi di matrice della matrice $\|c\|$ detta *matrice di capacità*. È evidente che la matrice di capacità è la matrice inversa della matrice dei coefficienti di potenziale

$$\|C\| = \|P\|^{-1} \qquad [II.14]$$

Coefficienti di capacità

Se $i = j$, i coefficienti di induzione c_{ii} vengono detti *coefficienti di capacità*. Si dimostra che è:

$$\begin{cases} c_{ij} = c_{ji} & \text{(la matrice } \|C\| \text{ è simmetrica)} \\ c_{ij} < 0 & (i \neq j) \\ c_{ii} > 0 \end{cases} \qquad [II.15]$$

Esempio

E.II.6. *I due conduttori rappresentati in figura costituiscono un sistema dotato di simmetria sferica. Calcolare la matrice dei coefficienti di potenziale e la matrice di capacità.*

Supponiamo prima che sia $Q_2 = 0$ e $Q_1 = Q$; la [II.9] diviene pertanto:

$$V_1 = p_{11}\, Q$$
$$V_2 = p_{21}\, Q$$

Come abbiamo visto nell'esempio E.II.1, sul conduttore esterno si genera un fenomeno di induzione completa. Esternamente a S_2, il campo assume dunque lo stesso valore che avrebbe se la carica $+Q$ fosse disposta su un conduttore sferico di raggio R_3; per cui si ha (per $V(\infty) = 0$):

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_3}$$

da cui

$$p_{21} = \frac{V_2}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_3}.$$

Per calcolare il potenziale V_1 del conduttore S_1, osserviamo che nell'interspazio fra S_1 ed S_2 il campo è quello generato dalla carica $+Q$ (con simmetria sferica) disposta su S_1; dunque

$$\vec{E}_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

dove $\vec{r}$ è la distanza dal centro (r il suo modulo e $\hat{r}$ il suo versore). Dunque dalla [I.38]:

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(r)\cdot d\vec{l} = \left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

da cui

$$V_1 = V_2 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) =$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

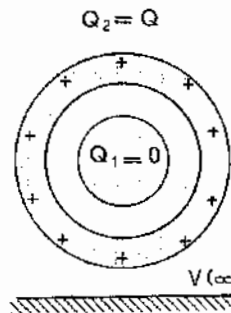
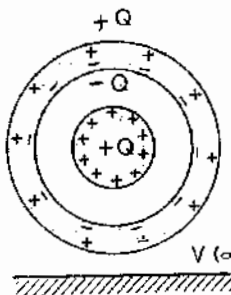
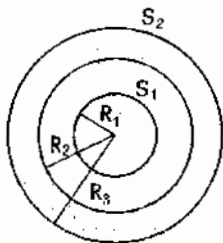
Dunque:

$$p_{11} = \frac{V_1}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_3}{R_1R_2R_3}$$

Poniamo ora $Q_1 = 0$ e $Q_2 = Q$. La [II.9] diviene:

$$V_1 = p_{12}\, Q$$
$$V_2 = p_{22}\, Q$$

Esternamente a S_2, si ha ancora lo stesso campo che si aveva nel caso precedente; per cui $V_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R_3}$ e quindi

$$p_{22} = \frac{V_2}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}$$

D'altra parte, essendo nullo il campo nell'interspazio fra i due conduttori, si ha $V_1 = V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_3}$; e dunque

$$p_{12} = \frac{V_1}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}.$$

Dunque in definitiva la matrice dei coefficienti di potenziale è:

$$\| P \| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_3}{R_1R_2R_3} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_3} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_3} \end{vmatrix}$$

Osserviamo, in particolare, che gli elementi di matrice p_{ij} soddisfano le condizioni [II.12].

Per trovare la matrice di capacità, la strada più immediata è, a questo punto, quella di invertire la matrice $\|P\|$ (eq. [II.14]). Ricordando che l'inverso di una matrice ha come elementi di matrice i minori degli elementi della matrice considerata divisi per il determinante della matrice stessa, con semplici passaggi algebrici si ricava che la matrice di capacità ha la seguente struttura:

$$\| C \| = \begin{vmatrix} \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2}{R_2 - R_1} & -\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2}{R_2 - R_1} \\ -\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2}{R_2 - R_1} & 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_3}{R_2 - R_1} \end{vmatrix}$$

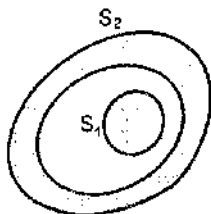
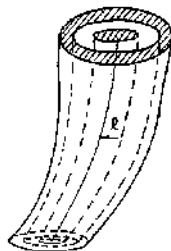
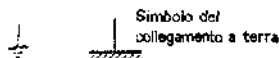
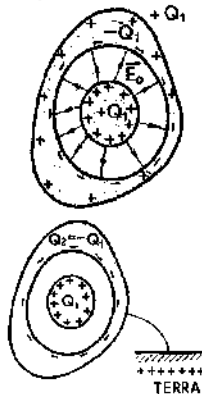
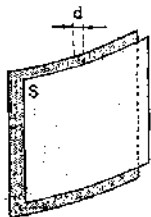
Osserviamo in particolare che sono verificate le condizioni [II.15].

Il sistema discusso nell'esempio E.II.6 rappresenta un caso particolare di una situazione generale di grande interesse pratico: quella cioè in cui due conduttori sono disposti in configurazione tale che il fenomeno di *induzione* che un conduttore esercita sull'altro sia *completo*. Quando ciò succede, tutte le linee di forza del campo prodotto dal primo conduttore terminano sull'altro conduttore. Un sistema di due conduttori che goda di questa proprietà viene detto *condensatore elettrostatico* o *capacitore*.

Condensatore elettrostatico

Le configurazioni geometriche in cui si presenta l'induzione completa appartengono a tre categorie:

a) un conduttore è contenuto dentro una cavità ricavata all'interno dell'altro. La più semplice geometria che si può avere in questo caso è quella dotata di simmetria sferica, così come accadeva nell'esempio E.II.6: in questo caso si dice che si ha un *condensatore sferico*

b) La geometria del conduttore interno si sviluppa prevalentemente lungo una linea l, e intorno ad esso si avvolge il secondo conduttore dotato di struttura tubolare; la condizione di induzione completa si realizza solo nel limite in cui la lunghezza l è molto maggiore delle dimensioni trasversali (struttura tubolare di lunghezza infinita). La geometria più semplice di questa configurazione si ha quando il sistema ha simmetria cilindrica (*condensatore cilindrico*).

c) I due conduttori si affacciano uno all'altro con una superficie S le cui dimensioni lineari sono molto più grandi della distanza d che le separa; la situazione di induzione completa si raggiunge in effetti solo nel limite di superficie infinita. La geometria più semplice di questa configurazione si realizza quando la superficie S è piana (*condensatore piano*).

I due conduttori che formano il condensatore vengono detti *armature del condensatore*. Si dice che un condensatore viene caricato quando tra le armature viene stabilita una differenza di potenziale e su di esse si distribuiscono cariche uguali in modulo e di segno opposto (la carica totale di un condensatore è nulla).

Se all'armatura interna S_1 di un condensatore viene fornita una carica Q_1 lasciando l'altra armatura elettricamente isolata, su quest'ultima le cariche si ridistribuiscono per il fenomeno dell'induzione. Se l'induzione è completa, la superficie della seconda armatura che affaccia verso la prima armatura viene ad essere dotata di carica $-Q_1$; e la superficie più lontana ha carica Q_1 (vedi esempio E.II.6). Se ora l'armatura esterna viene «messa a terra» (cioè collegata con un conduttore dotato di capacità infinita: in pratica la «messa a terra» o «messa a massa» viene effettuata mediante un conduttore che penetra nel suolo disperdendo in esso le cariche senza perturbarne il potenziale) la carica $+Q_1$ si disperde a distanza «infinita»; e l'armatura *esterna* resta dotata di carica $Q_2 = -Q_1$ uguale in modulo, e opposta in segno, rispetto alla carica posseduta dalla prima armatura.

Con analogo ragionamento, è facile rendersi ragione del fatto che qualora l'armatura dotata inizialmente di carica fosse quella esterna, collegando a terra l'armatura interna (inizialmente scarica) si ha comunque una migrazione di cariche, in conseguenza della quale in ogni caso le due armature risultano avere, a regime, cariche fra di loro uguali ed opposte.

In un condensatore, sussiste una relazione di proporzionalità fra il modulo della carica $Q = |Q_1| = |Q_2|$ posseduta da ciascuna armatura e il modulo della differenza di potenziale $\Delta V = |V_2 - V_1|$ esistente fra le due armature:

$$Q = C\Delta V$$

Simbolo del collegamento a terra

È usuale la convenzione che il potenziale di un conduttore a terra sia nullo

Il rapporto

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad \text{[II.16]}$$

è detto *capacità del condensatore* e dipende solo dalla geometria del condensatore.

Capacità di un condensatore

Il fatto che Q sia proporzionale a ΔV può essere dimostrato facilmente usando la [II.9]; ponendo infatti in essa $Q_1 = Q = -Q_2$, essa diviene:

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q - p_{12}Q = (p_{11} - p_{12})Q \\ V_2 = p_{12}Q - p_{22}Q = (p_{12} - p_{22})Q \end{cases}$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che $p_{12} = p_{21}$. Sottraendo membro a membro si ha:

$$V_1 - V_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q$$

che è quanto volevamo mostrare.

Per confronto con la [II.16] si ha

$$C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}} \qquad [II.17]$$

relazione che esprime la capacità del condensatore in funzione dei coefficienti di potenziale. Considerato che la matrice di capacità è l'inverso della matrice dei coefficienti di potenziale, è immediato ricavare l'espressione della capacità C in funzione dei coefficienti di induzione; si ha:

$$C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} - 2c_{12}} \qquad [II.18]$$

Simbolo del condensatore

La capacità di un condensatore, il cui simbolo rappresentativo è quello indicato nello schema a fianco, può essere calcolata – oltreché a partire dai coefficienti di potenziale ovvero dai coefficienti di induzione – anche direttamente a partire dalla [II.16]; cioè calcolando quale differenza di potenziale si stabilisce fra le due armature quando esse vengono dotate di cariche di segno opposte e di modulo pari a Q.

Esempi

E.II.7. *Calcolare la capacità di un condensatore sferico.*

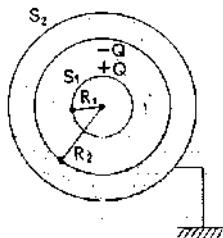
Nell'interspazio compreso fra i due conduttori, il campo elettrico presente è quello generato dalla carica $+Q$ distribuita (con simmetria sferica) sul conduttore interno; dunque:

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

Dunque la differenza di potenziale ΔV vale:

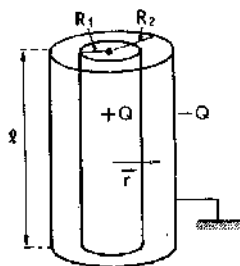
$$V_1 - V_2 = \Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{l} = \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Da questa si ricava

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \qquad [II.19]$$

Capacità del condensatore sferico

È facile verificare che allo stesso risultato si sarebbe pervenuti utilizzando la [II.18], tenuto conto che gli elementi della matrice di capacità sono quelli ricavati nell'esempio E.II.6.

E.II.8. *Calcolare la capacità di un condensatore cilindrico.*

Se la lunghezza l del condensatore è molto maggiore di R_1 ed R_2 (condizione necessaria perché ci si trovi in una situazione schematizzabile come di induzione

completa) il campo elettrico nell'intercapedine fra i due conduttori è radiale, e il suo modulo vale (vedi esempio E. I.11):

$$\vec{E}_o(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\hat{r}}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o l}\frac{\hat{r}}{r} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

dove $\lambda = \dfrac{Q}{l}$ è la densità lineare (carica per unità di lunghezza) che si trova sul conduttore interno. Dunque:

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_o \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o l}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o l}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

da cui si ricava:

Capacità del condensatore cilindrico

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 2\pi\varepsilon_o l \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} \qquad \text{[II.20]}$$

E.II.9. *Calcolare la capacità di un condensatore piano.*

Come abbiamo visto nell'esempio E.I.13, nell'intercapedine fra le due armature è presente un campo elettrico diretto secondo la normale $\hat{n}$ uscente dalla superficie dotata di carica positiva e di intensità pari a σ/ε_o; cioè:

$$\vec{E}_o = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\hat{n} = \frac{Q}{S\varepsilon_o}\hat{n}$$

dove $\sigma = Q/S$ è la densità superficiale di carica presente sulle due armature. La differenza di potenziale che si stabilisce fra le due armature è pertanto:

$$\Delta V \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^2 \vec{E}_o \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{Q}{S\varepsilon_o}\hat{n}\cdot d\vec{l} = \frac{Q\,d}{S\varepsilon_o}$$

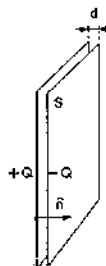
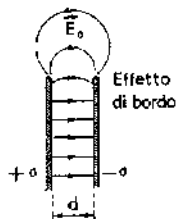
Capacità del condensatore piano

dove d è la distanza fra le armature; da questa relazione si ricava:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_o\frac{S}{d} \qquad \text{[II.21]}$$

Osserviamo che nel calcolo della [II.21] (così come nel calcolo della [II.20]) abbiamo trascurato gli effetti di bordo, cosa che è lecita quando la distanza d fra i due conduttori è molto minore delle dimensioni lineari della loro superficie: infatti gli effetti di bordo interessano una zona che ha dimensioni lineari dell'ordine di d.

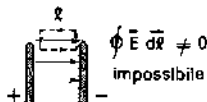
Osserviamo anche che la capacità [II.19] del condensatore sferico, nel caso che la distanza d fra le armature sia molto minore dei loro raggi R_1 ed R_2, si riduce alla [II.21]. Ponendo infatti nella [II.19] $R_2 - R_1 = d$ e $R_1 R_2 = R^2$ essa diviene:

$$C = 4\pi\varepsilon_o\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{\varepsilon_o}{d}(4\pi R^2) = \frac{\varepsilon_o}{d}S$$

Nella stessa ipotesi ($R_2 - R_1 = d << R_2, R_1$) anche la [II.20] si riduce alla [II.21]; infatti si ha:

$$\ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\frac{R_1 + d}{R_1} = \ln\left(1 + \frac{d}{R_1}\right) \simeq \frac{d}{R_1}$$

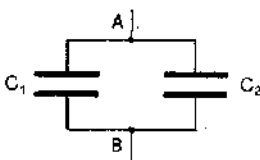
e sostituendo nella [II.20]:

$$C = 2\pi\varepsilon_0 l \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} \simeq \frac{\varepsilon_0 l\, 2\pi R_1}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Vale la pena di osservare che gli effetti di bordo sono prevedibili sulla base di considerazioni relative alla conservatività del campo elettrostatico. Se fosse possibile un andamento delle linee di forza di $\vec{E}$ del tipo di quello mostrato in figura, considerata una linea chiusa l in parte esterna alla zona delimitata dalle armature, si avrebbe $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$.

II.3. Sistemi di condensatori

Due condensatori possono essere collegati fra di loro, mediante fili conduttori, a formare un sistema di condensatori; ciò può essere fatto in due modi, detti rispettivamente *collegamento in parallelo* e *collegamento in serie*.

Collegamento in parallelo

Nel *collegamento in parallelo* le armature dei due condensatori vengono collegate a due a due (la prima armatura del primo condensatore alla prima armatura del secondo condensatore, e le seconde armature fra di loro). Il sistema così ottenuto è un sistema di due conduttori (A e B) fra i quali (se si trascura la capacità dei fili di collegamento) si esercita induzione completa; il sistema di condensatori costituisce dunque esso stesso un condensatore, la cui capacità C può essere facilmente espressa in termini delle capacità C_1 e C_2 dei due condensatori di partenza. Si ha infatti per la [II.16], quando i condensatori vengono considerati separatamente,

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 \Delta V_1 \\ Q_2 = C_2 \Delta V_2 \end{cases} \qquad \text{[II.22]}$$

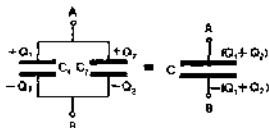
dove Q_1 e Q_2 sono le cariche rispettivamente possedute da C_1 e C_2, e ΔV_1 e ΔV_2 le rispettive differenze di potenziale. In virtù del collegamento in parallelo, si ha però:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = |V_B - V_A| = \Delta V$$

per cui sommando membro a membro le [II.22] si ottiene

$$Q_1 + Q_2 = C_1\Delta V_1 + C_2\Delta V_2 = C_1\Delta V + C_2\Delta V = (C_1 + C_2)\,\Delta V$$

da cui:

$$C_1 + C_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q}{\Delta V} = C$$

avendo tenuto conto del fatto che $Q_1 + Q_2$ rappresenta la carica Q posseduta complessivamente dalla capacità C. Dunque la *capacità C del sistema for-*

mato da due (o più) condensatori collegati in parallelo è pari alla somma delle rispettive capacità

$C = C_1 + C_2$

Capacità di condensatori in parallelo

$$C = C_1 + C_2 \qquad \text{[II.23]}$$

Collegamento in serie

Nel collegamento in serie, mostrato schematicamente in figura, una sola armatura del primo condensatore C_1 è collegata con una armatura del secondo condensatore C_2; il sistema risulta così formato da tre conduttori, A, B ed E.

Se, mantenendo il punto B a potenziale fisso (ad esempio collegandolo a terra) e lasciando il conduttore E elettricamente isolato (cosicché esso resti elettricamente scarico), si fornisce alla armatura A una carica $+Q$, sulle altre armature dei due condensatori si induce la configurazione di cariche mostrata in figura. Infatti la seconda armatura di C_1 assume carica $-Q$ per il fenomeno dell'induzione completa; l'armatura di C_2 collegata ad E assume carica $+Q$ per il fatto che il conduttore E deve restare elettricamente scarico; e la seconda armatura di C_2 assume carica $-Q$ per l'induzione completa. È immediato mostrare che sussiste una relazione di proporzionalità fra la carica Q e la differenza di potenziale $\Delta V = (V_A - V_B)$. Infatti si ha:

$$V_A - V_E = \frac{Q}{C_1} \quad \text{sul primo condensatore}$$

$$V_E - V_B = \frac{Q}{C_2} \quad \text{sul secondo condensatore}$$

Sommando membro a membro:

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = Q\,\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \qquad \text{[II.24]}$$

Il rapporto $\frac{Q}{\Delta V} = C$ viene detto, naturalmente, *capacità del sistema di condensatori in serie*. Dalla [II.24] si ricava:

Capacità della serie di due condensatori

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad \text{[II.25]}$$

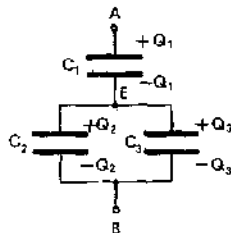
ovvero:

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \text{[II.25.a]}$$

La serie di due (o più) condensatori ha capacità C il cui inverso è somma degli inversi delle capacità dei condensatori che costituiscono il sistema

Esempi

E.II.10. *Consideriamo il sistema di tre condensatori collegati come mostrato in figura. Calcolare la capacità C del sistema; calcolare inoltre la carica e la differenza di potenziale relativi a ciascun condensatore, sapendo che $\Delta V = V_A - V_B = 100$ V, $C_1 = 3\,\mu$F, $C_2 = 2\,\mu$F e $C_3 = 4\,\mu$F.*

Il sistema di condensatori C_2 e C_3, fra di loro in parallelo, equivale a un unico condensatore di capacità $C_P = C_2 + C_3$; il sistema di 3 condensatori equivale dunque alla serie fra C_1 e C_P. È da osservare che $Q_1 = Q_2 + Q_3$.

Il sistema è ulteriormente riducibile a un condensatore di capacità C_S tale che:

$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_P} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3};$$

da cui:

$$C_S = \frac{C_1\,(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{3 \cdot (2 + 4)}{3 + 2 + 4}\,\mu F = 2\,\mu F$$

Si ricava subito:

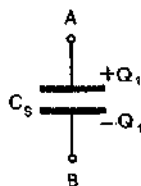
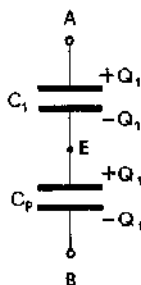
$$Q_1 = 2 \cdot 10^{-6}\,F \cdot 100\,V = 2 \cdot 10^{-4}\,C = 200\,\mu C$$

La differenza di potenziale ai capi di C_1 è pertanto:

$$\Delta V_1 = V_A - V_E = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2 \cdot 10^{-4}\,C}{3 \cdot 10^{-6}\,F} = 67\,V$$

La differenza di potenziale ai capi di C_2 e di C_3 vale $\Delta V_2 = \Delta V - \Delta V_1 = 33\,V$; e le cariche Q_2 e Q_3 sono rispettivamente:

$$Q_2 = C_2\,\Delta V_2 = 2 \cdot 10^{-6}\,F \cdot 33\,V = 67 \cdot 10^{-6}\,C = 67\,\mu C$$

$$Q_3 = C_3\,\Delta V_3 = 4 \cdot 10^{-6}\,F \cdot 33\,V = 133\,\mu C$$

E.II.11. *Calcolare la differenza di potenziale ai capi di tre condensatori di capacità rispettive C_1, C_2, C_3, collegati in serie fra un punto di potenziale V_A e un punto di potenziale $V_B = 0$ (terra).*

Partitore capacitivo

La stessa carica, a segni alterni, si distribuisce per induzione completa sulle 6 armature dei tre condensatori. Ai capi dei tre condensatori si hanno dunque le seguenti differenze di potenziale:

$$\Delta V_1 = V_A - V_E = \frac{Q}{C_1}$$

$$\Delta V_2 = V_E - V_F = \frac{Q}{C_2}$$

$$\Delta V_3 = V_F - V_B = \frac{Q}{C_3}$$

Per calcolare Q, basta sommare membro a membro le precedenti relazioni:

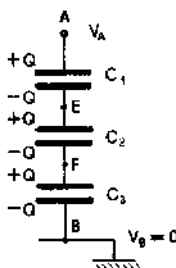
$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{Q}{C_S};$$

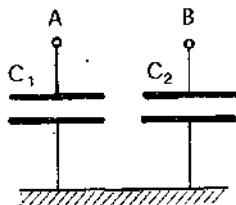
da cui $Q = \Delta V\,C_S$ dove C_S è la capacità della serie

$$\left(\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Si ha dunque:

$$\Delta V_1 = \Delta V \frac{C_S}{C_1} = (V_A - V_B)\frac{C_S}{C_1}$$

$$\Delta V_2 = \Delta V \frac{C_S}{C_2} = (V_A - V_B)\frac{C_S}{C_2}$$

$$\Delta V_3 = \Delta V \frac{C_S}{C_3} = (V_A - V_B)\frac{C_S}{C_3}$$

Osserviamo che la differenza di potenziale maggiore si presenta ai capi della capacità minore.

E.II.12. *Due condensatori di capacità C_1 e C_2 aventi una armatura a terra, vengono separatamente caricati in modo da assumere differenza di potenziale rispettivamente ΔV_1 e ΔV_2, con $\Delta V_1 > \Delta V_2$. Ad un certo istante le armature A e B vengono collegate fra di loro mediante un filo conduttore. Calcolare la differenza di potenziale ΔV che alla fine si stabilisce ai capi del parallelo di condensatori che si è così formato.*

Inizialmente, le cariche Q_1 e Q_2 possedute dai due condensatori valgono rispettivamente:

$$Q_2 = C_1 \Delta V_1$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V_2$$

Quando i due punti A e B vengono collegati fra di loro, le cariche Q_1 e Q_2 si ridistribuiscono fra i due condensatori; poiché tuttavia le armature A e B costituiscono, nel loro insieme, un sistema isolato, la carica Q posseduta dal parallelo (la cui capacità è $C_P = C_1 + C_2$) vale $Q = Q_1 + Q_2$ (conservazione della carica elettrica). Si ha pertanto:

$$\Delta V = \frac{Q}{C_P} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2}{C_1 + C_2}$$

II.4. Energia del campo elettrostatico

Energia elettrostatica di un sistema di cariche

Un sistema di cariche, disposte in una configurazione tale da interagire reciprocamente, possiede una certa energia elettrostatica: tale energia è misurata, operativamente, dal lavoro, di forze esterne, necessario per portare le cariche nella configurazione considerata a partire dalla configurazione in cui le cariche stesse si trovano a distanza reciproca infinita (assenza di interazione); configurazione, quest'ultima, cui si assegna convenzionalmente energia nulla.

L'energia elettrostatica di interazione fra un sistema di cariche può essere positiva o negativa. Ad esempio due cariche puntiformi dello stesso segno, poste a una certa distanza finita fra di loro, hanno energia elettrostatica positiva. Per portarle nella configurazione considerata è infatti necessario, da parte delle forze esterne, compiere lavoro positivo, vincendo la forza di repulsione tra le cariche (forza esterna e spostamento sono concordi e quindi il lavoro è positivo). L'energia che è stata così ceduta al sistema può essere recuperata se le cariche si riportano all'infinito; ad esempio se esse vengono lasciate libere di muoversi l'energia elettrostatica si trasforma,

almeno in parte, in energia cinetica (in parte, essa viene irraggiata nella forma di energia elettomagnetica, come vedremo nel capitolo IX). Viceversa, un sistema di due cariche puntiformi di segno opposto ha energia negativa: per portarle nella configurazione finale è infatti necessario che le forze esterne compiano lavoro negativo, frenando contro la forza di mutua attrazione tra le cariche.

Sistema discreto di cariche puntiformi

Cominciamo col calcolare l'energia elettrostatica di interazione posseduta da un *sistema discreto di cariche puntiformi*, disposte in una configurazione fissa e nota.

Inizialmente, le cariche siano tutte all'infinito: calcoliamo il lavoro necessario per portarle, una dopo l'altra, nella configurazione scelta.

Il posizionamento della prima carica può venire effettuato compiendo lavoro nullo, perché inizialmente nello spazio non è presente alcun campo elettrico.

Il posizionamento della seconda carica, a partire dall'∞ fino ad arrivare alla posizione finale a distanza r_{12} dalla prima, viene fatto muovendo la carica nel campo elettrostatico $\bar{E}_{01}$ generato dalla prima carica; il lavoro che deve essere compiuto su di essa dalla forza esterna (pari a $-q_2\bar{E}_{01}$) è dunque

$$L_2 = -\int_{\infty}^{r_{12}} q_2 \bar{E}_{01} \cdot d\bar{l} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_{12}} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}}$$

Se ora portiamo al suo posto, a partire dall'infinito, la carica q_3, è necessario muoverla nel campo prodotto dalle cariche q_1 e q_2; il lavoro che si deve compiere è:

$$L_3 = -\int_{\infty}^{r_{13}} q_3 \bar{E}_{01} \cdot d\bar{l} - \int_{\infty}^{r_{23}} q_3 \bar{E}_{02} \cdot d\bar{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

In definitiva, l'energia U posseduta dal sistema di tre cariche è:

$$U = L_2 + L_3 = \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j \, (i\neq j)}^{3} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ è stato introdotto perché la sommatoria $\sum_{(i\neq j)}$ comprende ogni termine due volte (ad esempio, essa contiene sia il termine $\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$ che il termine simmetrico, ad esso uguale, $\frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}}$). La precedente espressione può essere generalizzata a un sistema composto da un numero qualunque di cariche, la cui energia elettrostatica di interazione vale pertanto:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j \, (i\neq j)}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \qquad \text{[II.26]}$$

Energia elettrostatica di un sistema discreto di cariche puntiformi

La [II.26] vale per un sistema di cariche considerate come cariche elementari; in altri termini, nella [II.26] non si tiene conto del lavoro che è stato necessario per costruire ciascuna delle cariche q_i. È chiaro infatti che qualora le cariche q_i non siano elementari, per costruire ciascuna di esse a partire dai suoi costituenti elementari è stato necessario compiere lavoro

contro la forza repulsiva che mutuamente si scambiavano tali costituenti elementari. Per questo abbiamo chiamato la [II.26] *energia di interazione*

Osserviamo che la [II.26] può essere scritta come

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

Indichiamo con V_i la quantità $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$, che non presenta termini infiniti dal momento che $i \neq j$ e quindi $r_{ij} \neq 0$; *V_i rappresenta il potenziale generato nella posizione occupata dalla carica q_i da tutte le altre cariche*. La [II.26] può pertanto essere scritta come:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \qquad \text{[II.27]}$$

Quando si ha a che fare con un sistema macroscopico, anziché ricondurre la sua energia elettrostatica alla sommatoria [II.27] eseguita sulle cariche microscopiche, conviene adottare la schematizzazione continua; al posto della sommatoria [II.27] si scriverà allora l'integrale:

Energia elettrostatica di una distribuzione continua di carica

$$U = \frac{1}{2}\int_\tau \rho V \, d\tau \qquad \text{[II.28]}$$

dove $\rho(x, y, z)$ rappresenta la densità di carica; V rappresenta il potenziale in (x, y, z); $d\tau$ l'elemento di volume intorno al punto (x, y, z). L'integrale va eseguito su un qualsiasi volume τ che comprende al suo interno tutta la distribuzione di carica, considerato che, dove non c'è carica, si ha $\rho = 0$.

Qualora si abbia una distribuzione di carica superficiale con densità $\sigma(x, y, z)$ su una superficie S, la [II.28] assume la forma:

$$U = \frac{1}{2}\int_S \sigma V dS \qquad \text{[II.29]}$$

Energia elettrostatica totale

È da osservare che la [II.28], contenendo nell'integrando il potenziale V generato nel punto (x, y, z) da *tutta* la distribuzione di carica ρ, rappresenta l'*energia elettrostatica totale* del sistema, cioè la *somma* dell'*energia* elettrostatica *di interazione* (equivalente alla [II.27], in cui il potenziale V_i è dovuto a tutte le cariche eccettuata q_i) e della *autoenergia* (energia necessaria a costruire le cariche sorgenti del campo elettrico). Nel caso di distribuzioni discrete di cariche, in cui le cariche sono assunte puntiformi, i termini di autoenergia tendono a valori infiniti, come è intuitivo, se si pensa di voler costringere elementi di carica diversi da zero a distanze mutue tendenti a zero.

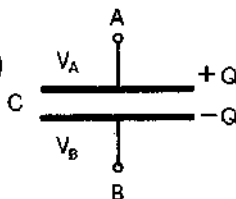
Esempi

E.II.13. *Calcolare l'energia elettrostatica di un condensatore di capacità C caricato fino ad assumere differenza di potenziale ΔV fra le armature.*

La distribuzione di carica è una distribuzione superficiale, per cui useremo la [II.29]. Il conduttore A ha potenziale uniforme V_A e il conduttore B ha potenziale uniforme V_B; per cui si ha:

$$U = \frac{1}{2}\int_S \sigma V dS = V_A \int_{S_A} \frac{\sigma\, dS}{2} + V_B \int_{S_B} \frac{\sigma\, dS}{2} =$$

$$= \frac{V_A Q + V_B(-Q)}{2} = \frac{Q(V_A - V_B)}{2} = \frac{\Delta V \cdot Q}{2}$$

A
V_A
+Q
C
−Q
V_B
B

Tenuto conto che $\frac{Q}{\Delta V} = C$, la precedente espressione assume le seguenti forme fra di loro equivalenti:

$$U = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \text{[II.30]}$$

Energia elettrostatica di un condensatore carico

Osserviamo che in questo caso l'energia elettrostatica del sistema poteva essere ottenuta facilmente anche ricorrendo direttamente alla definizione, cioè calcolando il lavoro necessario per caricarlo ed osservando che l'operazione di carica può essere pensata come una sequenza di spostamenti di cariche dq da un'armatura all'altra. Se a un certo momento la differenza di potenziale fra le due armature vale v, il lavoro necessario per spostare una carica elementare dq dalla armatura negativa a quella positiva è $dL = \mathrm{v}\,dq$; per cui il lavoro necessario per caricare il condensatore da $\mathrm{v} = 0$ a $\mathrm{v} = \Delta V$ è

$$U = \int_0^{\Delta V} \mathrm{v}\, dq = \int_0^{Q} \frac{q\, dq}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

avendo tenuto conto del fatto che fra il potenziale v esistente a un certo momento fra le armature e la carica q presente in quel momento sulle armature stesse sussiste la relazione $\frac{q}{\mathrm{v}} = C$.

E.II.14. *Calcolare l'energia elettrostatica di una sfera conduttrice di raggio R dotata di carica Q.*

Sulla sfera la densità σ vale $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ ed il potenziale ([I.27]) vale $V = Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$. La [II.29] si scrive allora:

$$U = \frac{1}{2}\int_S \sigma V dS = \frac{1}{2} V \int_S \sigma\, dS = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \text{[II.31]}$$

È da osservare che l'energia elettrostatica totale così ottenuta è indipendente dal segno di Q ed è positiva: cambiando il segno di Q, cambia anche il segno di V. Se il raggio R della sfera si fa tendere a zero, si ottiene un'energia elettrostatica che diverge (autoenergia).

Se consideriamo una sferetta carica positivamente ed una sferetta carica negativamente, fino a che esse si trovano molto lontane l'una dall'altra, la loro energia elettrostatica totale è data dal doppio della [II.31] ed è positiva. Se le sferette vengono avvicinate, l'energia elettrostatica risulta quella precedente diminuita del termine di interazione [II.26]. Tale termine è negativo perché la forza esterna, che deve opporsi ad una forza attrattiva tra le cariche, compie un lavoro negativo nella fase di avvicinamento delle cariche stesse. Il valore dell'energia elettrostatica totale risulta, in ogni caso, globalmente positivo.

L'*energia elettrostatica* è stata calcolata facendo uso, sostanzialmente, del concetto di azione a distanza tra cariche elettriche (forze coulombiane). È possibile descrivere le stesse proprietà meccaniche (forze ed energia) di sistemi elettricamente interagenti, *in termini di campo elettrostatico* $\vec{E}_o$. Tale approccio, coerente con l'attribuzione al campo elettrico di una propria realtà fisica, apparirà nel pieno del suo significato quando si avrà a che fare con fenomeni non statici.

L'espressione della energia elettrostatica in termini di campo elettrostatico può essere ricavata con relativa facilità a partire dalla [II.28].

Tenuto conto della equazione di Maxwell [I.36], la [II.28] può infatti essere scritta in termini del campo elettrostatico $\vec{E}_o$ e del potenziale V:

$$U = \frac{1}{2}\int_\tau \rho V \, d\tau = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_\tau (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o) \cdot V \, d\tau \qquad \text{[II.32]}$$

Ma ricordando la definizione dell'operatore $\vec{\nabla}$, si dimostra facilmente la seguente proprietà generale (che discende immediatamente dalla regola di derivazione del prodotto):

Proprietà generale dell'operatore nabla:
$\operatorname{div}(f\vec{v}) = f \operatorname{div}\vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$

$$\vec{\nabla} \cdot (V \cdot \vec{E}_o) = (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{E}_o + V(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o) = -E_o^2 + V(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o)$$

avendo ricordato che $\vec{\nabla} V = -\vec{E}_o$ (eq. [I.41]); da cui:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o) V = \vec{\nabla} \cdot (V\vec{E}_o) + E_o^2$$

Per cui l'equazione [II.32] diviene

$$U = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_\tau \vec{\nabla} \cdot (V\vec{E}_o) \, d\tau + \frac{\varepsilon_o}{2}\int_\tau E_o^2 \, d\tau \qquad \text{[II.33]}$$

D'altra parte, per il teorema della divergenza [I.32], si ha

$$\int_\tau \vec{\nabla} (V\vec{E}_o) \, d\tau = \int_S V\vec{E}_o \cdot d\vec{S}$$

e dunque la [II.33] può essere posta nella forma:

$$U = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_S V\vec{E}_o \cdot d\vec{S} + \frac{\varepsilon_o}{2}\int_\tau E_o^2 \, d\tau \qquad \text{[II.34]}$$

dove τ è un qualunque volume che comprende tutta la distribuzione di carica al suo interno, e S è la superficie che racchiude τ.

Fissata la distribuzione di carica, la sua energia elettrostatica totale U ha un valore ben definito; e dunque la somma dei due termini che compaiono al secondo membro della [II.34] ha valore determinato, indipendente dal volume τ scelto per eseguire il calcolo. Tuttavia il secondo termine, che è l'integrale di volume di una quantità definita positiva, all'aumentare del volume τ va aumentando, almeno fino a che τ non diviene così grande da contenere tutto lo spazio in cui il campo elettrostatico prodotto dalla distribuzione di carica sia apprezzabilmente diverso da zero. Di pari passo, va diminuendo il valore del primo termine. Se il volume di integrazione diviene così grande da contenere tutto lo spazio in cui il campo è

apprezzabilmente diverso da zero, allora si annulla il contributo dell'integrale di superficie e la [II.34] si riduce a:

$$U = \int_{\substack{\text{TUTTO}\\ \text{LO SPAZIO}}} \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\, d\tau = \int u\, d\tau \qquad \text{[II.35]}$$

dove con u abbiamo indicato la quantità

$$u = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \qquad \text{[II.36]}$$

Densità di energia elettrostatica:

$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

La [II.35] consente di interpretare l'energia elettrostatica di un sistema di cariche come una quantità dislocata nello spazio dovunque il campo elettrostatico è diverso da zero, e caratterizzata da una densità di energia (energia per unità di volume) rappresentata dalla [II.36].

L'interpretazione della [II.34] è allora la seguente: qualora l'integrale della densità di energia [II.36] venga eseguito su un volume τ più piccolo di quello contenente interamente il campo elettrostatico, per avere l'energia elettrostatica del sistema si deve tener conto del termine aggiuntivo esprimibile come integrale di superficie; e quest'ultimo è descritto dall'«integrale di flusso» che costituisce il primo termine al secondo membro della [II.34].

Energia del campo elettrostatico sempre positiva

Osserviamo che la [II.35] mostra chiaramente che l'energia elettrostatica totale, così come l'autoenergia delle singole componenti elementari, è una quantità definita positiva, laddove l'energia di interazione può essere positiva o negativa.

Esempi

E.II.15. *Esprimere, in un punto P (x, y, z) dello spazio, la densità di energia elettrostatica generata da un sistema di due cariche puntiformi q_1 e q_2 disposte nei punti (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) rispettivamente.*

Con i simboli di figura, i campi elettrici generati in P dalle cariche q_1 e q_2 sono, rispettivamente:

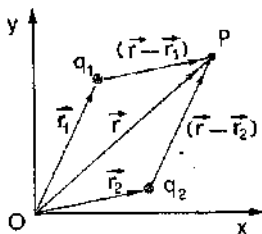
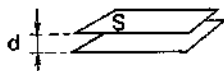
$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \quad \text{ed} \quad \vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}.$$

Il campo elettrico risultante nel punto P vale pertanto:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right]$$

e quindi la densità di energia elettrostatica assume il valore:

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{q_1^2}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^4}\right] + \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{q_2^2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^4}\right] + \\ + \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{2q_1q_2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3\,|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right]$$

I primi due termini della somma corrispondono ai contributi di autoenergia, mentre il terzo termine corrisponde all'energia elettrostatica di interazione.

E.II.16. *Usando la [II.35], calcolare l'energia elettrostatica di un condensatore piano dotato di carica Q. Verificare che il risultato ottenuto è coerente con quanto si ottiene usando la [II.28].*

Ricordiamo che il campo elettrostatico è nullo esternamente alle due armature, mentre internamente esso è uniforme e il suo modulo vale

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

Si ha pertanto

$$u = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$$

e dunque

$$U = \int_\tau u \, d\tau = \int_\tau \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} d\tau = \frac{Q^2 \tau}{2\varepsilon_0 S^2} = \frac{Q^2 S d}{2\varepsilon_0 S^2} = \frac{Q^2}{2} \frac{d}{\varepsilon_0 S}$$

Si è tenuto conto del fatto che il volume τ della intercapedine fra le armature vale $\tau = Sd$. Tenuto conto che la capacità C del condensatore vale $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, l'espressione ora ottenuta per U coincide con la [II.30], che era stata ottenuta a partire dalla [II.28].

In maniera analoga, può essere calcolata facilmente tramite la [II.35] l'energia elettrostatica contenuta nel campo generato da una sfera conduttrice carica: si ottiene un'espressione identica alla [II.31], che era stata calcolata a partire dalla [II.28].

II.5. Azioni meccaniche di natura elettrostatica nei conduttori

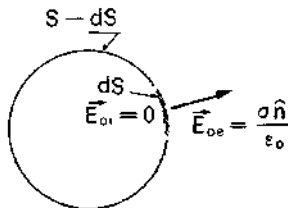
All'interno di un sistema di conduttori, caratterizzato da una determinata configurazione geometrica ed elettrostatica, si esercitano delle azioni meccaniche, determinate sia dalla interazione fra le cariche presenti su uno stesso conduttore che dalle interazioni fra cariche su conduttori diversi.

Pressione elettrostatica

Consideriamo un conduttore carico. Come abbiamo visto, le cariche in eccesso, libere di muoversi, in virtù della mutua repulsione fra cariche dello stesso segno si distribuiscono su un sottile strato superficiale del conduttore, di spessore dell'ordine dell'Å. La superficie esterna del conduttore costituisce, come vedremo meglio in seguito, un diaframma praticamente invalicabile per le cariche elettriche. È chiaro dunque che la forza di mutua repulsione fra le cariche libere all'interno del conduttore carico, una volta che queste siano giunte in superficie, si traduce in una *pressione elettrostatica* che agisce verso l'esterno della superficie stessa.

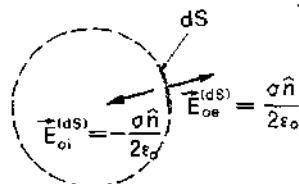
Per il calcolo di questa pressione elettrostatica, cioè della forza per unità di superficie che agisce normalmente alla superficie stessa, si può procedere in due modi: attraverso un calcolo diretto, a partire dal campo elettrico locale; o attraverso un calcolo indiretto, ma più generale, basato su considerazioni energetiche (metodo dei lavori virtuali).

Per il calcolo diretto, immaginiamo di decomporre la superficie laterale S del conduttore in un elemento dS e nella porzione restante $S - dS$. Il campo elettrico $\vec{E}_0$ in vicinanza del conduttore può essere decomposto nella somma di due contributi: quello prodotto da dS (che indicheremo con $\vec{E}_0^{(dS)}$ e quello prodotto da $S - dS$ (che indicheremo con $\vec{E}_0^{(S-dS)}$):

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_0^{(dS)} + \vec{E}_0^{(S-dS)}$$

da cui:

$$\vec{E}_o^{(S-dS)} = \vec{E}_o - \vec{E}_o^{(dS)} \qquad [II.37]$$

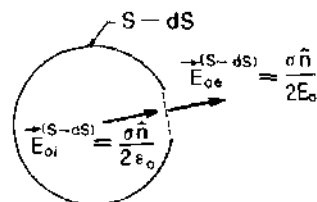
Il campo elettrico $\vec{E}_o$ vale (vedi eq. [II.5]):

$$\vec{E}_{oe} = \frac{\sigma\hat{n}}{\varepsilon_o} \text{ (esternamente)} \quad \vec{E}_{oi} = 0 \text{ (internamente)} \qquad [II.38]$$

dove $\hat{n}$ è il versore della normale *uscente* da S.

Il campo elettrico $\vec{E}_o^{(dS)}$ prodotto da dS molto vicino a dS stesso può essere calcolato come il campo generato da uno strato piano con densità di carica σ; esso vale pertanto (vedi eq. [I.19]):

$$\vec{E}_{oe}^{(dS)} = \frac{\sigma\hat{n}}{2\varepsilon_o} \text{(esternamente)} \quad \vec{E}_{oi}^{(dS)} = -\frac{\sigma\hat{n}}{2\varepsilon_o} \text{ (internamente)} \qquad [II.39]$$

Introducendo la [II.38] e la [II.39] nella [II.37] possiamo calcolare $\vec{E}_o^{(S-dS)}$; si ottiene:

$$\vec{E}_o^{(S-dS)} = \vec{E}_o - \vec{E}_o^{(dS)} = \frac{\sigma\hat{n}}{2\varepsilon_o} \qquad [II.40]$$

sia internamente che esternamente alla superficie S, e dunque anche su S stessa. La forza elettrostatica sulla superficie dS è la forza $\vec{F}^{(dS)}$ che si esercita su una carica $dq = \sigma\, dS$ ad opera del campo $\vec{E}_o^{(S-dS)}$; si ha pertanto:

$$\vec{F}^{(dS)} = \sigma\, dS \cdot \frac{\sigma\hat{n}}{2\varepsilon_o} = \frac{\sigma^2\hat{n}\, dS}{2\varepsilon_o} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o}\, d\vec{S}$$

Poiché la pressione p che si esercita verso l'esterno è definita come quella quantità tale che $p\, d\vec{S} = \vec{F}^{(dS)}$, per confronto segue

$$\boxed{p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o}} \qquad [II.41]$$

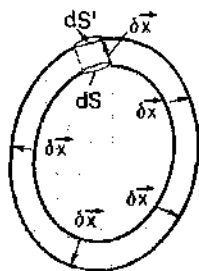
Espressione della pressione elettrostatica sulla superficie di un conduttore carico

Usando la [II.38], la pressione p può essere espressa anche in funzione del campo elettrico $\vec{E}_o$ presente in vicinanza della superficie del conduttore; si ha:

$$p(x, y, z) = \frac{\varepsilon_o E_o^2(x, y, z)}{2} = u(x, y, z) \qquad [II.42]$$

dove $u(x, y, z)$ è la densità di energia elettrostatica [II.36] in vicinanza della superficie: *in un punto A della superficie del conduttore, di coordinate x, y, z, la pressione elettrostatica è pari al valore assunto dalle densità di energia del campo elettrostatico in vicinanza di A* (esternamente alla superficie *A*).

In realtà la [II.42] costituisce una relazione del tutto generale, valida anche quando si hanno più conduttori, e serve come punto di partenza per il calcolo di ogni sorta di sollecitazione meccanica; ciò può essere facilmente mostrato usando l'altro metodo che abbiamo citato (*metodo dei lavori virtuali*) che qui introduciamo in considerazione proprio della sua generalità di impiego.

Metodo dei lavori virtuali

Consideriamo un conduttore C, intorno al quale sia presente un campo elettrostatico $\vec{E}_0$ generato da una distribuzione di cariche presenti sul conduttore stesso e/o nello spazio circostante; internamente al conduttore il campo è invece, come sempre, nullo. Immaginiamo di modificare, per una quantità infinitesima, la configurazione geometrica del conduttore. Ad esempio dilatiamone il volume espandendo verso l'esterno di un tratto $\delta\vec{x}$ (spostamento virtuale) ogni elemento dS della sua superficie ortogonalmente a dS stesso. Per far ciò, è necessario applicare su ogni elemento dS una forza esterna $\delta\vec{F}^{(e)}$ la quale compirà un lavoro (lavoro virtuale):

$$\delta L^{(e)} = \delta\vec{F}^{(e)} \cdot \delta\vec{x}$$

Per definizione di energia elettrostatica U, tale lavoro è legato da una relazione di uguaglianza alla variazione di energia elettrostatica corrispondente allo spostamento $dS \rightarrow dS'$

$$\delta\vec{F}^{(e)} \cdot \delta\vec{x} = \delta L^{(e)} = \delta U\,; \quad \text{da cui} \quad \delta F_x^{(e)} = \frac{\delta U}{\delta x}$$

D'altra parte, la forza $\delta\vec{F}^{(e)}$ deve essere uguale e opposta alla forza elettrostatica $\delta\vec{F}$ cui l'elemento di superficie dS è sottoposto; per cui:

$$\delta F_x = -\frac{\delta U}{\delta x} \qquad [II.43]$$

Nel caso specifico, con lo spostamento $dS \rightarrow dS'$, l'elemento di volume $dS\,\delta x$ aveva, prima dello spostamento, energia pari a $\delta U_i = u\,dS\,\delta x$, dove $u = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ è la densità di energia elettrostatica nello spazio circostante il conduttore; mentre dopo lo spostamento virtuale esso ha energia $\delta U_f = 0$ (l'elemento di volume viene inglobato internamente al conduttore, dove è $\vec{E} = 0$). Pertanto $\delta U = \delta U_f - \delta U_i = -u\,dS\,\delta x$. Per cui $\frac{\delta U}{\delta x} = -u\,dS$; si ha dunque:

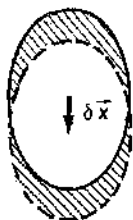
$$\delta F_x = -\frac{\delta U}{\delta x} = u\,dS$$

e dividendo per dS si ottiene il valore della pressione elettrostatica

$$p = \frac{\delta F_x}{dS} = u$$

coerentemente con la [II.42].

Questo stesso metodo dei lavori virtuali può essere usato per calcolare qualunque altra sollecitazione meccanica agente sul conduttore. Ad esempio, se il conduttore viene spostato rigidamente, parallelamente a se stesso (pura traslazione), di un tratto $\delta\vec{x}$, la corrispondente variazione δU di energia elettrostatica è direttamente legata al lavoro compiuto dal risultante $\vec{R}$ delle forze elettrostatiche; e dunque:

$$-R_x\,\delta x = \delta U \Rightarrow R_x = -\frac{\delta U}{\delta x} \qquad [II.44]$$

D'altro canto la variazione di energia δU si calcola facilmente (noto il campo circostante il conduttore) come differenza delle energie elettrostatiche contenute nelle due zone tratteggiate nella figura. È chiaro che, qualora, in particolare, il campo esterno sia uniforme, è $\delta U = 0$.

Analogamente, il momento risultante delle forze agenti può essere calcolato valutando la variazione di energia elettrostatica corrispondente a una rotazione virtuale $\delta\theta$ del sistema.

Risultante e momento risultante delle forze agenti su un conduttore rigido

Esempio

E.II.17. *Calcolare la forza elettrostatica con cui si attraggono le armature di un condensatore piano dotato di carica Q.*

Siamo interessati al calcolo della componente R_x delle forze elettrostatiche lungo l'asse x; questo può essere fatto usando la [II.44]. La variazione δU di energia corrispondente allo spostamento virtuale $\delta\bar{x}$ è pari a:

$$\delta U = (u_f - u_i)\, S\, \delta x$$

dove S è la superficie delle armature; u_f è la densità di energia elettrostatica presente nella zona tratteggiata dopo lo spostamento $\delta\bar{x}$, e u_i è la densità di energia che in tale zona era presente prima dello spostamento.

Poiché esternamente alle armature è $E_o = 0$, mentre internamente è $E_o = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$, si ha $u_i = 0$ e $u_f = \dfrac{\varepsilon_o E_o^2}{2} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_o} = \dfrac{Q^2}{S^2\, 2\varepsilon_o}$; dunque:

$$\delta U = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2} S\, \delta x = \frac{\sigma^2 S\, \delta x}{2\varepsilon_o} = \frac{Q^2}{S} \frac{\delta x}{2\varepsilon_o}$$

Forza di attrazione fra le armature di un condensatore piano

La [II.44] diviene pertanto:

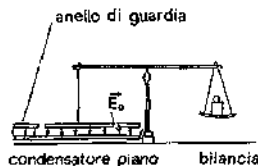
$$R_x = -\frac{\delta U}{\delta x} = -\frac{\varepsilon_o E_o^2 S}{2} = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_o} = -\frac{Q^2}{S}\frac{1}{2\varepsilon_o} \qquad \text{[II.45]}$$

La [II.45] fornisce tre espressioni fra di loro equivalenti per la forza che si esercita fra le armature del condensatore. Osserviamo che essendo R_x negativo, si tratta di una forza attrattiva.

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto derivando rispetto alla distanza x fra le armature, a Q costante, l'energia elettrostatica $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$ del condensatore $\left(C = \dfrac{\varepsilon_o S}{x}\right)$:

$$R_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2}\frac{x}{S\varepsilon_o}\right) = -\frac{Q^2}{2S\varepsilon_o}$$

Essendo Q costante, il sistema è isolato e la variazione di U rappresenta effettivamente la variazione dell'energia potenziale dell'intero sistema. Al contrario, non sarebbe corretto derivare l'energia del condensatore supponendo che sia costante la sua differenza di potenziale ΔV (cioè derivare rispetto a x l'espressione $U = \dfrac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_o S}{x} (\Delta V)^2$).

Voltmetro elettrostatico di Lord Kelvin

Infatti per mantenere ΔV costante variando x è necessario mantenere il sistema a contatto con un generatore di differenza di potenziale costante: poiché in questo caso il condensatore non è isolato, la variazione di energia del sistema non è solo quella relativa al condensatore, *ma sarebbe necessario considerare* anche l'energia del generatore.

Secondo la [II.45], la misura di R_x consente di misurare E_0, e dunque anche il potenziale $\Delta V = x E_0$. Questa considerazione sta alla base del voltmetro di Lord Kelvin, in cui la misura di R_x viene effettuata mediante una bilancia. L'anello di guardia consente di liberare da effetti di bordo la parte del condensatore interessata alla misura.

II.6. Il problema generale dell'elettrostatica nel vuoto

Consideriamo una certa distribuzione di carica fissa (localizzata) nello spazio vuoto; distribuzione descritta dalla funzione densità di carica $\rho(x, y, z)$. Se la funzione $\rho(x, y, z)$ è nota, la configurazione $\vec{E}_0(x, y, z)$ assunta nello spazio circostante dal campo elettrostatico può essere calcolata, come abbiamo visto nel capitolo I, per semplice quadratura a partire dalla legge di Coulomb; cioè usando la relazione vettoriale [I.11]

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}')\, dx'\, dy'\, dz' \qquad [I.11]$$

Il campo elettrostatico $\vec{E}_0$ così ricavato soddisfa le equazioni

$$\operatorname{div} \vec{E}_0 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad [I.36]$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_0 \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0 \qquad [I.83]$$

La prima di queste equazioni (prima equazione di Maxwell) esprime in forma locale il teorema di Gauss; la seconda (terza equazione di Maxwell nel caso stazionario) esprime in forma locale la conservatività del campo elettrostatico. Quest'ultima proprietà implica l'esistenza della funzione potenziale V_0 legata a $\vec{E}_0$ dalla relazione

$$-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, V_0 \equiv -\vec{\nabla} V_0 = \vec{E}_0 \qquad [I.41]$$

Nel caso in esame, cioè nota la distribuzione di carica $\rho(x, y, z)$, la funzione potenziale può essere calcolata tramite la relazione scalare [I.44]

$$V_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dx'\, dy'\, dz' \qquad [I.44]$$

Trattandosi di una relazione scalare, la [I.44] è più semplice da calcolare rispetto alla [I.11]. Per risolvere il problema dell'elettrostatica in questo caso, cioè per calcolare il campo elettrico $\vec{E}_0$ a partire dalla densità di carica ρ, la procedura conveniente è pertanto, di norma, quella di calcolare il potenziale V_0 tramite la [I.44]; e da V_0 ricavare $\vec{E}_0$ tramite la [I.41].

Tenuto conto della [I.36], e della relazione [I.41], il potenziale V_0 soddisfa la relazione $\operatorname{div}\operatorname{grad} V_0 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V_0 \equiv \nabla^2 V_0 = -\rho/\varepsilon_0$:

Equazione di Poisson

$$\nabla^2 V_0 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad [II.46]$$

L'operatore *nabla quadro*

Operatore laplaciano in coordinate cartesiane

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad [II.47]$$

è detto *laplaciano*; e la [II.46] è detta *equazione di Poisson*

L'equazione [II.46] equivale non alla sola equazione [I.36], ma anche alla [I.83]: infatti ogni campo irrotazionale (conservativo) ammette potenziale; e viceversa il fatto che $\vec{E}_0$ sia espresso come gradiente di V_0 (eq. [I.41]), rende identicamente soddisfatta la [I.83] (vedi eq. [I.80]).

In realtà la [II.46] caratterizza completamente il potenziale V_0. In altri termini, non solo il potenziale V_0 [I.44], corrispondente alla distribuzione di carica $\rho(x, y, z)$ assegnata, soddisfa la [II.46]; ma un potenziale V_0 che soddisfi la [II.46] con la condizione di annullarsi all'infinito ($\lim_{r \to \infty} V_0(\vec{r}) = 0$) coincide necessariamente col potenziale [I.44]. Ciò è conseguenza di un importante teorema di matematica (*teorema di unicità della soluzione dell'equazione di Poisson*): *fissata la funzione ρ localizzata in una porzione finita di spazio, la [II.46] ammette una sola soluzione che soddisfi specificate condizioni al contorno del dominio di definizione.*

Teorema di unicità

Per chi sia interessato, il teorema di unicità viene dimostrato nel prossimo paragrafo, nel quale discutiamo brevemente alcune proprietà matematiche generali della funzione potenziale elettrostatico.

L'interesse della unicità della soluzione della equazione [II.46] si manifesta non tanto nel caso fin qui esaminato (distribuzione di carica $\rho(x, y, z)$ fissa e nota nello spazio) quanto piuttosto nel caso in cui nella porzione di spazio considerato siano presenti dei conduttori. Mentre infatti nel primo caso (assenza di conduttori) la soluzione del problema dell'elettrostatica è esplicitamente fornita dalla [I.44], nel secondo caso (presenza di conduttori) la [I.44] non è di alcuna utilità perché la configurazione assunta dalle cariche sulla superficie dei conduttori non è nota, e la sua determinazione rappresenta anzi uno degli obiettivi del problema.

In effetti con *problema generale dell'elettrostatica* si intende il problema di determinare il potenziale risolvendo l'equazione [II.46] con appropriate condizioni al contorno. Le situazioni che più frequentemente si presentano nella pratica appartengono alle seguenti categorie:

a) *Non sono presenti cariche localizzate. Il campo elettrostatico è generato da un sistema di conduttori S_i $(i = 1 \dots N)$ di geometria nota dei quali sono noti i potenziali V_i $(i = 1 \dots N)$* (Problema di Dirichlet).

Problema di Dirichlet, noti i potenziali dei conduttori

La [II.46] si riduce in questo caso all'equazione

$$\nabla^2 V_0 = 0 \qquad [II.48]$$

Equazione di Laplace

detta *equazione di Laplace*. Poiché le condizioni al contorno sono note ($V_0 = 0$ all'infinito; $V_0 = V_i$ sulle superfici dei vari conduttori) il problema è perfettamente definito dal punto di vista matematico. La [II.48] può essere univocamente risolta (a parte le difficoltà matematiche che ciò possa comportare), e si ottiene così il valore del potenziale $V_0(x, y, z)$ in tutto lo spazio circostante i conduttori.

Una volta noto il potenziale, può essere calcolato il campo elettrostatico in tutto lo spazio mediante la [I.41]. Il valore che il campo elettrico assume in vicinanza dei conduttori consente, in particolare, di calcolare le funzioni $\sigma_i(x, y, z)$ $(i = 1 \dots N)$ che descrivono la densità di carica superficiale sui conduttori stessi usando il teorema di Coulomb (eq. [II.5]).

b) *Non sono presenti cariche localizzate. Il campo elettrostatico è generato da un sistema di conduttori S_i $(i = 1 \ldots N)$ di geometria nota, dei quali sono note le cariche Q_i $(i = 1 \ldots N)$.*

In base alla conoscenza della geometria del sistema di conduttori, può essere determinata la matrice dei coefficienti di potenziale $\|P\|$. A questo punto, mediante la [II.10] possono essere calcolati i potenziali $V_i (i = 1 \ldots N)$ dei conduttori. Ci si riconduce così al problema di Dirichlet.

c) *Sono presenti cariche localizzate in certe regioni dello spazio, descritte da una distribuzione con densità ρ nota. È inoltre presente un sistema di conduttori S_i $(i = 1 \ldots N)$, per i quali sono note le cariche Q_i $(i = 1 \ldots N)$.*

Il problema è descritto dall'equazione di Poisson [II.46]; note le condizioni al contorno (noti cioè i potenziali V_i, $i = 1 \ldots n$) tale equazione ammette, come sappiamo, soluzione univoca. Tuttavia nel caso in esame i potenziali V_i non sono noti: essi dipendono infatti non solo dalle cariche Q_i, ma anche dalla densità di carica ρ. Per conseguenza del principio di sovrapposizione, al posto della [II.10] avremo ora un sistema di equazioni del tipo:

$$V_i = V_i(\rho) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j \qquad (i = 1 \ldots n) \qquad \text{[II.49]}$$

Della [II.49] sono noti (dalla geometria del sistema) i coefficienti p_{ij} della matrice di potenziale $\|P\|$; non sono noti invece i potenziali parziali $V_i(\rho)$ determinati dalla distribuzione ρ. Per determinare i $V_i(\rho)$, possiamo assegnare condizioni al contorno «di prova» $V_i^{(0)}$ $(i = 1 \ldots N)$ ai vari conduttori. In corrispondenza di questi potenziali di prova si risolve l'equazione di Poisson; una volta determinata la funzione potenziale $V^{(0)}(x, y, z)$ che risolve l'equazione si calcolano, mediante il procedimento descritto nel caso a), le densità di carica $\sigma_i^{(0)}$ e le cariche $Q_i^{(0)}$ che i conduttori avrebbero in corrispondenza dei potenziali $V_i^{(0)}$ come condizioni al contorno.

In corrispondenza dei potenziali $V_i^{(0)}$, le [II.49] si scrivono allora:

$$V_i^{(0)} = V_i(\rho) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j^{(0)} \qquad \text{[II.50]}$$

Di queste equazioni, conosciamo ora i primi membri $V_i^{(0)}$ (assegnati per prova); conosciamo i coefficienti p_{ij} (dalla geometria); e conosciamo le $Q_j^{(0)}$ (dalla soluzione dell'equazione [II.46]): possiamo dunque usare tali equazioni per determinare una volta per tutte i $V_i(\rho)$.

Una volta noti i $V_i(\rho)$, la [II.49] stessa consente di calcolare i potenziali V_i corrispondenti alle cariche Q_i effettivamente possedute dai conduttori. Note così le condizioni al contorno, si risolve l'equazione di Poisson.

Come si vede, si tratta di una procedura laboriosa, ma concettualmente ben definita.

II.7. Alcune proprietà matematiche della equazione di Poisson e delle funzioni armoniche

Teorema di unicità

Teorema di unicità. Consideriamo una regione di spazio finita τ delimitata dalla superficie *S*. Sia $\rho(x, y, z)$ una funzione definita in τ e ivi integrabile. Considerata l'equazione $\nabla^2 f = \rho$ ed imposto che la funzione f debba avere valore f_S su *S*, l'equazione stessa ammette soluzione unica.

Eseguiamo la dimostrazione per assurdo. Ammettiamo che esistano due soluzioni f_1 ed f_2, e poniamo $f = f_1 - f_2$. Si ha per ipotesi

$$\nabla^2 f_1 = \rho \qquad \text{con} \quad f_1 = f_S \ \text{su} \ S$$
$$\nabla^2 f_2 = \rho \qquad \text{con} \quad f_2 = f_S \ \text{su} \ S$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$\nabla^2 (f_1 - f_2) \equiv \nabla^2 f = 0 \qquad f \equiv f_1 - f_2 = 0 \ \text{su} \ S$$

Dunque f soddisfa l'equazione di Laplace con la condizione al contorno $f = 0$ su S: dimostriamo che una funzione che goda di queste proprietà è identicamente nulla.

Consideriamo la quantità $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} f)$ ed eseguiamo l'integrale su τ applicando il teorema della divergenza; si ha

$$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} f)\, d\tau = \int_S f \vec{\nabla} f \cdot d\vec{S}$$

L'integrale a destra è nullo, perchè è $f = 0$ su S. D'altra parte l'integrale a sinistra può essere così sviluppato:

$$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} f)\, d\tau = \int_\tau f \nabla^2 f\, d\tau + \int_\tau (\vec{\nabla} f)^2\, d\tau = 0 \qquad \text{[II.51]}$$

Essendo $\nabla^2 f = 0$, la precedente relazione si riduce a:

$$\int_\tau (\vec{\nabla} f)^2\, d\tau = 0$$

La funzione integranda è una funzione continua positiva o nulla a integrale nullo; deve essere pertanto $\vec{\nabla} f = 0$, da cui segue $f =$ costante. Ma essendo $f = 0$ sul contorno S, deve essere $f = 0$ su tutto τ; e ciò è quanto volevamo dimostrare.

È possibile mostrare – ma non lo faremo – che il teorema di unicità vale anche qualora la superficie S vada all'infinito; in questo caso va precisato comunque che la densità di carica ρ deve interessare una porzione finita del volume contenuto in S; e vanno inoltre introdotte le cosiddette *condizioni normali all'infinito*

Condizioni normali all'infinito

$$\lim_{r \to \infty} r f(r) = c_1$$
$$\lim_{r \to \infty} r^2 \frac{df}{dr} = c_2 \qquad \text{[II.52]}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie e r rappresenta la distanza dall'origine. Fisicamente, le [II.52] implicano che il potenziale e il campo elettrico si annullino all'infinito rispettivamente come $\dfrac{1}{r}$ e come $\dfrac{1}{r^2}$.

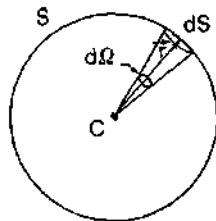
Funzioni armoniche. Nella regione di spazio τ una funzione $f(x, y, z)$ è armonica se essa è finita in τ, se ammette derivate seconde e se soddisfa l'equazione di Laplace [II.48].

Funzioni armoniche

Le funzioni armoniche godono di molte proprietà notevoli, fra cui è di particolare interesse per noi la proprietà nota col nome di *teorema della media: il valor medio che una funzione armonica assume su una superficie sferica qualunque, è pari al valore che la funzione assume al centro della sfera.*

Teorema della media

La dimostrazione del teorema è semplice. Sia f la funzione armonica, il suo valor medio $\bar{f}(r)$ sulla sfera di raggio r e centro in C è dato da

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S f\, dS = \frac{1}{4\pi} \int_S f \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \int_S f\, d\Omega \qquad \text{[II.53]}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che fra l'elemento dS di superficie sferica e l'angolo solido $d\Omega$ sussiste la relazione $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$; mentre nel penultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che sulla sfera S è $r =$ costante.

Deriviamo la [II.53] rispetto a r; si ha:

$$\frac{d\bar{f}}{dr} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{df}{dr}\,d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2}\int_S \frac{df}{dr}\,r^2\,d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2}\int_S \frac{df}{dr}\,dS = \frac{1}{4\pi r^2}\int_S \vec{\nabla} f\cdot d\vec{S} \qquad \text{[II.54]}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che la proiezione del gradiente nella direzione $\hat{r}$ è pari alla derivata direzionale secondo $\hat{r}$ (vedi eq. [I.51]); è dunque

$$\vec{\nabla} f\cdot d\vec{S} = \vec{\nabla} f\cdot \hat{r}\,dS = \frac{df}{dr}\,dS\,.$$

Applichiamo ora alla [II.54] il teorema della divergenza; si ha:

$$\frac{d\bar{f}}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2}\int_S \vec{\nabla} f\cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi r^2}\int_\tau \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f)\,d\tau = \frac{1}{4\pi r^2}\int_\tau \nabla^2 f\,d\tau = 0 \qquad \text{[II.55]}$$

dove τ è il volume contenuto in S.

L'ultimo passaggio segue dal fatto che la funzione armonica f soddisfa, per definizione, all'equazione di Laplace $\nabla^2 f = 0$.

Dunque essendo $\frac{d\bar{f}}{dr} = 0$, il valor medio $\bar{f}$ è indipendente dal raggio r della sfera sulla quale la media stessa è eseguita; esso è pari, in particolare, al valore che $\bar{f}(r)$ assume al limite per $r \to 0$, cioè al valore che $f(r)$ assume in C. Ciò dimostra il teorema.

Per conseguenza del teorema della media, si ha che il potenziale elettrostatico non ammette, nello spazio che separa le cariche sorgenti, né massimi né minimi: infatti, centrando una sfera intorno a un eventuale punto di massimo o di minimo, la media sulla sfera non potrebbe essere pari al valore nel centro. Per conseguenza, una carica isolata nel vuoto non può rimanere in equilibrio per effetto del solo campo elettrostatico: ricordiamo infatti che i punti di equilibrio stabile sono i punti di minimo dell'energia potenziale e questi si presentano in corrispondenza di massimi o di minimi del potenziale elettrostatico.

Elettrodinamica quantistica

In effetti, la struttura stabile della materia per azione delle forze elettriche fra particelle subatomiche può realizzarsi solo in termini dinamici, con gli elettroni che orbitano intorno ai nuclei; peraltro la trattazione elettrodinamica a livello atomico richiede l'uso di strumenti teorici più generali rispetto a quelli della fisica classica (*elettrodinamica quantistica*).

Osserviamo infine che l'equazione di Laplace è una equazione lineare: ciò significa che se $f_1, f_2 \ldots f_n$ sono soluzioni dell'equazione, anche una combinazione lineare

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n \qquad \text{[II.56]}$$

(con $a_1, a_2 \ldots a_n$ costanti arbitrarie) è soluzione. Se sono note le soluzioni $f_1, f_2 \ldots f_n$, i coefficienti $a_1, a_2 \ldots a_n$ possono essere scelti per soddisfare, se possibile, le condizioni al contorno proprie del particolare problema con cui si abbia a che fare di volta in volta.

Esempi

E.II.18. *Una carica puntiforme Q posta nell'origine degli assi coordinati genera nello spazio il potenziale* $V_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$. *In punti diversi dall'origine, questo potenziale soddisfa l'equazione di Laplace?*

Espresso in coordinate cartesiane, il potenziale ha la forma:

$$V_o(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

Si ha dunque:

$$\frac{\partial V_o}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}]$$

$$\frac{\partial^2 V_o}{\partial x^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + x\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2x\right] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)$$

e analogamente per $\frac{\partial^2 V_o}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 V_o}{\partial z^2}$. Sommando:

$$\nabla^2 V_o = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\right] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} - \frac{3}{r^3}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3r^2}{r^5} - \frac{3}{r^3}\right] = 0$$

Osserviamo che il potenziale in oggetto è quello generato da una carica puntiforme disposta nell'origine; in punti diversi dall'origine, l'equazione generale dell'elettrostatica si riduce dunque a $\nabla^2 V_0 = 0$, ed è questa l'equazione che il potenziale in oggetto, come deve, soddisfa.

Funzione armonica fondamentale

La funzione $f(r) = \frac{1}{r}$ è detta funzione armonica fondamentale: naturalmente, l'equazione di Laplace è soddisfatta dalla equazione armonica fondamentale anche qualora quest'ultima, anziché attorno all'origine, sia centrata attorno a un punto fisso qualunque; cioè anche qualora sia

$$r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}.$$

E.II.19. *Verificare che il potenziale generato da un dipolo elettrico soddisfa, salvo che nei punti occupati dalle cariche, l'equazione di Laplace.*

La verifica è immediata: basta ricordare che il potenziale V_o generato dal dipolo è la somma dei potenziali, V_+ e V_-, generati dalle due cariche puntiformi $+Q$ e $-Q$: $V_o = V_+ + V_-$. Poiché sia V_+ che V_- sono funzioni armoniche (essi sono, più precisamente, proporzionali all'armonica fondamentale), anche V_o risulta armonico, in virtù della linearità dell'equazione di Laplace.

Ricordiamo anche che, lontano dal dipolo, il potenziale V_0 ha l'espressione

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

dove $\vec{p}$ è il momento del dipolo. Scegliendo l'asse z parallelo a $\vec{p}$ e l'origine al centro del dipolo, il potenziale V_0 assume in coordinate cartesiane l'espressione:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \left[z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right]$$

(vedi eq. [I.54]). La verifica che questo potenziale soddisfa l'equazione di Laplace può essere effettuata anche direttamente con procedura del tutto analoga a quella utilizzata nell'esempio E.II.18.

E.II.20. *Nel casi in cui il sistema abbia simmetria sferica, può essere conveniente risolvere il problema generale dell'elettrostatica in coordinate polari anziché in coordinate cartesiane. Forniamo l'espressione che assume in questo caso l'equazione di Laplace.*

Ricordiamo che le relazioni che legano fra di loro le coordinate cartesiane e le coordinate polari sono

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \qquad \text{[II.57]}$$

L'equazione di Laplace in coordinate polari

La trasformazione dell'equazione di Laplace da coordinate cartesiane a coordinate polari può essere fatta, a partire dalle [II.57], usando tecniche standard di analisi matematica. Il procedimento è laborioso, e non essendo particolarmente istruttivo non riteniamo sia utile presentarlo qui. Il risultato è:

$$\nabla^2 V_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad \text{[II.58]}$$

II.8. Soluzione del problema generale dell'elettrostatica in alcuni casi notevoli

II.8.1. Metodo delle cariche immagini

Metodo delle cariche immagini

Consideriamo un conduttore S collegato a terra, in modo che sia $V_S = 0$; e, in presenza di esso, una o più cariche puntiformi localizzate Q_i. Se la geometria del conduttore è semplice (ad esempio piana, o sferica, ...) allora il problema dell'elettrostatica può essere risolto in maniera semplice ed efficace mediante il metodo cosiddetto delle *cariche immagini*. Questo metodo consiste nell'immaginare che il conduttore sia sostituito con una o più cariche puntiformi Q_i' situate, rispetto al conduttore, dalla parte opposta rispetto alle Q_i; e disposte in modo che la somma dei potenziali generati dalle Q_i e dalle Q_i' sia *nullo* su S. L'insieme delle cariche Q_i e Q_i' genera allora in assenza del conduttore, nella porzione τ di spazio vuoto prospiciente ad S dalla parte delle Q_i, la stessa configurazione di potenziale generata

dalle Q_i e dalla distribuzione (incognita) delle cariche presenti per induzione su S. Ciò è conseguenza del teorema di unicità, considerato che sia il sistema $(Q_i + S)$ che il sistema $(Q_i + Q_i')$ hanno, nella porzione di spazio τ, la stessa distribuzione di carica (rappresentata dalle Q_i) e le stesse condizioni al contorno (rappresentate da $V = 0$ su S, e da $V \to 0$ all'infinito).

Il vantaggio del metodo delle cariche immagini consiste nel fatto che il potenziale generato dal sistema $(Q_i + Q_i')$ è facilmente calcolabile mediante la [I.43]; mentre il calcolo diretto del potenziale generato dal sistema $(Q_i + S)$ richiede la soluzione dell'equazione generale dell'elettrostatica.

Esempi

E.II.21. *Una carica puntiforme $+Q$ è posta in vicinanza di un conduttore piano molto esteso S, collegato a terra. Calcolare la densità di carica σ che si induce sul conduttore, utilizzando il metodo delle cariche immagini.*

Il problema può essere risolto attraverso i seguenti tre passi:

a) determiniamo, mediante il metodo delle cariche immagini, il potenziale V generato nel semispazio τ;

b) noto il potenziale calcoliamo, usando la [I.41], il campo elettrico presente in τ, e in particolare il valore che esso assume vicino ad S;

c) noto il campo elettrico, calcoliamo la densità di carica σ usando il teorema di Coulomb (eq. [II.5]).

a) È evidente che, in questo caso, il sistema Q' di cariche immagini che, insieme alla carica $+Q$, produce potenziale nullo su S, è costituito da una carica unica di valore $-Q$ disposta simmetricamente alla carica $+Q$ rispetto ad S. Infatti ogni punto di S è equidistante dalla carica $+Q$ e dalla sua immagine $-Q$; e dunque le due cariche producono in ogni punto di S potenziali uguali ed opposti, la cui somma si annulla.

Scegliendo un sistema di assi coordinati così come mostrato in figura, il potenziale generato dalle due cariche in un punto generico $P \equiv (x, y, z)$ dello spazio è dunque:

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}\right] \qquad \text{[II.59]}$$

In virtù del ragionamento proprio del metodo delle cariche immagini, nel semispazio τ questo rappresenta anche il potenziale generato dalla carica reale $+Q$ e dalla distribuzione di carica da questa indotta su S.

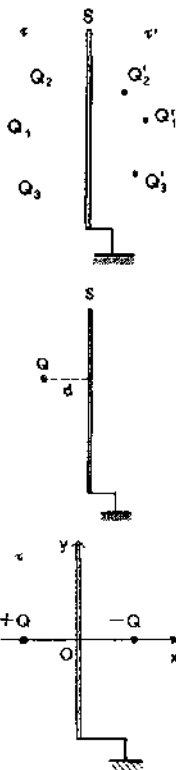
b) Ci interessa calcolare il campo elettrico in vicinanza di S. Tale campo è ortogonale ad S

$$\left(E_{oy} = -\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{x=0} = 0\ ; \quad E_{oz} = -\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{x=0} = 0\right)$$

Ci basta pertanto calcolare

$$E_{ox}(0, y, z) = -\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}$$

Tenuto conto della espressione [II.59] per il potenziale, la precedente relazione fornisce:

$$E_{ox}(0, y, z) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

c) La densità di carica $\sigma(y, z)$ è data da:

$$\sigma(y, z) = -\varepsilon_0 E_{0x} = -\frac{Q}{2\pi}\frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Il segno meno deriva dal fatto che, secondo il teorema di Coulomb, la densità di carica σ è pari alla proiezione di $\vec{E}_0$ sulla normale *uscente* dal conduttore, mentre nel nostro caso l'asse x è diretto, nel semispazio τ, come la normale *entrante*.

Integrando su tutta la superficie del conduttore si ottiene la carica totale $Q^{(i)}$ che Q induce su S:

$$Q^{(i)} = \int_S \sigma(y, z)\, dy\, dz = -\frac{Q}{2\pi}\int \frac{d \cdot dy\, dz}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$= -Q\, d \int_0^{\infty} \frac{2\pi r\, dr}{2\pi (d^2 + r^2)^{3/2}} = -Q$$

Per il calcolo dell'integrale, abbiamo effettuato la sostituzione $x^2 + y^2 = r^2$. La carica indotta è dunque $Q^{(i)} = -Q$, come era chiaro anche a priori considerato che ci troviamo in un caso di induzione completa.

E.II.22. *Calcolare il potenziale generato nello spazio vuoto da una carica puntiforme Q posta in vicinanza di una sfera conduttrice S collegata a terra (sia R il raggio della sfera e $a > R$ la distanza di Q dal centro C della sfera stessa).*

Sia Q' una ipotetica carica immagine posta sulla congiungente CQ a distanza b dal centro C ($b < R$). Vogliamo determinare – se esistono – i valori Q' e b che rendono nullo il potenziale in un punto generico P posto sulla superficie della sfera. Il potenziale $V(P)$ generato in P dalle cariche Q e Q' vale (usando le notazioni geometriche indicate in figura):

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{1/2}} + \frac{Q'}{(R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta)^{1/2}}\right]$$

Perché sia $V(P) = 0$ per ogni valore di θ occorre e basta che Q e Q' siano di segno opposto e risulti

$$Q^2 [R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta] = Q'^2 [R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta]$$

cioè

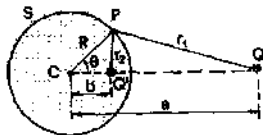
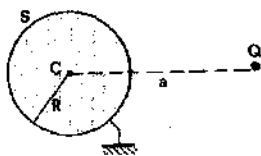
$$b\,Q^2 = a\,Q'^2, \qquad (R^2 + b^2)\,Q^2 = (R^2 + a^2)\,Q'^2$$

e quindi $a(R^2 + b^2) = b(R^2 + a^2)$, ovvero $[R^2 - ab](a - b) = 0$. A parte il caso ovvio $a = b$ con $Q' = -Q$, se $a \neq b$ deve essere $R^2 = ab$, e $Q' = -QR/a$.

Dunque il sistema $Q + S$ è equivalente al sistema $Q + Q'$, purché sia

$$Q' = -Q \cdot \frac{R}{a}$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$

Naturalmente, qualora la sfera conduttrice, anziché a potenziale nullo, fosse posta a potenziale $V_S \neq 0$ (ovvero fosse assegnata ad essa una carica nota Q_S) il problema potrebbe essere risolto utilizzando il principio di sovrapposizione a partire dalla soluzione testé trovata per il caso $V_S = 0$.

II.8.2. *Equazione di Laplace unidimensionale*

Supponiamo che la geometria del sistema sia costituita da un certo numero di piani omogeneamente carichi e fra di loro paralleli; se tali piani sono schematizzabili come infinitamente estesi, il potenziale può dipendere da una unica variabile, cioè dalla coordinata (sia essa x) ortogonale ai piani. In questo caso l'equazione di Laplace può essere risolta molto semplicemente. Si ha infatti $\frac{\partial V_0}{\partial y} = \frac{\partial V_0}{\partial z} = 0$, per cui la [II.48] si riduce a

Equazione di Laplace unidimensionale

$$\frac{d^2 V_0}{dx^2} = 0$$

Da questa segue $\frac{dV_0}{dx}$ = costante = a, e dunque

$$V_0(x) = ax + b \qquad \text{[II.60]}$$

Questa rappresenta la soluzione dell'equazione di Laplace unidimensionale. Le costanti a e b vanno determinate imponendo le condizioni al contorno.

Esempio

E.II.23. *Risolvere l'equazione di Laplace nel caso di un condensatore piano, per il quale i potenziali delle armature siano rispettivamente $V_0(0) = V_1$ e $V_0(d) = 0$.*

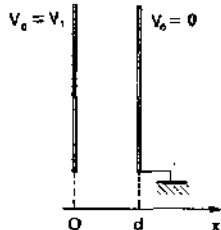
La soluzione è la [II.60], in cui le costanti a e b vanno determinate imponendo le condizioni $V_0(0) = V_1$ e $V_0(d) = 0$; cioè ponendo:

$$V_0(0) = b = V_1$$
$$V_0(d) = ad + b = 0$$

da cui segue $b = V_1$ e $a = -\frac{V_1}{d}$; e dunque

$$V_0(x) = V_1\left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

Va notato che anche esternamente al condensatore la soluzione deve essere data dalla [II.60]; in questo caso, imponendo che sia $V(\infty) = 0$, segue $a = 0$ e dunque $V_0(x)$ = costante = 0.

È bene osservare che la condizione $V_0(\infty) = 0$, che pure vale in questo specifico caso, non è di solito soddisfatta quando la distribuzione di carica si estende fino all'infinito. Ad esempio nel caso di uno strato piano semplice, la cui soluzione è ancora data dalla [II.60], il potenziale diverge all'infinito.

II.8.3. *Soluzione per separazione di variabili*

La soluzione dell'equazione di Laplace tridimensionale può essere ricavata per *separazione di variabili*: questo metodo consiste nello scrivere il potenziale incognito V_0 come prodotto di tre funzioni, ognuna delle quali dipendente da una sola delle variabili. Nel caso che il problema sia formulato in coordinate cartesiane, poniamo

Soluzione per separazione di variabili

$$V_0(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \qquad \text{[II.61]}$$

Sostituendo nella [II.48], questa diviene:

$$Y \cdot Z \frac{d^2X}{dx^2} + X \cdot Z \frac{d^2Y}{dy^2} + X \cdot Y \frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

e dividendo per $X \cdot Y \cdot Z$:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad [II.62]$$

Ognuno dei termini della [II.62] dipende da una variabile diversa; affinché la loro somma sia nulla indipendentemente dal valore assunto dalle variabili stesse, è dunque necessario che ognuno dei termini *sia costante*. Dalla [II.62] segue pertanto:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = K_1^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = K_2^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -K_3^2 \qquad [II.63]$$

in cui le costanti devono soddisfare la relazione

$$K_1^2 + K_2^2 = K_3^2$$

Le [II.63] rappresentano tre equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti del tipo:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - K_1^2 X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - K_2^2 Y = 0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + K_3^2 Z = 0$$

la cui soluzione, facilmente ricavabile mediante una metodologia *consolidata* (equazione algebrica associata) è data da

$$\begin{cases} X = A_1 \cos(K_1 x + B_1) \\ Y = A_2 \cos(K_2 y + B_2) \\ Z = A_3 \cosh\left(\sqrt{K_1^2 + K_2^2}\, z + B_3\right) \end{cases} \qquad [II.64]$$

con A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 costanti. Il valore effettivo da assegnare alle costanti dipende, ovviamente, dal tipo di condizioni al contorno che devono essere soddisfatte. Tuttavia una analisi, anche sommaria, delle diverse casistiche che possono presentarsi a seconda della scelta dei valori dei parametri imposta dai vari tipi di condizioni al contorno, ci porterebbe qui lontani dagli scopi del presente *volume*. Esistono peraltro al riguardo numerosi testi specializzati.

L'applicabilità del metodo di soluzione per separazione di variabili è subordinato al fatto che la decomposizione [II.61] del potenziale sia compatibile con le condizioni al contorno assegnate.

Esercizi del II capitolo

II.1. Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 5$ cm porta una carica $Q_1 = +10^{-6}$ C. Un guscio sferico (sfera cava), pure conduttore, concentrico alla sfera di raggio R_1, avente raggio interno $R_2 = 10$ cm e raggio esterno $R_3 = 12$ cm, è caricato con carica $Q_2 = 10\,Q_1$.
Calcolare, nell'ipotesi che il sistema sia nel vuoto:
a) la densità di carica superficiale σ_2 sulla superficie interna del guscio sferico esterno (di raggio R_2);
b) la d.d.p. $(V_1 - V_2)$ tra i due conduttori considerati.

(Risposte: a) $-5{,}53 \cdot 10^{-6}$ C/m^2; b) $9 \cdot 10^4$ V)

II.2. Nella situazione dell'esercizio precedente, se si pone uguale a zero il potenziale all'infinito ($V(\infty) = 0$), qual'è l'espressione del potenziale V_1 della sfera di raggio R_1?

$$\left(\text{Risposta: } V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2} + \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}\right)$$

II.3. Nel vuoto sono disposti due conduttori di capacità C_A e $C_B = 3\,C_A$ rispettivamente. I conduttori sono isolati ed il primo è carico con carica $Q_A^{IN} = 1\,\mu C$, mentre il secondo è inizialmente scarico.
Ad un certo istante i due conduttori vengono collegati tramite un filo metallico di capacità trascurabile. Successivamente tale collegamento viene interrotto. Calcolare le cariche che si ritrovano alla fine sui due conduttori.

(Risposta: $Q_A^{(FIN)} = 0{,}25\,\mu C$, $Q_B^{(FIN)} = 0{,}75\,\mu C$)

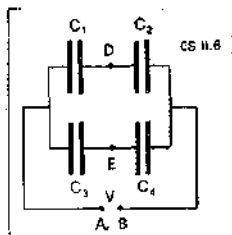
II.4. Nel vuoto, una sfera metallica di raggio a, scarica, è circondata da un guscio sferico pure conduttore, concentrico con la sfera, di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2.
Se al guscio sferico viene fornita la carica Q e se si assume nullo il potenziale all'infinito, qual'è l'espressione del potenziale della sfera scarica interna?

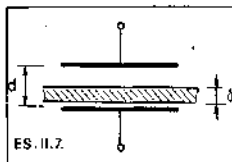
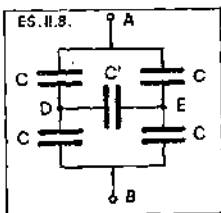
(Risposta: $V_{sfera} = Q/(4\pi\varepsilon_0 R_2)$)

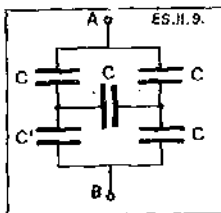
II.5. Due sferette metalliche, nel vuoto, hanno lo stesso raggio R, sono isolate ed entrambe sono cariche con la stessa carica Q positiva. La distanza D tra le due sferette è molto maggiore del raggio delle sferette stesse, essendo $D = 50\,R$. Tra le due sferette, nelle condizioni descritte, si esercita una forza repulsiva $F_1 = 10^{-5}$ N.
A partire da questa situazione iniziale, una delle due sferette viene collegata a terra ($V = 0$) mediante un sottile filo conduttore.
Calcolare modulo, direzione e verso della forza F_2 che si esercita tra le due sferette nella nuova situazione.

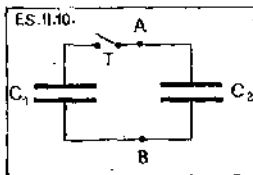
(Risposta: $F_2 = -2 \cdot 10^{-7}$ N, attrattiva)

II.6. Nel circuito mostrato in figura la d.d.p. tra i punti A e B è fissata ad un certo valore V. Quale relazione deve sussistere tra i valori delle capacità C_1, C_2, C_3 e C_4 perché si abbia $(V_D - V_E) = 0$ indipendentemente dal valore di V?

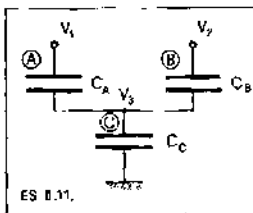
(Risposta: $C_1\,C_4 = C_2\,C_3$)

II.7. Un condensatore, di capacità C, ha armature piane e parallele distanti d, nel vuoto. Nello spazio tra le armature e parallelamente ad esse viene inserita una lastra di metallo di spessore $\delta = d/5$, come indicato in figura.
Qual'è la variazione percentuale di capacità?

$$\left(\text{Risposta: } \frac{\Delta C}{C} = 25\%\right)$$

II.8. Tra i punti A e B è sistemato l'insieme di condensatori mostrato in figura, in cui si hanno quattro condensatori uguali, di capacità C, ed uno di capacità C' tra i punti D ed E del circuito.
Calcolare la capacità complessiva tra i punti A e B.

(Risposta: $C_{AB} = C$)

II.9. È dato il sistema di condensatori rappresentato in figura. Essendo nota la capacità C dei quattro condensatori uguali del sistema ed essendo C' molto grande, calcolare la capacità C_{AB} tra i punti A e B.

(Risposta: $C_{AB} \cong \frac{5}{3} C$)

II.10. Nella situazione dell'esempio E.II.12, i due condensatori C_1 e C_2, all'inizio caricati separatamente in modo da avere d.d.p. $\Delta V_1^{(IN)}$ e $\Delta V_2^{(IN)}$ rispettivamente, una volta collegati tramite la chiusura dell'interruttore T arrivano, dopo una *fase transitoria* di movimento di cariche, ad una situazione di equilibrio in cui la d.d.p. tra i punti A e B vale

$$\Delta V^{(FIN)} = \frac{C_1 \Delta V_1^{(IN)} + C_2 \Delta V_2^{(IN)}}{C_1 + C_2}$$

Dimostrare che tale situazione di equilibrio corrisponde ad un minimo di energia elettrostatica del sistema.

II.11. Tre condensatori, di capacità $C_A = C$, $C_B = 2\,C$ e $C_C = 3\,C$ rispettivamente, sono disposti come in figura. L'elettrodo (A) del condensatore di capacità C_A è tenuto a potenziale fisso $V_1 = 10$ V, mentre l'elettrodo (B) del condensatore di capacità C_B è tenuto a potenziale fisso $V_2 = 40$ V.
Qual'è il potenziale V_3 dell'elettrodo (C) del condensatore di capacità C_C?

(Risposta: $V_3 = 15$ V)

II.12. Un condensatore *cilindrico* nel vuoto, le cui armature hanno raggi a e $b = 3\,a$ rispettivamente, è inizialmente caricato in modo da avere energia elettrostatica $U_{in} = 10^{-4}$ J. Tenendo il condensatore isolato, immaginare di dilatare l'armatura esterna in modo che il suo raggio cresca della quantità $\delta b = b/10$. Calcolare il corrispondente lavoro delle forze del campo elettrico.

(Risposta: $-8{,}67 \cdot 10^{-6}$ J)

II.13. Calcolare l'energia elettrostatica totale di una sfera di raggio R uniformemente carica con densità di volume di carica ρ e disposta nel vuoto.

$\left(\text{Risposta: } U = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}\right)$

II.14. Una carica puntiforme $q = 10^{-6}\,C$ è posta, in aria, a distanza D da un piano conduttore indefinito collegato a terra. Calcolare la carica indotta sul piano conduttore su un cerchio con centro sul piede O della perpendicolare condotta dalla carica q al piano e con diametro pari a D.

(Risposta: $Q = -1{,}06 \cdot 10^{-7}\,C$)

II.15. Un dipolo elettrico di momento $\vec{p}$ è disposto con la direzione orientata normalmente ad un piano conduttore, molto esteso, collegato a terra. La distanza tra il centro del dipolo ed il piano è D. Ricavare l'espressione della forza che si esercita sul dipolo.

$\left(\text{Risposta: } |\vec{F}| = \frac{3p^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1}{D^4}\right)$

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del II capitolo

II.1. a) Riferirsi agli esempi E.II.1 ed E.II.2
b) Procedere in modo analogo all'esempio E.II.7.

II.2. Calcolare la d.d.p. tra la sfera interna e l'infinito, tenendo conto dell'andamento del campo elettrico nelle varie regioni di spazio.

II.3. Tenere conto del fatto che la carica si conserva e che a contatto avvenuto, i conduttori sono e restano allo stesso potenziale.

II.4. Procedere in modo analogo all'esercizio II.2 e tenere conto dell'esempio E.II.3.

II.5. Determinare la carica della sferetta collegata a terra in base alla condizione che il suo potenziale sia nullo per effetto della sua stessa carica finale e della carica (inalterata) dell'altra sferetta.

II.6. Calcolare prima le d.d.p. tra D ed A e tra E ed A e successivamente ricavare $(V_D - V_E)$. Poi imporre la condizione $(V_D - V_E) = 0$ per ogni V.

II.7. Osservare che il sistema condensatore + lastra equivale a due condensatori in serie.

II.8. Determinare, sulla base di considerazioni di simmetria del sistema, la d.d.p. tra i punti D ed E e disegnare un sistema di condensatori equivalente al dato.

II.9. Una capacità C' molto alta, al limite infinita, significa che, quale che sia la carica su di essa depositata, la d.d.p. tra le sue armature è praticamente nulla. Questo equivale ad un corto circuito tra i punti D e B.

II.10. Dette ΔV_1 e ΔV_2 le generiche d.d.p. ai capi dei due condensatori, dopo la chiusura dell'interruttore, scrivere l'espressione dell'energia elettrostatica totale e mostrare che, con la condizione che la carica elettrica si conservi, il minimo di energia si ottiene per $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V^{(\mathrm{FIN})}$.

II.11. Considerare le cariche sui tre condensatori e tenere conto del fatto che il conduttore che include l'armatura (C) superiore di C_C e le inferiori di C_A e C_B, è globalmente scarico e subisce solo fenomeni di induzione elettrostatica.

II.12. Calcolare la variazione di energia elettrostatica relativa alla deformazione ipotizzata e collegarla al lavoro delle forze del campo elettrico.

II.13. Ricavare l'espressione della densità di energia $u = \varepsilon_0 E_0^2/2$ in funzione della distanza dal centro di simmetria del sistema e farne l'integrale di volume su tutto lo spazio. Scegliere opportunamente l'elemento di volume infinitesimo in modo da trarre vantaggio dalla situazione di simmetria sferica del problema (elementi di volume entro i quali il campo E_0, e quindi la densità di energia u, abbiano lo stesso valore). Per il valore di E_0 in funzione di r, vedere gli esempi E.I.7 ed E.I.8.

II.14. Applicare il metodo delle cariche immagine, calcolare il campo elettrico sulla superficie di separazione tra vuoto e conduttore e quindi ricavare, tramite il teorema di Gauss, la densità superficiale locale σ. In caso di difficoltà rivedere l'esempio E.II.21.

II.15. Applicare il metodo delle cariche immagine (vedi esempio E.II.21) e ricordare le [I.64] per la *forza* su un dipolo elettrico in campo esterno.

Capitolo terzo

Elettrostatica in presenza di dielettrici

Nel primo capitolo abbiamo analizzato il potenziale e il campo elettrostatico generati, nello spazio vuoto circostante, da cariche elettriche localizzate. Nel secondo capitolo abbiamo studiato il caso in cui siano presenti anche dei conduttori: ma abbiamo continuato a supporre che lo spazio circostante i conduttori e le cariche localizzate fosse spazio vuoto. Nella realtà, tale spazio, di norma, è riempito di materia più o meno densa, solida liquida o gassosa; per una descrizione adeguata della maggior parte dei fenomeni elettrostatici è dunque necessario abbandonare l'ipotesi che lo spazio sia vuoto. In questo capitolo studieremo l'effetto prodotto dalla presenza in tale spazio di *materiali isolanti* (o *dielettrici*) omogenei ed isotropi.

III.1. La costante dielettrica

Semplici osservazioni sperimentali

Cominciamo col riportare un comune fatto sperimentale. Consideriamo un condensatore: per semplicità, immaginiamo che si tratti di un condensatore piano nel vuoto. Dotando il condensatore di una certa carica Q ($+Q$ su una armatura; $-Q$ sull'altra) fra le due armature si stabilisce una differenza di potenziale ΔV_0 legata a Q dalla relazione (eq. [II.16]):

$$Q = C_0 \Delta V_0 \quad \text{ovvero} \quad C_0 \overset{def}{=} \frac{Q}{\Delta V_0} \qquad [II.16]$$

dove C_0, capacità del condensatore, ha nel caso di condensatore piano l'espressione (eq. [II.21]):

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad [II.21]$$

Nel caso di geometrie diverse da quella piana, la capacità ha una diversa espressione, ma è comunque proporzionale alla costante dielettrica del vuoto ε_0 (vedi par. II.2).

Abbiamo usato i simboli C_0 e ΔV_0 per ricordare che fra le armature vi è il vuoto.

Lasciando invariata la geometria del condensatore e la carica presente sulle armature, riempiamo ora uniformemente l'intercapedine compresa fra le armature stesse con un materiale isolante omogeneo ed isotropo, non dotato di alcuna carica: si osserva allora che fra le armature si stabilisce una differenza di potenziale $\Delta V < \Delta V_0$. Secondo la [II.16], ciò significa che in presenza del dielettrico la capacità C del condensatore è maggiore della capacità C_0 che esso aveva quando fra le armature vi era il vuoto. Sia $\varepsilon_r > 1$ il rapporto (adimensionale) fra C e C_0

$$C/C_0 = \varepsilon_r \qquad \text{[III.1]}$$

Costante dielettrica relativa

La costante ε_r definita dalla [III.1] è detta *costante dielettrica relativa* del dielettrico considerato. La [II.21] è allora sostituita dalla:

$$C = \varepsilon_r C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

La costante:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r > \varepsilon_0 \qquad \text{[III.2]}$$

Costante dielettrica

MATERIALE	ε_r
aria (1 atm.)	1,0006
olio per trasformatori	2,2
quarzo (SiO_2)	4,3
porcellana	6 ÷ 8
vetri	4 ÷ 7
acqua (liquida)	80
cera	2,3

è detta *costante dielettrica (assoluta)* del materiale in esame. Valori tipici della costante dielettrica relativa, per alcuni comuni materiali dielettrici, sono quelli riportati in tabella.

Riassumendo brevemente le semplici osservazioni sperimentali fin qui riportate, possiamo dire che l'effetto della presenza di un materiale isolante omogeneo che riempia completamente lo spazio interessato dal potenziale generato da un fissato sistema di cariche è quello di diminuire in ogni punto il valore del potenziale (e dunque anche del campo elettrico) per un fattore detto costante dielettrica relativa. Operativamente, la costante dielettrica può essere misurata riempiendo completamente di dielettrico l'interspazio compreso fra le armature di un condensatore, e misurando l'aumento di capacità che così facendo si produce.

In questo capitolo approfondiremo prima l'interpretazione microscopica della costante dielettrica, e vedremo poi come la presenza del dielettrico modifichi le equazioni fondamentali dell'elettrostatica e le condizioni al contorno rispetto al caso dello spazio vuoto.

Potremo poi così trattare l'effetto del dielettrico nel caso generale, e non solo nel caso che esso riempia completamente tutto lo spazio interessato dal potenziale.

III.2. Interpretazione microscopica

Interpretazione microscopica

La differenza di comportamento fra conduttori e isolanti che si manifesta a livello macroscopico è riconducibile a differenze di comportamento a livello microscopico, cioè alla scala atomica e molecolare. Una trattazione rigorosa a tale scala richiede strumenti teorici di cui qui non disponiamo, ed esce d'altra parte dagli scopi del presente testo; tuttavia, almeno a livello qualitativo, possiamo renderci conto di tale differenza di comportamento in base a semplici ragionamenti di tipo fenomenologico.

Il tipico conduttore è un metallo, caratterizzato da una struttura cristallina: ogni atomo si trova cioè ai vertici di un reticolo poliedrico (ad esempio cubico) di estensione spaziale molto grande rispetto alle dimensioni lineari («passo») di ogni singola cella del reticolo.

Nei conduttori la disposizione degli atomi nel reticolo, e quindi l'andamento spaziale del potenziale della forza che attrae gli elettroni ai nuclei, è tale che un certo numero di elettroni delle orbite esterne (tipicamente 1 o 2 per ciascun atomo), risulta sostanzialmente «libero». Ciò vuol dire che l'energia di legame di questi elettroni è abbastanza piccola da essere praticamente sempre inferiore all'energia di agitazione termica, già a temperatura ambiente.

Questi elettroni «liberi», come vedremo meglio in seguito, costituiscono una specie di gas all'interno del conduttore, in continua agitazione termica. L'applicazione di un campo elettrico esterno produce un movimento ordinato (corrente elettrica) di questi elettroni, detti di conduzione.

I dielettrici, invece, sono caratterizzati dall'avere atomi e molecole con tutti gli elettroni piuttosto fortemente legati ai rispettivi nuclei. Tali elettroni non sono pertanto liberi di muoversi per effetto di un campo elettrico che abbia intensità quale di solito si realizza nella pratica. Solo per intervento di forze localizzate molto intense (strofinio, scariche elettriche, ecc.) può capitare che alcuni elettroni vengano strappati dalla loro posizione, lasciando così una carica positiva localizzata nel luogo da cui sono stati strappati, e una carica negativa laddove sono stati introdotti a forza.

Qui noi siamo interessati a considerare dielettrici elettricamente neutri: l'effetto di una eventuale carica localizzata verrà infatti presa in considerazione a parte, e descritta con la relativa densità volumetrica di carica ρ.

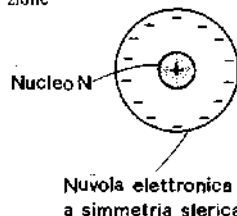
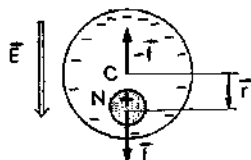
Essendo il dielettrico complessivamente neutro, e poiché noi siamo interessati al campo elettrico *macroscopico* (mediato cioè su regioni di spazio molto estese rispetto alle dimensioni atomiche), contrariamente alle osservazioni sperimentali riportate nel precedente paragrafo potremmo aspettarci a prima vista che il dielettrico non produca alcun effetto. In realtà, pur essendo elettricamente neutro, il dielettrico produce un campo elettrico macroscopico – modificando così il campo prodotto dalle distribuzioni di cariche localizzate – se esso possiede un momento di dipolo diverso da zero. Tale momento di dipolo manca in assenza di campo elettrico esterno; ma viene indotto nel dielettrico quando su di questo agisce un campo elettrico prodotto da cariche elettriche presenti all'intorno (vuoi localizzate su un isolante, o portate da un conduttore). Il fenomeno per cui un dielettrico, immerso in un campo elettrico esterno, acquista un momento di dipolo è detto *polarizzazione elettrica*. La polarizzazione elettrica può essere di due tipi: polarizzazione per deformazione e polarizzazione per orientamento.

Polarizzazione elettrica

Polarizzazione per deformazione

Polarizzazione per deformazione

Un atomo è schematizzabile come un sistema elettricamente neutro costituito da un nucleo centrale molto piccolo (praticamente puntiforme: il suo raggio è dell'ordine di $10^{-5} \div 10^{-4}$ rispetto al raggio atomico) dotato di carica positiva Ze (Z: numero atomico; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C: carica del protone), circondato da una nube elettronica negativa con densità di carica a simmetria sferica variabile con continuità dal centro alla periferia (diametro dell'ordine di qualche angstrom Å, 1 Å $= 10^{-10}$ m). In virtù della simmetria sferica, per l'atomo sono nulli tutti i termini dello sviluppo in multipoli (vedi par. I.11), e dunque in particolare è nullo il momento di dipolo.

Se però l'atomo è posto in un campo elettrico $\vec{E}_l$ (campo locale), esso si deforma e acquista così un momento di dipolo $\vec{p}$. Infatti il nucleo N subisce

una forza $\vec{f} = Ze\vec{E}_l$ e il baricentro C della nuvola elettronica una forza $-\vec{f} = -Ze\vec{E}_l$: per conseguenza N si sposta di un certo tratto (sia esso $\vec{r}$, parallelo a $\vec{E}_l$) rispetto a C. Una volta spostati uno rispetto all'altro, N e C avendo carica opposta si attraggono con una forza elettrostatica $\vec{f}'$: l'equilibrio si ha quando $|\vec{f}'| = |\vec{f}|$. Almeno per campi elettrici non molto intensi, ci si aspetta, in base ad un modello in cui gli elettroni sono legati elasticamente ai nuclei, che lo spostamento $\vec{r}$ sia proporzionale a $\vec{E}_l$: questa condizione è in realtà largamente soddisfatta per tutti i campi elettrici $\vec{E}_l$ realizzabili in pratica. Ci si aspetta pertanto che anche il momento di dipolo indotto $\vec{p} = Ze\vec{r}$ sia proporzionale a $\vec{E}_l$:

$$\vec{p} = \alpha_d \vec{E}_l \qquad \text{[III.3]}$$

Polarizzabilità elettronica

Questa legge di proporzionalità è ben verificata sperimentalmente. Il coefficiente di proporzionalità α_d è detto *polarizzabilità elettronica*. Valori tipici di α_d sono:

per l'elio $\quad \alpha_{He} = 0{,}22 \cdot 10^{-40}$ farad $\cdot$ m^2

per il neon $\quad \alpha_{Ne} = 0{,}43 \cdot 10^{-40}$ farad $\cdot$ m^2

Campo locale e campo macroscopico

Osserviamo che $\vec{E}_l$ che compare nella [III.3] è il campo elettrico che agisce sulla molecola considerata (esterno rispetto alla molecola stessa); esso è dunque il campo generato dalle cariche esterne e da tutti i tipi di dipoli costituiti dalle molecole del dielettrico *esclusa* la molecola in esame («*campo locale*»); il «*campo macroscopico*» $\vec{E}$ che si misura internamente al dielettrico nella posizione considerata *include* invece anche il campo generato dalla molecola in esame. In un gas rarefatto, il campo locale $\vec{E}_l$ e il campo macroscopico $\vec{E}$ sono praticamente fra di loro coincidenti. In materiali più densi, la differenza si fa sentire, e verrà trattata in termini quantitativi più avanti.

Esempio

E.III.1. *Valutare la polarizzabilità elettronica α_d di un atomo di elio ($Z = 2$) assumendo la drastica schematizzazione che la nuvola elettronica occupi uniformemente una sfera di raggio $R = 0{,}5$ Å centrata intorno al nucleo assunto puntiforme.*

Sia $\vec{E}$ il campo macroscopico, praticamente coincidente col campo locale $\vec{E}_l$; la forza $\vec{f}$ che questo esercita sul nucleo N (pari in modulo e opposta in verso alla forza che $\vec{E}$ esercita su baricentro C della nuvola elettronica) vale:

$$\vec{f} = Ze\vec{E}$$

Quanto alla forza $\vec{f}'$ di attrazione elettrostatica reciproca che la nuvola di elettroni esercita su N, la sua espressione in funzione dello spostamento $\vec{r}$ fra C ed N può essere facilmente trovata nell'ipotesi fatta (simmetria sferica e densità costante). Il campo elettrostatico E' generato dalla nuvola elettronica al proprio interno ha infatti, in funzione della distanza r dal centro C, la seguente espressione (vedi esempio E.I.8):

$$E' = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Ze}{(4/3)\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r \qquad \text{[III.4]}$$

(avendo indicato con $\rho = \frac{Ze}{(4/3)\pi R^3}$ la densità di carica della nuvola elettronica) per cui la forza f' che E' esercita sul nucleo di carica Ze vale (in modulo):

$$f' = ZeE' = \frac{(Ze)^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3}$$

Uguagliando f a f' possiamo ricavare r:

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{Ze} \cdot E$$

e dunque

$$p = rZe = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \cdot E$$

Per confronto con la [III.3], si ha $\alpha_d = 4\pi\varepsilon_0 R^3$. Numericamente,

$$\alpha_d = \left(1{,}1 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Farad}}{\text{m}}\right) \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{m})^3 \simeq 0{,}14 \cdot 10^{-40}\,\text{Farad} \cdot \text{m}^2;$$

l'ordine di grandezza è in accordo qualitativo coi valori sperimentali.

La polarizzazione per deformazione è presente anche nelle molecole poliatomiche; in questi casi, anzi, oltre alla polarizzazione elettronica è presente anche una *polarizzazione atomica*.

Polarizzazione atomica

Molte molecole poliatomiche sono dotate, in più, di un loro proprio momento di dipolo elettrico; abbiamo già accennato all'esempio della molecola d'acqua (o di HCl) nel par. I.11. Diviene dominante allora il fenomeno della polarizzazione per orientamento.

Polarizzazione per orientamento

Polarizzazione per orientamento

Molecole polari

La configurazione spaziale di molte molecole poliatomiche non è simmetrica, e molte di esse hanno perciò un loro momento di dipolo proprio $\bar{p}_0$, indipendentemente dalla presenza di un campo elettrico applicato. Tuttavia a livello macroscopico l'effetto di tale momento di dipolo elettrico non si manifesta se non è applicato un campo elettrico esterno, perché le varie molecole sono orientate del tutto a caso, e dunque è nullo il valor medio $\langle \bar{p} \rangle$ del momento di dipolo eseguito su qualunque volumetto $d\tau$ macroscopicamente significativo (per quanto piccolo, un volume $d\tau$ significativo a livello macroscopico comprende comunque un numero molto grande di molecole). Quando invece agisce un campo elettrico esterno, i momenti di dipolo $\bar{p}_0$ tendono ad orientarsi parallelamente ad esso; e dunque il loro valor medio è diverso da zero.

Il calcolo, in presenza di un campo elettrico locale $\bar{E}_l$, del valor medio $\langle \bar{p} \rangle$ del momento di dipolo di molecole dotate ciascuna di un momento di dipolo proprio $\bar{p}_0$, può essere effettuato in termini statistici con relativa semplicità, e riteniamo istruttivo proporlo qui.

Supponiamo di avere un insieme di dipoli praticamente liberi, per i quali siano trascurabili le mutue interazioni (per esempio gas o vapore).

In presenza di campo elettrico $\vec{E}_l$, ogni dipolo $\vec{p}_o$ è sottoposto a un momento meccanico $\vec{M} = \vec{p}_o \times \vec{E}_l$ (eq. [I.62.b]) che tende a orientarlo come $\vec{E}_l$; mentre l'agitazione termica favorisce l'orientamento a caso. L'equilibrio statistico fra queste due tendenze opposte è descritto dalla funzione $P(U)$ di Boltzmann già introdotta in Termodinamica:

Polarizzabilità per orientamento di un gas o di un mezzo non denso

$$P(U) = A\,e^{-\frac{U}{KT}} \qquad \text{[III.5]}$$

dove: A è una costante di normalizzazione

- U è l'energia del dipolo; dalla [I.59] si ha $U = -\vec{p}_o \cdot \vec{E}_l = -p_o E_l \cos\theta$, con θ angolo fra $\vec{p}_o$ e $\vec{E}_l$
- K è la costante di Boltzmann
- T è la temperatura assoluta del materiale considerato.

Secondo la teoria statistica di Boltzmann, la probabilità che il dipolo sia orientato entro un angolo solido $d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta$ è data da:

$$dP = P(U(\theta))\, d\Omega = A\,e^{-\frac{U}{KT}}\, d\Omega = A\,e^{\frac{p_o E_l \cos\theta}{KT}}\, 2\pi \sin\theta\, d\theta \qquad \text{[III.6]}$$

La costante A è determinata dalla condizione che $\int_0^{4\pi} P\, d\Omega = 1$, perché la probabilità integrata su tutti gli angoli deve corrispondere alla certezza.

A meno che la temperatura T non sia prossima allo zero assoluto, l'esponente $\frac{E_l p_o \cos\theta}{KT}$ è abbastanza piccolo perché l'esponenziale possa essere sviluppato al I° ordine $\left(e^{\frac{p_o E_l \cos\theta}{KT}} \simeq 1 + \frac{p_o E_l \cos\theta}{KT}\right)$ per cui la precedente relazione diviene:

Approssimazione $\frac{p_o E_l}{KT} << 1$

$$dP = 2\pi A\left(1 + \frac{p_o E_l \cos\theta}{KT}\right)\sin\theta\, d\theta \qquad \text{[III.6.a]}$$

Integrando la [III.6.a] fra 0 e π e imponendo che il risultato valga 1 si trova immediatamente $A = \frac{1}{4\pi}$, per cui la [III.6.a] diviene:

$$dP = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_o E_l}{KT}\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_o E_l}{KT}x\right)dx \qquad \text{[III.7]}$$

avendo posto $x = \cos\theta$ (e dunque $dx = d\cos\theta = -\sin\theta\, d\theta$). Osserviamo ora che l'orientamento di $\vec{p}_o$ deve avere simmetria cilindrica intorno a $\vec{E}_l$, e dunque la componente ortogonale a $\vec{E}_l$ sarà, in media, nulla. Dunque il valor medio $\langle \vec{p} \rangle$ sarà orientato come $\vec{E}_l$ e la sua proiezione su $\vec{E}_l$ vale:

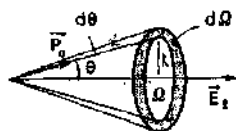
$$|\langle \vec{p} \rangle|_{E_l} = \int_0^{\pi} p_o \cos\theta\, dP = \int_1^{-1} p_o x\left[-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_o E_l}{KT}x\right)\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{p_o x}{2}\left(1 + \frac{p_o E_l}{KT}x\right)dx$$

Eseguendo l'integrale, si ricava facilmente

$$\langle \vec{p} \rangle\Big|_{E_l} = \frac{p_o^2 E_l}{3KT}$$

e dunque in definitiva

$$\langle \vec{p} \rangle = \alpha_o \vec{E}_l \quad \text{con} \quad \alpha_o = \frac{p_o^2}{3KT} \qquad \text{[III.8]}$$

La [III.8] è del tutto analoga alla [III.3], salvo per il fatto che mentre nel caso della polarizzazione per deformazione ogni singola molecola ha momento di dipolo proporzionale a $\vec{E}_l$, nel caso della polarizzazione per orientamento ciò che è proporzionale a $\vec{E}_l$ è il *valor medio* del momento di dipolo.

È da osservare che la [III.8] è stata dedotta introducendo uno sviluppo di esponenziale arrestato al primo ordine, ed in questa ipotesi il valor medio del momento di dipolo risulta proporzionale al campo elettrico $\vec{E}_l$. Al crescere del campo elettrico, l'andamento di $\langle \vec{p} \rangle$ cessa di essere proporzionale ad $\vec{E}_l$; dal momento che tutte le molecole si disporranno parallelamente ad $\vec{E}_l$, $\langle \vec{p} \rangle$ tenderà a $\vec{p}_0$ e si realizzerà una situazione di saturazione.

Esempio

E.III.2. *Calcolare la polarizzabilità α_0 per orientamento delle molecole di vapore d'acqua alla temperatura ambiente.*

Per l'acqua si ha (vedi par. I.11) $p_0 = 6 \cdot 10^{-30}\, C \cdot m$, a $T \simeq 300\, K$, ed essendo $K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\, J\, K^{-1}$, la [III.8] diviene:

$$\alpha_0 = \frac{p_0^2}{3\,KT} = \frac{36 \cdot 10^{-60}}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \simeq 3 \cdot 10^{-39}\ \text{Farad} \cdot \text{m}^2$$

Vediamo che questo valore della polarizzabilità è circa due ordini di grandezza maggiore rispetto alla polarizzabilità per deformazione dei gas nobili (vedi esempio E.III.1).

III.3. Il vettore polarizzazione elettrica $\vec{P}$ (o intensità di polarizzazione)

Vettore polarizzazione elettrica $\vec{P}$

Dalle considerazioni microscopiche svolte nel precedente paragrafo ci aspettiamo che quando un dielettrico viene sottoposto ad un campo elettrico esterno le sue molecole acquistino un dipolo elettrico medio $\langle \vec{p} \rangle$ non nullo, orientato parallelamente al campo locale $\vec{E}_l$ agente internamente al dielettrico e proporzionale ad $\vec{E}_l$ stesso (almeno per campi elettrici tali che sia soddisfatta la condizione $\langle \vec{p} \rangle \cdot \vec{E}_l << KT$, per cui vale lo sviluppo al primo ordine [III.6.a]).

Dal punto di vista macroscopico, il fenomeno è convenientemente descritto introducendo il vettore **polarizzazione elettrica** $\vec{P}$ definito come il **momento di dipolo elettrico per unità di volume** posseduto dal dielettrico; ovvero in formule:

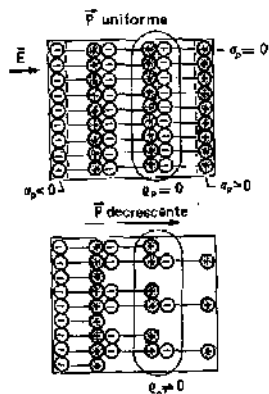
$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{d\tau} = \frac{dN \langle \vec{p} \rangle}{d\tau} \qquad \text{[III.9]}$$

dove dN è il numero di molecole contenute nel volume «elementare» $d\tau$. In realtà, poiché in generale il vettore $\vec{P}$ ha valore diverso da punto a punto ($\vec{P} \equiv \vec{P}(x, y, z)$) la definizione [III.9] va intesa al limite per $d\tau$ tendente a zero (in termini macroscopici) col vincolo che $d\tau$ sia però sempre abbastanza grande da contenere un numero dN statisticamente significativo di

molecole. Dalla definizione [III.9] segue che l'elemento di volume $d\tau$ possiede un momento di dipolo elettrico $d\vec{p}$ dato da

Dielettrico polarizzato

$$d\vec{p} = \vec{P}\,d\tau \qquad [III.10]$$

Il simbolo ⊖—⊕ rappresenta un dipolo orientato in direzione del campo ·

Benché all'interno di un dielettrico le cariche non siano in grado di muoversi liberamente, il fatto che $\vec{P}$ sia diverso da zero sotto l'azione di un campo elettrico esterno (o, come si dice, il fatto che il dielettrico sia *polarizzato*) comporta che in generale, in tali condizioni, la situazione possa schematizzarsi con la presenza sulla superficie e dentro il volume del dielettrico di cariche aggiuntive: chiamiamo ρ_P e σ_P la loro densità volumica e, rispettivamente, superficiale (col pedice P a ricordarci che si tratta di distribuzioni di cariche di polarizzazione, contrapposte alle distribuzioni ρ e σ delle cariche localizzate che costituiscono le sorgenti del campo macroscopico applicato dall'esterno al dielettrico). Qualitativamente, come risulta evidente dai disegni schematici riportati a fianco, ci aspettiamo che se $\vec{P}$ è un vettore uniforme (indipendente dalla posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$) la densità volumica sia nulla ($\rho_P = 0$) e le cariche di polarizzazione si manifestino solo in superficie ($\sigma_P \neq 0$); mentre se $\vec{P}$ non è uniforme, ciò si traduce in una densità di cariche di polarizzazione ρ_P diversa da zero anche all'interno del volume del dielettrico.

Ci proponiamo ora di ricavare, in termini quantitativi, le relazioni che intercorrono fra le densità ρ_P e σ_P, ed il vettore intensità di polarizzazione $\vec{P}$. Ciò può essere fatto in maniera sintetica calcolando il potenziale generato da un dielettrico che occupi un certo volume τ e che sia dotato di una polarizzazione $\vec{P}(x, y, z)$. Dalla [I.54] segue che nella posizione $\bar{\vec{r}} \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, l'elemento di volume $d\tau$, di posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ ed equivalente ad un dipolo di momento $\vec{P}\,d\tau$, porta al potenziale $V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ il contributo $dV(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$dV(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(\bar{\vec{r}} - \vec{r}) \cdot \vec{P}\,d\tau}{|\bar{\vec{r}} - \vec{r}|^3}$$

Dunque:

$$V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot (\bar{\vec{r}} - \vec{r})\,d\tau}{|\bar{\vec{r}} - \vec{r}|^3}$$

D'altra parte, per la [I.58] abbiamo $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

$$\frac{\bar{\vec{r}} - \vec{r}}{|\bar{\vec{r}} - \vec{r}|^3} = -\frac{\vec{r} - \bar{\vec{r}}}{|\vec{r} - \bar{\vec{r}}|^3} = +\vec{\nabla}\,\frac{1}{|\vec{r} - \bar{\vec{r}}|};$$

per cui:

$$V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \vec{P} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \bar{\vec{r}}|}\right) d\tau$$

Ma in virtù della proprietà matematica generale

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot f) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f + (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) f$$

(dove $\vec{A}$ è un qualunque vettore e f una qualunque funzione, purché derivabili), ponendo $\vec{A} = \vec{P}$ e $f = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|}$ si ha:

$$\vec{P} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{P} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|}\right) - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|};$$

per cui:

$$V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_\tau \vec{\nabla}\left(\vec{P} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|}\right) d\tau - \int_\tau \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|} d\tau\right\}$$

Ma in virtù del teorema della divergenza,

$$\int_\tau \vec{\nabla}\left(\vec{P} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|}\right) d\tau = \int_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|} dS$$

dove S è la superficie che racchiude τ; e dunque in definitiva:

$$V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|} dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{(-\vec{\nabla} \cdot \vec{P})}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|} d\tau \qquad [III.11]$$

Confrontando la [III.11] con le [I.44], e ricordando che la soluzione del problema generale dell'elettrostatica con la condizione $V(\infty) = 0$ è unica, risulta che deve essere

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \qquad [III.12]$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \equiv -\operatorname{div} \vec{P} \qquad [III.13]$$

Relazioni fra le densità di cariche di polarizzazione e il vettore polarizzazione elettrica $\vec{P}$

Le [III.12] e [III.13] rappresentano le relazioni che cercavamo; cioè le relazioni che legano le densità di cariche di polarizzazione al vettore polarizzazione elettrica $\vec{P}$. È appena il caso di rimarcare che le cariche di polarizzazione, di densità ρ_P e σ_P, costituiscono soltanto una schematizzazione per il calcolo degli effetti di materiali dielettrici polarizzati.

Esempio

E.III.3. *Calcolare il potenziale V prodotto in tutto lo spazio da una sfera di raggio R dotata di polarizzazione elettrica $\vec{P}_0$ uniforme.*

Sia internamente ($\vec{P} = \vec{P}_0$) che esternamente alla sfera ($\vec{P} = 0$), il vettore polarizzazione $\vec{P}$ è uniforme; e dunque $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$. Solo sulla superficie della sfera si ha densità (superficiale) di cariche di polarizzazione σ non nulla. Usando la [III.12], e scegliendo l'asse x come in figura, si ha

$$\sigma_P = \vec{P}_0 \cdot \hat{n} = P_0 \cos\theta$$

La densità di carica è massima sull'asse x, positiva in B ($\theta = 0$) e negativa in A ($\theta = 180°$); ed è nulla sull'equatore E ($\theta = \pi/2$). Il potenziale V potrebbe essere calcolato direttamente tramite la [III.11]; essendo nullo il contributo del secondo integrale ($\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$) essa si scrive

$$V(\vec{\bar{r}}) = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{P_0 \cos\theta}{|\vec{r} - \vec{\bar{r}}|} dS$$

Tuttavia è più semplice, e più istruttivo, calcolare il potenziale ricorrendo a considerazioni fisiche. La polarizzazione uniforme $\vec{P}_0$ assegnata può essere considerata prodotta da due sfere di raggio R uniformemente cariche con densità di carica equivalente pari rispettivamente a $-\rho_e$ e $+\rho_e$; e spostate l'una rispetto all'altra di un piccolo tratto Δx. La relazione che lega fra di loro P_0, ρ_e e Δx, tenendo conto che, detto n il numero di cariche puntiformi q per unità di volume in ciascuna sfera, uno spostamento relativo delle sfere di Δx dà luogo ad n dipoli per unità di volume, ciascuno di momento $(q\Delta x)$ e quindi ad una polarizzazione P_0 (momento di dipolo dell'unità di volume) è pari a:

$$P_0 = n(q\Delta x) = \rho_e \Delta x; \quad \text{e dunque} \quad \rho_e = \frac{P_0}{\Delta x}$$

Per il principio di sovrapposizione, il potenziale può essere calcolato come somma dei potenziali generati da queste due sfere.

Vediamo prima il potenziale esternamente $(r \geq R)$.

Esternamente, una sfera omogeneamente carica produce lo stesso potenziale prodotto da una carica puntiforme Q situata nel centro; le due sfere equivalgono dunque, all'esterno, a un dipolo di momento elettrico $\vec{p}$ pari a

$O_1 O_2 \equiv \Delta\vec{x} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\vec{p} = \Delta\vec{x} \cdot Q = \Delta\vec{x} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_e = \Delta\vec{x} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{P_0}{\Delta x} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}_0$$

Dunque per la [I.54] il potenziale vale:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0}\frac{P_0\cos\theta}{r^2} = \frac{R^3 P_0 x}{3\varepsilon_0 r^3} \qquad \text{[III.14]}$$

essendo $x = r\cos\theta$.

In particolare sulla sfera $(r = R)$:

Campo generato da una sfera uniformemente polarizzata

$$V(\vec{R}) = \frac{P_0 x}{3\varepsilon_0} \qquad \text{[III.15]}$$

Internamente alla sfera, cominciamo col calcolare il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ come somma dei campi elettrici $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ generati dalle due sfere. Ricordando l'esempio E.I.8 (ovvero la relazione [III.4]) si ha:

$$\vec{E}_1 = \frac{-\rho_e}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 \qquad \vec{E}_2 = \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$

e dunque:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\Delta\vec{x} = -\frac{\vec{P}_0}{3\varepsilon_0} \qquad \text{[III.16]}$$

Il campo elettrico internamente alla sfera è dunque uniforme, ed è diretto parallelamente e in verso opposto a $\vec{P}_0$. Il potenziale vale

$$V = -\int_0^x \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_0^x \frac{P_0}{3\varepsilon_0}dx = \frac{P_0 x}{3\varepsilon_0} \qquad \text{[III.17]}$$

e sulla superficie sferica S si raccorda col valore [III.15] che esso assume su S provenendo dall'esterno.

Fin qui abbiamo analizzato il legame fra il vettore polarizzazione e le distribuzioni delle cariche di polarizzazione presenti nel dielettrico. Vogliamo ora ricercare la relazione che lega il vettore polarizzazione $\vec{P}(x, y, z)$ al campo elettrico macroscopico $\vec{E}$ che agisce all'interno del die-

lettrico nella posizione $x, y\, z$: sulla definizione operativa di $\vec{E}$ (cioè su come tale campo possa essere praticamente misurato, malgrado la presenza del dielettrico) torneremo più avanti (par. III.5).

Mettendo insieme la definizione [III.9], e le equazioni [III.3] e [III.8], ci aspettiamo che il vettore polarizzazione $\vec{P}$ sia proporzionale al campo locale $\vec{E}_l$; possiamo scrivere pertanto:

$$\vec{P} = n \alpha \vec{E}_l \qquad \text{[III.18]}$$

dove $n = \dfrac{dN}{\Delta\tau}$ è il numero di molecole per unità di volume; e $\alpha = \alpha_d + \alpha_o$ è la polarizzabilità molecolare totale. Nelle molecole prive di momento elettrico proprio, è $\alpha_o = 0$ e la polarizzazione si riduce solo a quella per deformazione; mentre nelle molecole polari, di solito il termine di orientamento α_o è dominante rispetto al termine di deformazione α_d.

Il campo locale $\vec{E}_l$

I meccanismi di polarizzazione di un dielettrico (deformazione ed orientamento delle singole molecole) fanno intervenire necessariamente il campo elettrico locale $\vec{E}_l$ agente sulle singole molecole. Tale campo, nel punto in cui è situata la molecola considerata, è generato sia dalle cariche libere localizzate, sia dalle cariche (nuclei ed elettroni) degli atomi delle molecole del dielettrico diverse da quella considerata. Questo secondo contributo, chiaramente, varierà in modo notevole sia per piccoli spostamenti (basterà, ad esempio, avvicinarsi al nucleo positivo o ad un elettrone per avere il modulo del campo elettrico fortemente crescente), sia da istante ad istante (per il moto degli elettroni orbitanti intorno ai nuclei del materiale dielettrico). Si tratta però di spostamenti (dimensioni atomiche) ed intervalli di tempo (tempi di rivoluzione degli elettroni) molto piccoli rispetto ad ogni ragionevole sensibilità degli strumenti di misura del campo elettrico. Di fatto si esegue un procedimento di media spazio-temporale su regioni spaziali ed intervalli temporali piccoli rispetto alle sensibilità richieste in ogni problema di interesse fisico macroscopico, ma comunque molto grandi rispetto alle dimensioni ed ai tempi atomici. In sostanza si debbono considerare regioni di spazio piccole, ma sempre contenenti un grande numero di molecole, così che la media del campo elettrico divenga una funzione regolare delle variabili spaziali (funzione continua del punto). Questa media è ciò che indichiamo con il termine di campo locale $\vec{E}_l$, agente su una data molecola di dielettrico.

Relazione tra campo locale $\vec{E}_l$ e campo macroscopico $\vec{E}$ nel dielettrico

È importante stabilire delle relazioni tra campo locale e campo macroscopico, collegando le grandezze macroscopiche (χ, ε_r, $\vec{P}$) con le grandezze microscopiche che descrivono gli aspetti molecolari dei dielettrici.

Per sostanze a bassa densità, come gas e vapori, l'interazione tra molecole è trascurabile ed il campo locale $\vec{E}_l$ coincide praticamente con il campo elettrico macroscopico $\vec{E}$ presente nel dielettrico.

Gas e vapori

Nel caso di molecole polari, per le quali va anche considerato un effetto di polarizzazione per deformazione, la polarizzabilità complessiva, in base alle [III.3] e [III.8], sarà:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_o = \alpha_d + \frac{p_o^2}{3KT}$$

e quindi:

$$\vec{P} = n\,\vec{p} = n\,\alpha\,\vec{E}_l \simeq n\,\alpha\,\vec{E} \equiv \varepsilon_0\,\chi\,\vec{E},$$

da cui:

$$\chi = \frac{n}{\varepsilon_0}\alpha = \frac{n}{\varepsilon_0}\left(\alpha_d + \frac{p_0^2}{3KT}\right)$$

Suscettività elettrica

Liquidi non polari

Il parametro $\chi = P/\varepsilon_0 E$ prende il nome di *suscettività elettrica*. Vedremo (eq. [III.26]) che χ è legato a ε_r dalla relazione $\chi = \varepsilon_r - 1$.

Nel caso di liquidi densi, l'azione delle molecole circostanti non è trascurabile ed occorre tenere conto del loro effetto sul campo locale $\vec{E}_l$. È possibile sviluppare un semplice calcolo del campo $\vec{E}_l$, sotto le ipotesi semplificative che il campo generato dalle molecole sia puramente dipolare, che la distribuzione dei dipoli molecolari sia uniforme, che il loro momento sia diretto parallelamente al campo esterno e che i momenti delle varie molecole siano uguali tra loro. Si trova allora la seguente relazione (Lorentz):

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Per l'intensità di polarizzazione si ha:

$$\vec{P} = n\,\vec{p} = n\,\alpha\,\vec{E}_l = n\,\alpha\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right)$$

da cui:

$$\boxed{\vec{P} = \left(\frac{n\,\alpha}{1 - \dfrac{n\,\alpha}{3\varepsilon_0}}\right)\vec{E} = \varepsilon_0\,\chi\,\vec{E}} \qquad \text{[III.19]}$$

Osserviamo la relazione di proporzionalità tra $\vec{E}$ e $\vec{P}$, oltre che il loro parallelismo. Per la suscettibilità elettrica si ricava immediatamente:

$$\boxed{\chi = \frac{n\,\alpha}{\varepsilon_0\left(1 - \dfrac{n\,\alpha}{3\varepsilon_0}\right)} = \varepsilon_r - 1}$$

e la polarizzabilità assume la forma:

Relazione di Clausius-Mossotti

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0}{n}\cdot\frac{(\varepsilon_r - 1)}{(\varepsilon_r + 2)}.$$

Questa prende il nome di relazione di Clausius-Mossotti.

È da osservare ancora che la relazione di Clausius-Mossotti è ricavata sotto ipotesi che sono soddisfatte per sostanze amorfe e con molecole non polari.

Solidi

Nel caso di solidi cristallini, prevalentemente a struttura anisotropa (esclusi quelli a struttura cubica per cui la relazione di Clausius-Mossotti è abbastanza ben verificata), la reazione a campi elettrici esterni è diversa a seconda della direzione del campo stesso. In questi casi la relazione tra intensità di polarizzazione e campo elettrico è del tipo indicato in [III.24].

Polarizzazione elettrica permanente

Alcuni dielettrici non isotropi (cristallini) possono presentare una *polarizzazione elettrica permanente*, che permane cioè anche quando viene portato a zero il campo elettrico esterno. La polarizzazione elettrica segue in

questi casi, in funzione di $\vec{E}$, una *curva di isteresi* analoga a quella che discuteremo in dettaglio, a suo tempo, a proposito della magnetizzazione. I cristalli che presentano una polarizzazione elettrica permanente vengono detti *ferroelettrici*.

Ferroelettricità

Nei materiali ferroelettrici, la polarizzazione elettrica dipende anche dalle sollecitazioni meccaniche cui il cristallo è sottoposto (*piezoelettricità*). Anche alcuni cristalli non ferroelettrici (ad esempio il quarzo) sono piezoelettrici, cioè acquistano una polarizzazione elettrica – senza bisogno di un campo elettrico esterno – quando vengono sottoposti a pressione o a trazione meccanica.

Piezoelettricità

III.4. Le equazioni dell'elettrostatica in presenza di dielettrici

Nei due precedenti paragrafi abbiamo analizzato il comportamento di un dielettrico sottoposto ad un campo elettrico macroscopico $\vec{E}$. Nelle condizioni in cui ci siamo messi (dielettrico omogeneo ed isotropo) possiamo così sintetizzare le conclusioni che abbiamo raggiunto:

a) Il dielettrico, per effetto del campo elettrico, si polarizza; esso acquista cioè un momento di dipolo elettrico, che abbiamo descritto col vettore polarizzazione $\vec{P}(x, y, z)$. $\vec{P}$ rappresenta il momento di dipolo per unità di volume.

b) Il vettore $\vec{P}$ è, almeno nelle situazioni più semplici, proporzionale al campo elettrico $\vec{E}$ che agisce internamente al dielettrico.

c) Gli effetti della polarizzazione possono essere descritti immaginando nel dielettrico una distribuzione di carica superficiale (σ_P) ed una distribuzione volumica di cariche nel dielettrico (ρ_P).

d) Abbiamo trovato le relazioni (eq. [III.12] e [III.13]) che legano $\vec{P}$ alla densità superficiale σ_P e volumica ρ_P delle cariche di polarizzazione.

Queste conclusioni sono la premessa per impostare, nella sua generalità, il problema dell'elettrostatica in presenza di dielettrico.

Il nostro punto di partenza saranno le equazioni dell'elettrostatica nel vuoto (eq. [I.36] e [I.83]):

$$\operatorname{div} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad [I.36]$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad [I.83]$$

Queste equazioni (che possono essere anche unificate nella equazione fondamentale dell'elettrostatica $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$), una volta specificate le condizioni al contorno *determinano univocamente* – per il teorema di unicità – la configurazione del campo (e/o del potenziale) in tutto lo spazio.

In presenza di dielettrico, la seconda di tali equazioni – che esprime la conservatività del campo elettrostatico – deve continuare a valere tale quale; mentre ci aspettiamo che la presenza del dielettrico modifichi sia la prima equazione (introducendo in essa le densità delle cariche di polarizzazione), che le condizioni al contorno. Cominciamo col discutere come conviene formulare, in presenza di dielettrici, l'equazione [I.36]; mentre nel prossimo paragrafo ci soffermeremo sulle condizioni al contorno.

Introducendo nella [I.36] la densità ρ_P delle cariche di polarizzazione, essa diviene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} \qquad \text{[III.20]}$$

Così scritta, questa equazione non è molto utile, perché la densità ρ_P non è nota a priori. Per metterla in forma più conveniente, utilizzando la [III.13] scriviamo ρ_P in funzione della polarizzazione $\vec{P}$. Tenuto conto che ε_0 è costante, possiamo scrivere:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho + \rho_P = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

da cui

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \qquad \text{[III.21]}$$

Definendo il vettore $\vec{D}$, detto *spostamento elettrico*, come

Vettore *spostamento* elettrico

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \text{[III.22]}$$

l'equazione [III.21] diviene $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$; e dunque in presenza di dielettrico le equazioni dell'elettrostatica [I.36] e [I.83] possono essere poste nella forma generale:

Equazioni fondamentali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad \text{[III.23]}$$

Osserviamo che in assenza di dielettrico (e dunque $\vec{P} = 0$) si ha $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ (il vettore spostamento elettrico verrà indicato in questo caso con $\vec{D}_0$), e le [III.23] si trasformano automaticamente, come devono, nelle equazioni dell'elettrostatica nel vuoto.

Nella forma [III.23], le equazioni fondamentali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici hanno un'espressione estremamente compatta, formalmente identica a quella nel vuoto. Va tuttavia osservato che nel caso del vuoto le [III.23] ammettevano soluzione unica (fissate le condizioni al contorno) perché in entrambe compariva lo stesso vettore ($\vec{E}_0 = \vec{D}_0/\varepsilon_0$). Affinché le [III.23] possano essere univocamente risolte anche in presenza di dielettrici è dunque necessario specificare quale relazione intercorra, anche in questo caso, fra $\vec{D}$ ed $\vec{E}$; ovvero (considerata la definizione [III.22]) fra $\vec{P}$ ed $\vec{E}$.

In generale, la relazione fra $\vec{P}$ ed $\vec{E}$ può essere espressa nella forma

$$\begin{cases} P_x = \alpha_{11} E_x + \alpha_{12} E_y + \alpha_{13} E_z \\ P_y = \alpha_{21} E_x + \alpha_{22} E_y + \alpha_{23} E_z \\ P_z = \alpha_{31} E_x + \alpha_{32} E_y + \alpha_{33} E_z \end{cases} \qquad \text{[III.24]}$$

La matrice

$$\|\alpha\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{[III.25]}$$

viene detta *tensore di polarizzazione*. Se gli elementi del tensore di polarizzazione sono costanti (indipendenti dalla posizione e dal valore del campo elettrico $\vec{E}$) il dielettrico si dice *perfetto*. Abbiamo già osservato che non tutti i dielettrici godono di questa proprietà, cioè non tutti i dielettrici sono perfetti: a bassa temperatura, la relazione fra $\vec{P}$ ed $\vec{E}$ non è prevista essere lineare nei dielettrici polari (vedi eq. [III.6]); nei dielettrici ferroelettrici, che presentano isteresi, essa non è nemmeno univoca; se il dielettrico non è omogeneo, essa dipende dalla posizione. In tutti questi casi la soluzione del problema dell'elettrostatica è assai complessa, e può essere effettuata di solito solo in termini numerici approssimati.

Tensore di polarizzazione

Dielettrico perfetto

Il caso più semplice, cui noi limiteremo la nostra attenzione, è quello di dielettrici perfetti isotropi. In questo caso la matrice di polarizzazione si riduce a un numero (o meglio a una matrice diagonale con tutti gli elementi uguali), e la relazione fra $\vec{P}$ ed $\vec{E}$ si riduce semplicemente alla [III.19], con χ costante. La [III.22] diviene allora

Dielettrici perfetti e isotropi

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (\chi + 1) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \qquad \text{[III.26]}$$

Osserviamo che nella [III.26] abbiamo usato i seguenti simboli: $\varepsilon_r = \chi + 1$; $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Ciò è coerente con quanto avevamo introdotto nel par. III.1: vedremo infatti che, per conseguenza delle [III.23] e della [III.26], quando il dielettrico riempie uniformemente lo spazio interessato al campo, fissate le distribuzioni delle cariche sorgenti il campo risulta diminuito di un fattore $\varepsilon_r = \chi + 1$ rispetto al caso del vuoto; e questa conclusione vale in particolare nel caso di un condensatore completamente riempito di dielettrico.

$\varepsilon_r = \chi + 1$

III.5. Il problema generale dell'elettrostatica in presenza di dielettrici e le condizioni al contorno per i vettori $\vec{E}$ e $\vec{D}$

Da qui in avanti ci limiteremo a considerare dielettrici perfetti e isotropi. Per la soluzione del problema dell'elettrostatica potremo pertanto far conto sulle equazioni [III.23], con $\vec{D}$ ed $\vec{E}$ legati l'uno all'altro dalla [III.26]. Ricordiamo brevemente il significato fisico delle [III.23]. La prima di esse, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, scritta in termini finiti ci dice che per $\vec{D}$ il teorema di Gauss [I.24] si scrive nella forma

Teorema di Gauss per $\vec{D}$: $\Phi_S(\vec{D}) = Q_i$

$$\Phi_S(\vec{D}) = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_i \qquad \text{[I.24.a]}$$

prendendo in considerazione le sole cariche localizzate Q_i presenti dentro S, *ma non le cariche di polarizzazione* che nella [III.23] non compaiono. Naturalmente, in modo analogo il teorema di Coulomb [II.5] per il vettore $\vec{D}$ diviene

Teorema di Coulomb per $\vec{D}$: $\vec{D} = \sigma \cdot \hat{n}$

$$\vec{D} = \sigma \cdot \hat{n} \qquad \text{[II.5.a]}$$

con σ relativo alle sole cariche localizzate libere, ma non alle cariche di polarizzazione. La seconda delle [III.23] ci dice invece che $\vec{E}$ ha circuitazione nulla, cioè il campo elettrostatico è – anche in presenza di dielettrici – conservativo.

Conservatività del campo elettrostatico anche in presenza di dielettrici

Caso in cui il dielettrico riempie tutto lo spazio

Nel caso che il dielettrico occupi tutto lo spazio, la relazione di proporzionalità [III.26] vale dappertutto. In questo caso, dividendo la prima delle [III.23] per $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, possiamo esprimere le [III.23] stesse nella forma

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases} \qquad \text{[III.27]}$$

ovvero, moltiplicando la seconda delle [III.23] per ε, nella forma

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{D} = 0 \end{cases} \qquad \text{[III.28]}$$

Naturalmente, nel caso in esame le [III.27] e le [III.28] sono fra di loro completamente equivalenti. Dalle [III.27] vediamo che, fissate le distribuzioni delle cariche sorgenti e le condizioni al contorno all'infinito, il campo elettrico in presenza di un dielettrico omogeneo che riempia completamente lo spazio è semplicemente scalato di un fattore ε_r rispetto al caso del vuoto (eq. [I.36]). Le [III.28] ci dicono che, nelle stesse condizioni, il vettore spostamento elettrico è anch'esso conservativo; e la sua configurazione nello spazio, fissate le cariche sorgenti, è la stessa qualunque sia il dielettrico che riempie uniformemente lo spazio, e dunque anche la stessa rispetto al caso del vuoto. Il problema generale dell'elettrostatica si riduce dunque in questo caso sostanzialmente al problema dell'elettrostatica nel vuoto, e può essere risolto con le tecniche discusse nel paragrafo II.6. A parità di cariche sorgenti, la soluzione in presenza di dielettrico è legata alla soluzione nel vuoto dalle semplici relazioni

$$\vec{D} = \vec{D}_0 \qquad \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} \qquad V = \frac{V_0}{\varepsilon_r} \qquad \text{[III.29]}$$

Una volta trovata la configurazione spaziale di $\vec{D}$ (o di $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$), quando si sia interessati si può calcolare facilmente $\vec{P}$ tramite la [III.19]

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{D}$$

e quindi anche le cariche di polarizzazione tramite le [III.12] e [III.13].

Esempi

Carica sferica immersa in un dielettrico omogeneo che occupa tutto lo spazio

E.III.4. *Calcolare il campo elettrico generato da una sfera conduttrice di raggio R dotata di carica Q, immersa in un dielettrico perfetto omogeneo di costante dielettrica ε_r. Calcolare inoltre le cariche di polarizzazione presenti nel dielettrico.*

Nel vuoto, il campo elettrico per $r > R$ vale

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

In presenza di un dielettrico che riempie tutto lo spazio, per le [III.29] abbiamo

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^3}\vec{r}$$

Il vettore $\vec{P}$ vale

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\vec{E} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\,\varepsilon_r}\frac{Q\vec{r}}{r^3} \qquad \text{[III.30]}$$

Poiché la funzione $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ ha divergenza nulla ovunque fuorché nell'origine (vedi esempio E.II.17), per la [III.13] è nulla in ogni punto del dielettrico la densità ρ_P delle cariche di polarizzazione.

Sulla superficie libera del dielettrico (per $r = R$) si ha invece una densità di carica superficiale σ_P non nulla; dalla [III.30] e dalla [III.12] risulta, indicando con σ la densità superficiale delle cariche localizzate sul conduttore:

$$\sigma_P = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\,\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{S} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$$

La densità di cariche di polarizzazione è dunque proporzionale, e opposta in segno, rispetto alla densità σ delle cariche localizzate. Osserviamo che il segno meno deriva dal fatto che nella [III.12] $\hat{n}$ rappresenta la normale uscente dal dielettrico: nel caso specifico, la normale $\hat{n}$ è orientata verso il centro, e dunque in verso opposto rispetto al vettore $\vec{P}$ (che è parallelo a $\vec{E}$).

Osserviamo che

$$\sigma + \sigma_P = \sigma - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma = \frac{\sigma}{\varepsilon_r};$$

il campo elettrico $\vec{E}$ è anche pari pertanto, come deve, al campo elettrico generato nel vuoto da una densità di cariche $(\sigma + \sigma_P)$.

E.III.5. *Discutere, alla luce di quanto fin qui visto, il caso di un condensatore piano completamente riempito di dielettrico omogeneo ed isotropo.*

Condensatore piano riempito di dielettrico omogeneo ed isotropo

Fissate le cariche sulle armature, il potenziale V risulta scalato di un fattore $1/\varepsilon_r$ per la terza delle [III.29]; e ciò comporta l'aumento della capacità di un fattore ε_r, coerentemente con le osservazioni sperimentali riportate nel paragrafo III.1.

Dal punto di vista fisico, è istruttiva l'analisi delle distribuzioni di cariche. Internamente al dielettrico, la densità delle cariche di polarizzazione è ancora una volta nulla, come discende dalla [III.13] (infatti $\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\vec{E}$ è uniforme); mentre sulle superfici del dielettrico a contatto con le armature si ha una densità di carica che per la [III.12] vale

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} = +(\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\vec{E}\cdot\hat{n} = +(\varepsilon_r - 1)\frac{\varepsilon_0\vec{E}_0}{\varepsilon_r}\cdot\hat{n} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\sigma\,.$$

Nel penultimo passaggio abbiamo usato la seconda delle [III.29]; mentre nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il teorema di Coulomb [II.5]. Il segno meno deriva come al solito dal verso di $\hat{n}$ (nella [II.5] $\hat{n}$ è positivo se esce dal conduttore; mentre nella [III.12] è positivo il verso uscente dal dielettrico). La «carica equivalente» Q' presente sulle armature è dunque

$$Q' = (\sigma + \sigma_P)\,S = \sigma\left(1 - \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\right)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_r}$$

Pertanto si può dire che l'effetto del dielettrico è quello di ridurre di un fattore ε_r la «carica equivalente» presente sulle armature.

Distribuzione ρ_P delle cariche di polarizzazione

E.III.6. *Si abbia un sistema di cariche libere localizzate con densità di volume ρ in una porzione di spazio riempita di materiale dielettrico omogeneo e isotropo. Calcolare la densità delle cariche di polarizzazione ρ_P.*

Per la [III.13] si ha

$$\rho_P = -\operatorname{div}\vec{P}$$

relazione che, tenendo conto della [III.19], diviene:

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot[\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}] = -\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\cdot\vec{D}\right].$$

Se il dielettrico è omogeneo ed isotropo, la quantità $\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$ può essere portata fuori dal segno di operatore divergenza

$$\rho_P = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}$$

e tenuto conto della prima delle [III.23]:

$$\rho_P = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\rho$$

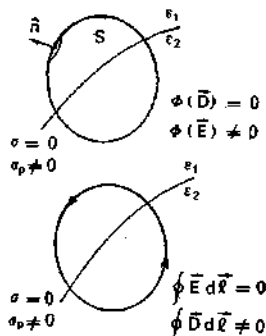
Poiché $\varepsilon_r > 1$, la densità delle cariche di polarizzazione ha sempre segno opposto rispetto alla densità di cariche libere ρ. Osserviamo inoltre che la densità volumica delle cariche di polarizzazione è diversa da zero solo laddove è presente una densità di cariche libere localizzate ρ.

Caso in cui siano presenti più dielettrici diversi

Consideriamo ora il caso in cui il dielettrico non occupi tutto lo spazio interessato al campo elettrico. Rimanendo, come al solito, nell'ipotesi di dielettrici perfetti e isotropi, il caso più generale è quello che diverse porzioni di spazio siano riempite con dielettrici diversi (fra cui eventualmente il vuoto). All'interno di ogni dielettrico continuano a valere le [III.27] (o le [III.28]). Tuttavia sulle superfici di separazione (*Interfacce*) fra un dielettrico e l'altro, la costante dielettrica ε, subisce una discontinuità e dunque non può essere portata dentro o fuori dai segni di derivazione (come abbiamo fatto per ricavare le [III.27] o le [III.28] a partire dalle [III.23]). Dunque sulle superfici di separazione vale la prima delle [III.23] (che hanno validità generale) ma non la prima delle [III.27].

Fisicamente, ciò significa che se una superficie chiusa S comprende al suo interno un tratto di interfaccia, il vettore $\vec{E}$ può avere (e in generale ha in effetti) flusso non nullo a causa delle cariche di polarizzazione presenti sull'interfaccia anche se questa non possiede (come sempre supporremo) cariche localizzate: mentre il flusso di $\vec{D}$ è nullo come conseguenza della prima delle [III.23] che vale su tutto lo spazio e dunque anche sulle interfacce.

Analogamente, sempre sulle superfici di separazione, vale la seconda delle [III.23] ma non la seconda delle [III.28]: fisicamente, mentre la circuitazione di $\vec{D}$ non è in generale nulla su una linea chiusa che attraversi una interfaccia fra dielettrici diversi, è invece sempre nulla la circuitazione di $\vec{E}$.

Dunque all'interno di ogni dielettrico può essere scritta l'equazione di Poisson [II.46] (che è conseguenza del sistema delle [III.27], ovvero delle [III.28]); ma poiché tale equazione non può essere scritta in un dominio che comprenda al suo interno le interfacce, per risolvere il problema dell'elettrostatica è preliminarmente necessario determinare le condizioni di

raccordo del campo elettrico (e/o del vettore spostamento elettrico) sulle superfici di passaggio da un dielettrico all'altro. Ciò può essere fatto applicando il teorema di Gauss al vettore spostamento elettrico $\vec{D}$, e utilizzando la conservatività del vettore campo elettrico $\vec{E}$.

Considerata dunque una superficie Σ di separazione fra dielettrici diversi priva di cariche localizzate, consideriamo un cilindretto con le basi parallele a Σ e altezza dh infinitesima di ordine superiore rispetto alle dimensioni lineari delle basi di area dS. Il flusso di $\vec{D}$ uscente da tale cilindretto deve essere nullo perché all'interno non sono contenute cariche localizzate. Trascurando il flusso attraverso le superfici laterali (il che vale al limite per $dh \to 0$) si ha:

$$0 = \Phi(\vec{D}) = dS\,\hat{n}_1 \cdot \vec{D}_1 + dS\,\hat{n}_2 \cdot \vec{D}_2 = dS\,(D_{n1} - D_{n2})$$

avendo indicato con D_{n1} e D_{n2} le proiezioni di $\vec{D}_1$ e $\vec{D}_2$ sulla stessa normale $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$; da cui:

$$D_{n1} = D_{n2} \qquad \text{[III.31]}$$

ovvero, tenendo conto della [III.26]:

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \qquad \text{[III.31.a]}$$

La componente normale di $\vec{D}$ è continua

Attraversando l'interfaccia fra due dielettrici diversi, la componente di $\vec{D}$ normale all'interfaccia non subisce alcuna discontinuità; mentre la componente normale di $\vec{E}$ è discontinua $\left(\dfrac{E_{n1}}{E_{n2}} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$.

Quanto al vettore $\vec{E}$, il ragionamento da noi svolto nel par. II.1 riferendoci alla superficie di un conduttore, può essere ripetuto tale quale sulla superficie di separazione fra due dielettrici, giungendo alla medesima conclusione espressa dalla eq. [II.2]:

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad \text{[III.32]}$$

ovvero, tenendo conto della [III.26],

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_2} \qquad \text{[III.32.a]}$$

La componente tangenziale di $\vec{E}$ è continua

Attraversando la superficie di separazione fra due dielettrici diversi, la componente di $\vec{E}$ parallela all'interfaccia non subisce alcuna discontinuità; mentre la componente parallela di $\vec{D}$ è discontinua $\left(\dfrac{D_{t1}}{D_{t2}} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$.

Facendo il rapporto membro a membro fra la [III.32] e la [III.31.a] si ha:

$$\frac{E_{t1}}{\varepsilon_1 E_{n1}} = \frac{E_{t2}}{\varepsilon_2 E_{n2}}$$

da cui

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \qquad \text{[III.33]}$$

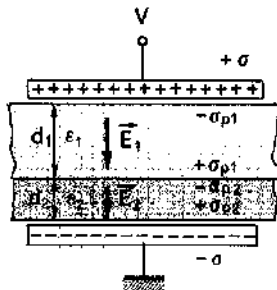
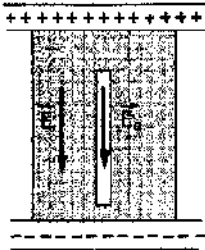
Legge di rifrazione delle linee di forza del campo elettrico

dove $\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{E_{t1}}{E_{n1}}$ e $\operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{E_{t2}}{E_{n2}}$ rappresentano le tangenti degli angoli che rispettivamente $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ formano con la normale all'interfaccia. La [III.33] è

detta **legge di rifrazione delle linee di forza del campo elettrico**. Analogamente, facendo il rapporto fra la [III.32.a] e la [III.31] si trova che $\dfrac{D_{t1}}{\varepsilon_1 D_{n1}} = \dfrac{D_{t2}}{\varepsilon_2 D_{n2}}$; da cui segue che anche $\vec{D}$ soddisfa la stessa legge di rifrazione che vale per $\vec{E}$, come era evidente a priori considerando che in entrambi i mezzi $\vec{D}$ è parallelo ad $\vec{E}$. La [III.31] e la [III.32] costituiscono le leggi di raccordo del campo elettrico $\vec{E}$ e del vettore spostamento $\vec{D}$ all'attraversamento della interfaccia fra due dielettrici, e consentono di individuare univocamente (insieme alle condizioni all'infinito e alle condizioni al contorno sui conduttori) la soluzione dell'equazione di Poisson in presenza di dielettrici.

Definizione operativa di $\vec{E}$ e $\vec{D}$

Osserviamo che la [III.31] e la [III.32] costituiscono anche la base per una definizione operativa del vettore spostamento elettrico $\vec{D}$ e del vettore campo elettrico macroscopico $\vec{E}$ all'interno di un dielettrico.

Per misurare $\vec{E}$, basta infatti effettuare un sottile taglio nel dielettrico *parallelamente* alla direzione del campo: il valore di $\vec{E}_0$ che si misura nella cavità così ricavata coincide, per la [III.32], col campo elettrico macroscopico $\vec{E}$ presente internamente al dielettrico; analogamente, in un taglio eseguito nel dielettrico *ortogonalmente* alla direzione del campo, si misura un valore di $\vec{D}_0$ coincidente col valore di $\vec{D}$ presente internamente al dielettrico.

Esempi

E.III.7. *Un condensatore piano, con armature di area S, è completamente riempito da due lastre dielettriche di materiale diverso parallele alle armature, di spessore rispettivamente d_1 e d_2 e costanti dielettriche relative ε_{r1} e ε_{r2}. Calcolare:*
- *la capacità del condensatore*
- *la densità superficiale σ_P delle cariche di polarizzazione presenti sull'interfaccia fra i due dielettrici se la differenza di potenziale fra le armature è V.*

Sia Q la carica sulle armature, si ha $\sigma = \dfrac{Q}{S}$; trovata la relazione fra Q e V, si ha $C = \dfrac{Q}{V}$.

Per ragioni di simmetria, il campo $\vec{E}$ (e dunque anche il vettore $\vec{D}$) in entrambi i dielettrici è ortogonale alle armature e alla interfaccia fra i due dielettrici; dunque la [III.31] diviene in questo caso

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}\,.$$

Il valore del vettore $\vec{D}$ è determinato dalle sole cariche libere; per esso il teorema di Coulomb [II.5.a] si scrive:

$$D = |\vec{D}| = \sigma = \frac{Q}{S}$$

che ci consente di calcolare il modulo di D in funzione di $\sigma = \dfrac{Q}{S}$. Usando ora la [III.26] possiamo calcolare il campo elettrico nei due dielettrici:

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S} \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}$$

e dunque

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)$$

e infine

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2}}{d_1\varepsilon_{r2} + d_2\varepsilon_{r1}}$$

Si ha poi

$$\sigma_{P1} = P_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1)\, E_1 = \frac{\varepsilon_{r1} - 1}{\varepsilon_{r1}} \cdot \frac{Q}{S}$$

$$\sigma_{P2} = P_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r2} - 1)\, E_2 = \frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{S}$$

Sottraendo membro a membro queste due relazioni, e tenendo conto che:

$$Q = CV = \frac{VS\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{d_1\varepsilon_{r2} + d_2\varepsilon_{r1}}$$

si ha

$$\sigma_P = \sigma_{P1} - \sigma_{P2} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})\, V}{d_1\varepsilon_{r2} + d_2\varepsilon_{r1}}$$

E.III.8. *Supponiamo che i dielettrici di cui all'esempio E.III.7 siano tali da non poter sopportare al loro interno campi elettrici superiori rispettivamente a $E_{R1} = 10^7$ V/m e $E_{R2} = 2 \cdot 10^7$ V/m (rigidità dielettrica). In effetti si chiama rigidità dielettrica E_R il campo elettrico massimo applicabile oltre il quale nel dielettrico si realizzano scariche elettriche che ne modificano irreversibilmente, deteriorandole, le proprietà di isolamento. Se i dielettrici del condensatore hanno le seguenti caratteristiche:*

$$d_1 = 5 \text{ mm} \qquad \varepsilon_{r1} = 2$$
$$d_2 = 7 \text{ mm} \qquad \varepsilon_{r2} = 4$$

calcolare il massimo valore di V applicabile al condensatore senza danneggiarne l'isolamento.

Rigidità dielettrica

RIGIDITÀ DIELETTRICA E_R	
Sostanza	E_R (Volt/cm)
Aria	$3 \cdot 10^4$
Vetro	$(4 \div 6) \cdot 10^5$
Porcellana	$(1 \div 2) \cdot 10^5$

Si ha

$$E_1 = \frac{Q}{S}\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{CV}{S\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{\varepsilon_{r2} V}{d_1\varepsilon_{r2} + d_2\varepsilon_{r1}}$$

$$E_2 = \frac{Q}{S}\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{CV}{S\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{\varepsilon_{r1} V}{d_1\varepsilon_{r2} + d_2\varepsilon_{r1}}$$

dovendo essere $E_1 < E_{R1}$ e $E_2 < E_{R2}$, segue:

$$V < \frac{d_1\varepsilon_{r2} + d_2\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\, E_{R1} = \frac{3{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^7}{4} = 85\ kV$$

$$V < \frac{d_1\varepsilon_{r2} + d_2\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1}}\, E_{R2} = \frac{3{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^7}{2} = 340\ kV$$

Fra i due, il vincolo più stringente è il primo; dunque deve essere $V < 85\ kV$.

E.III.9. *Una sfera conduttrice di raggio R_1, dotata di carica Q, è circondata da un guscio sferico di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 costituito di materiale isolante omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa ε_r. Determinare la configurazione del campo elettrico, del potenziale, e delle distribuzioni di cariche di polarizzazione nello spazio circostante la sfera.*

Per ragioni di simmetria il campo $\vec{E}$ (così come il vettore spostamento elettrico $\vec{D}$) è diretto radialmente, e dunque è ortogonale alla interfaccia Σ fra dielettrico e vuoto. Per la [III.31], $D = D_n$ non subisce discontinuità attraversando l'interfaccia Σ fra dielettrico e vuoto.

L'andamento di D in funzione di r può essere calcolato facilmente applicando il teorema di Gauss a una sfera di raggio r:

$$D(r) = \frac{1}{4\pi r^2} Q$$

Da questa espressione, usando la [III.26], si ricava immediatamente $\vec{E}$:

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{Q}{r^2} & (R_1 \leq r < R_2) \\ E_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r > R_2 \end{cases} \quad \text{[III.34]}$$

Osserviamo che il campo elettrico subisce una discontinuità (coerentemente con la [III.31.a]) attraversando la superficie di separazione. Il potenziale $V(r)$ deve rappresentare una primitiva, rispetto a r, delle [III.34]: e dunque

$$\begin{cases} V(r) = V_1(r) = +\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{Q}{r} + C_1 & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ V(r) = V_2(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} + C_2 & (r \geq R_2) \end{cases} \quad \text{[III.35]}$$

dove le costanti C_1 e C_2 vanno determinate in base alle condizioni al contorno. $V_2(\infty) = 0$ richiede che sia $C_2 = 0$; mentre la condizione

$$V_1(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R_2} + C_1 = V_2(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2}$$

impone che sia

$$C_1 = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0 R_2 \varepsilon_r}.$$

Dunque in definitiva

$$\begin{cases} V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{\varepsilon_r - 1}{R_2}\right) & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (r \geq R_2) \end{cases}$$

In particolare, per $r = R_1$ si ha il potenziale della sfera conduttrice

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\varepsilon_r - 1}{R_2}\right)$$

Quanto alle cariche di polarizzazione, da quanto detto a commento della [III.30] (e anche dall'esempio E.III.6) risulta $\rho_P = 0$ ovunque entro il dielettrico; mentre sulle interfacce, le densità di cariche superficiali $\sigma_P(R_1)$ e $\sigma_P(R_2)$ sono facilmente calcolabili ricorrendo alla [III.12] con l'aiuto della [III.19]:

$$\sigma_P(R_1) = -P(R_1) = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\,E_1(R_1) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_P(R_2) = P(R_2) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\,E_1(R_2) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

Osserviamo che $|\sigma_P(R_1)| \neq |\sigma_P(R_2)|$; tuttavia le cariche di polarizzazione complessive presenti sulle due interfacce sono fra di loro uguali in modulo:

$$|Q_P(R_1)| = |\sigma_P(R_1)|\cdot 4\pi R_1^2 = |\sigma_P(R_2)|\cdot 4\pi R_2^2 = |Q_P(R_2)| = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,|Q|$$

coerentemente con la condizione che il guscio di dielettrico sia, nel suo complesso, elettricamente neutro.

E.III.10. *Consideriamo un condensatore piano: sia S l'area delle armature, e d la loro distanza. L'intercapedine fra le armature viene riempita, fino a coprire metà della superficie S, con un dielettrico di spessore d e costante dielettrica relativa ε_r. Se Q è la carica del condensatore, discutere la configurazione del campo e quella delle cariche libere e delle cariche di polarizzazione. Calcolare inoltre la capacità C del condensatore.*

Trascurando, come sempre, gli effetti di bordo, il campo elettrico (sia quello E_1 nella porzione vuota, che quello E_2 nella porzione riempita di dielettrico) è ortogonale alle armature; e dunque parallelo allo spigolo AB del dielettrico. Dunque in virtù delle [III.32]:

$$E_1 = E_2 \qquad [III.36]$$

Che debba valere la [III.36] è d'altra parte evidente, considerato che ciascuna delle due armature è equipotenziale, e dunque

$$\begin{aligned} E_1 d &= \Delta V_1 = \Delta V \\ E_2 d &= \Delta V_2 = \Delta V \end{aligned} \qquad [III.37]$$

dove ΔV è la differenza di potenziale fra le armature stesse. D'altra parte, applicando a E_1 ed E_2 il teorema di Coulomb (e tenuto conto che il campo elettrico soddisfa il teorema di Gauss considerando sia le cariche libere che quelle di polarizzazione; vedi eq. [III.20]):

$$\begin{cases} E_1 = \sigma_1/\varepsilon_0 \\ E_2 = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_P}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 \\ \sigma_2 - \sigma_P = \varepsilon_0 E_2 \end{cases} \qquad [III.38]$$

Ma per la [III.12] e la [III.19] si ha

$$\sigma_P = P = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0 E_2 = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\,\frac{\Delta V}{d} \qquad [III.39]$$

E inserendo questa espressione nelle [III.38], queste divengono

$$\begin{cases} \sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 \dfrac{\Delta V}{d} \\ \sigma_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{\Delta V}{d} = \varepsilon_r \sigma_1 \end{cases} \qquad \text{[III.40]}$$

Le [III.39] e [III.40] ci forniscono le relazioni che legano σ_1, σ_2, σ_P, E_1 ed E_2 al potenziale ΔV. D'altra parte si ha $Q = \sigma_1 S/2 + \sigma_2 S/2$; moltiplicando dunque le [III.40] per $S/2$ e sommando membro a membro si ha:

$$Q = \left(\frac{\varepsilon_0 S}{2\,d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2\,d} \right) \Delta V$$

da cui

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 S}{2\,d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2\,d} \qquad \text{[III.41]}$$

Il condensatore è dunque equivalente – come era evidente a priori – a due condensatori in parallelo, ciascuno di area $S/2$, uno riempito di dielettrico e l'altro vuoto.

III.6. Energia elettrostatica in presenza di dielettrici

Come abbiamo visto nel paragrafo II.4, l'energia elettrostatica di un sistema di cariche libere caratterizzate dalla distribuzione ρ è rappresentata dalla espressione

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V \, d\tau \qquad \text{[II.28]}$$

dove $\rho(x, y, z)$ è la densità di carica e V è il potenziale elettrostatico generato in (x, y, z) dalla distribuzione di carica descritta dalla densità ρ. Quando sono presenti anche dei dielettrici, l'operazione di posizionamento delle cariche libere, a partire dall'infinito, produce anche una ridistribuzione delle cariche di polarizzazione che modifica il potenziale. L'energia elettrostatica sarà data dal lavoro necessario a posizionare le sole cariche libere, ma nel potenziale realmente presente anche ad effetto delle cariche di polarizzazione; cariche che, fissate le caratteristiche e la geometria dei dielettrici, vengono automaticamente portate nella loro configurazione finale dalla interazione che esse subiscono ad opera delle cariche libere. Il lavoro necessario a costruire la configurazione delle cariche di polarizzazione è dunque contenuto nel lavoro che si compie per produrre la distribuzione delle cariche libere, poiché il potenziale contiene anche il termine di interazione fra cariche libere e cariche di polarizzazione.

Formalmente, la [II.28] continua dunque ad esprimere l'energia elettrostatica anche in presenza di dielettrici; la differenza sta nel fatto che ρ soddisfa la prima delle equazioni [III.23] anziché la [I.36.a], e V è la soluzione dell'equazione dell'elettrostatica in presenza di dielettrici anziché nel vuoto. Gli stessi passaggi che nel caso del vuoto ci hanno permesso di rica-

vare la [II.35] e la [II.36], ci consentono di esprimere l'energia elettrostatica U nella forma

Densità di energia del campo elettrostatico

$u = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

$$U = \int u \, d\tau \qquad \text{[II.35]}$$

con u (generalizzando la [II.36]) dato da:

$$u = \frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2} \qquad \text{[III.42]}$$

Nel caso in cui il dielettrico sia isotropo, si ha:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

Esempio

E.III.11. *Calcolare l'energia elettrostatica del sistema discusso nell'esempio E.III.9, costituito da una sfera conduttrice carica circondata da un guscio di materiale dielettrico.*

Si ha:

$$U = \int_{r=0}^{r=\infty} u \, d\tau = \int_0^{R_1} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, d\tau + \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\, d\tau + \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\cdot d\tau$$

Il primo integrale è nullo perché internamente alla sfera conduttrice è $E = 0$; pertanto:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot 4\pi r^2 \, dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_0} 4\pi r^2 \, dr =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{Q}{4\pi r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 \, dr + \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_{R_2}^{\infty}\left(\frac{Q}{4\pi r^2}\right)^2 4\pi r^2 \, dr =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\varepsilon_r - 1}{R_2}\right)$$

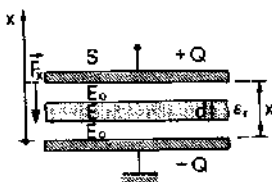
Forze di natura elettrostatica sui dielettrici

Una volta calcolata l'energia elettrostatica del sistema, gli stessi metodi discussi nel par. II.5 (e in particolare il metodo dei lavori virtuali) consentono di calcolare le azioni meccaniche che il campo elettrico esercita sui vari componenti del sistema, cioè sui conduttori e sui dielettrici che costituiscono il sistema stesso.

Esempi

E.III.12. *Un condensatore piano ha tra le armature (di area S e poste a una distanza x) una lastra di materiale dielettrico di spessore d e costante dielettrica relativa ε_r. Il condensatore, isolato, possiede una carica Q. Calcolare la forza F con cui si attraggono le armature.*

Come abbiamo già visto nell'esempio E.III.7 nello spazio fra le armature il vettore spostamento elettrico $\vec{D}$ ha lo stesso valore sia nel vuoto che nel dielettrico, e per il teorema di Coulomb esso vale (eq. [II.5.a]):

$$D = D_0 = \sigma = \frac{Q}{S}$$

Dunque il campo elettrico, rispettivamente nel vuoto e nel dielettrico, vale:

$$E_0 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

L'energia del condensatore vale dunque (eq. [II.35] e [III.42]):

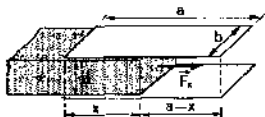
$$U = \frac{1}{2}\int_{\text{vuoto}} \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0 \, d\tau + \frac{1}{2}\int_{\text{dielettrico}} \vec{E} \cdot \vec{D} \, d\tau = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{S^2 \varepsilon_0} S(x-d) + \frac{1}{2} \frac{Q^2 S d}{S^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{S \varepsilon_0 \varepsilon_r} [\varepsilon_r x - d(\varepsilon_r - 1)]$$

Per il principio dei lavori virtuali (eq. [II.43]), si ha

$$F_x = -\frac{\delta U}{\delta x} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{S \varepsilon_0}$$

La forza, attrattiva, è indipendente da ε_r e anche da x (fino a che x è abbastanza piccolo perché siano trascurabili gli effetti di bordo).

E.III.13. *Sia dato un condensatore a facce rettangolari di lati a e b, parallele tra di loro e distanti d. Il condensatore, inizialmente vuoto, viene parzialmente riempito con una lastra di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r e spessore d. Il dielettrico ha forma parallelepipeda e penetra per un tratto di lunghezza x, come in figura, mentre il condensatore, dotato di carica Q, viene mantenuto isolato. Verificare che il dielettrico è risucchiato verso l'interno del condensatore, e calcolare la forza F_x con cui esso è risucchiato.*

Usiamo le stesse notazioni introdotte nell'esempio E.III.10. Ricordando la [III.41], e tenendo conto che in questo caso l'area delle armature riempita di dielettrico vale bx anziché $S/2$ e quella vuota $b(a-x)$ anziché $S/2$ la capacità del condensatore ha, in funzione di x, l'espressione

$$C = \frac{\varepsilon_0 b}{d} [x \varepsilon_r + (a - x)] = \frac{\varepsilon_0 b}{d} [a + x(\varepsilon_r - 1)]$$

Poiché, nell'esempio E.III.10, il campo elettrico sia nel dielettrico che nel vuoto è già stato da noi calcolato in funzione di ΔV (e dunque anche di $Q = \Delta V \cdot C$), il calcolo dell'energia del condensatore potrebbe essere facilmente effettuato mediante la [II.35] e la [III.42]. Tuttavia è più immediato ancora utilizzare la [II.30]

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2 \varepsilon_0 b [a + x(\varepsilon_r - 1)]}$$

Nota U, la forza può essere calcolata tramite la [II.43]:

$$F_x = -\frac{\delta U}{\delta x} = \frac{Q^2 d}{2 \varepsilon_0 b} \frac{(\varepsilon_r - 1)}{[a + x(\varepsilon_r - 1)]^2}$$

Essendo $F_x > 0$, la forza è in effetti una forza di risucchio.

Osservazione: È bene osservare che il campo elettrico, pur essendo uniforme nel condensatore (esso ha lo stesso valore nella parte riempita di dielettrico e nella parte vuota) ha un valore che dipende da x:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{Q}{C d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 b [a + x(\varepsilon_r - 1)]}$$

In particolare, per $x = 0$ (condensatore vuoto),

$$E = E_o = \frac{Q}{\varepsilon_0 a b} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

mentre per $x = a$,

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r a b} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{E_o}{\varepsilon_r}$$

III.7. Macchine elettrostatiche

Macchine elettrostatiche

Come abbiamo visto, per stabilire una certa configurazione elettrostatica (ad esempio per caricare elettricamente uno o più conduttori, in presenza o meno di dielettrici) è necessario compiere del lavoro, trasportando delle cariche *contro* il campo elettrostatico. Concettualmente, si tratta di una operazione molto semplice; ma ci si può chiedere come ciò possa essere effettuato nella *pratica*.

Forza elettromotrice

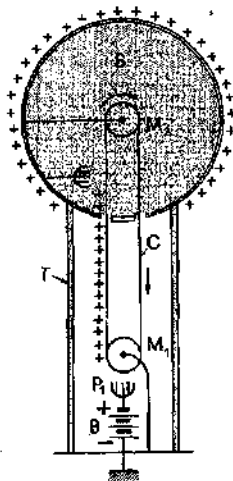
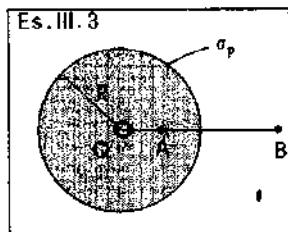
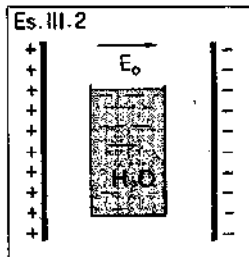
Sono stati realizzati molti tipi di macchine e dispositivi capaci di trasportare delle cariche elettriche compiendo lavoro contro l'azione del campo elettrico; cioè capaci di fornire quella che si chiama una *forza elettromotrice*. Sulla definizione operativa di forza elettromotrice, e su vari dispositivi capaci di generarla, torneremo a più riprese in altri capitoli. Qui ci limitiamo a descrivere lo schema di funzionamento del generatore di *Van der Graaf*. È questa una macchina elettrostatica capace di generare fra due conduttori (o fra un conduttore e la terra) una differenza di potenziale che può arrivare fino a diversi milioni di Volt, ed è comunemente usata per accelerare particelle nucleari. Su principi analoghi si basano molte altre macchine elettrostatiche, la maggior parte delle quali sono però oggi usate solo molto raramente.

Generatore di Van der Graaf

Una macchina di Van der Graaf è rappresentata schematicamente in figura. Una cinghia C è tesa fra due pulegge M_1 ed M_2, e gira per azione di un motore applicato a M_1. La cinghia è realizzata con materiale isolante (ad esempio gomma); mentre le pulegge M_1 ed M_2 sono collegate elettricamente rispettivamente a terra, e a una sfera conduttrice S sostenuta da un tubo T di materiale isolante (ad es. vetro, o ceramica). Per azione della batteria B (il cui principio di funzionamento verrà descritto nel prossimo capitolo) il pettine P_1 è portato a un potenziale di alcune decine di Volt rispetto a terra.

Come abbiamo visto nel par. II.1, un pettine a potenziale positivo per «effetto punta» ionizza il gas circostante, assorbendo dal gas cariche negative e respingendo cariche positive, che così caricano la cinghia. Portate dalla cinghia fin dentro la sfera, queste cariche positive vengono neutralizzate (per lo stesso effetto punta) dal pettine P_2, che così acquisisce cariche positive che poi trasferisce alla sfera S (la sfera S e il pettine costituiscono un unico conduttore, e dunque le cariche si portano sulla superficie esterna di S).

Naturalmente, via via che acquista cariche positive la sfera si porta a un potenziale positivo crescente; e dunque per portare le cariche positive da M_1 (che è a terra) a M_2 la cinghia deve compiere un lavoro, che è fornito ad essa dal motore che muove M_1.

Se non si arresta a un certo punto il processo di carica, il potenziale della sfera continua a salire fino a che non si innescano processi di scarica lungo la colonna isolante o il gas circostante. Se si adottano particolari accorgimenti costruttivi, ciò non avviene – come abbiamo accennato – prima che la sfera abbia raggiunto un potenziale di alcuni milioni di Volt.

Esercizi del III capitolo

III.1. In un recipiente è contenuta acqua allo stato di vapore, alla temperatura $t = 110°C$ ed alla pressione $p = 0{,}7$ atm. In queste condizioni si trova che la suscettività dielettrica vale $\chi = 4 \cdot 10^{-3}$. Quanto vale il momento di dipolo delle molecole d'acqua? (Risposta: $p_0 = 6{,}5 \cdot 10^{-30}\ C\,m$)

III.2 In un campo elettrico uniforme $E_0 = 10^2\ V/cm$ viene inserito un recipiente contenente acqua a temperatura ambiente (vedi figura). Sapendo che la costante dielettrica relativa dell'acqua allo stato liquido vale $\varepsilon_r = 80$ e che il momento di dipolo elettrico della molecola di acqua è $p_0 = 6{,}3 \cdot 10^{-30}\ C\,m$, calcolare la frazione di molecole che si allineano con il campo elettrico. (Risposta: $4{,}16 \cdot 10^{-7}$)

III.3. Una carica positiva puntiforme $Q = 3 \cdot 10^{-10}\ C$ è posta al centro di una sfera di raggio $R = 10$ cm, costituita da materiale dielettrico lineare, omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$. All'esterno c'è il vuoto. Calcolare:

- il valore del campo elettrico E_A ed E_B a distanze dal centro $a = R/2$ e $b = 2R$ rispettivamente;
- la densità superficiale σ_P delle cariche di polarizzazione sulla superficie della sfera.

(Risposte: $E_A = 2{,}69 \cdot 10^2\ V/m$; $E_B = 67{,}4\ V/m$; $\sigma_P = 1{,}79 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$)

III.4 Nella situazione descritta nell'esercizio III.3, calcolare la densità di volume delle cariche di polarizzazione ρ_P all'interno della sfera di materiale dielettrico (in punti diversi dal centro).

III.5. Una sfera metallica di raggio R, isolata e molto lontana da altri corpi, è ricoperta da un guscio sferico di materiale dielettrico lineare, omogeneo ed isotropo il cui raggio interno vale R ed il cui spessore è δ. Ricavare l'espressione della capacità del sistema.

(Risposta: $C = [4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R\,(R + \delta)]/(\varepsilon_r R + \delta)$)

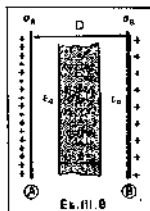
III.6. Un condensatore cilindrico, di altezza h e raggio dell'armatura interna a, è inizialmente nel vuoto con l'armatura interna dotata di carica Q, ed isolato. A partire da questa situazione iniziale, in cui la d.d.p. tra le armature è V_0, il condensatore, mantenuto isolato, viene riempito di un olio isolante (dielettrico lineare, omogeneo ed isotropo). La d.d.p. che si viene così a stabilire tra le armature è $V = V_0/4$. Calcolare la densità superficiale di cariche di polarizzazione $\sigma_P(a)$ sulla superficie dell'isolante che bagna l'armatura interna del condensatore, per i seguenti valori delle grandezze in gioco: $Q = +10^{-6}\ C$, $h = 50$ cm, $a = 3$ cm. (Risposta: $\sigma_P = -7{,}96 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$)

III.7. Una carica elettrica è distribuita uniformemente su un piano indefinito con densità superficiale σ. In uno dei due semispazi, in cui tale piano divide lo spazio, è posta una lastra di dielettrico lineare, omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa ε_r, di spessore d, con una faccia a contatto con il piano carico, mentre l'altro semispazio è vuoto. Ricavare l'espressione per:

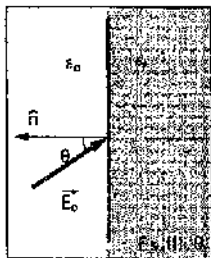
a) il campo elettrico nello spazio (parti vuote e lastra isolante);

b) la densità superficiale di cariche di polarizzazione σ_P sulla superficie della lastra dielettrica a contatto con il piano carico.

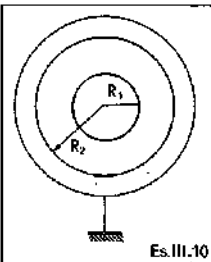
III.8. Due distribuzioni piane ed uniformi di carica (A) e (B), di grande estensione, con densità superficiali $\sigma_A = +3 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$ e $\sigma_B = +2 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$ rispettivamente, sono disposte parallelamente tra loro a distanza $D = 2$ cm. Tra i piani, e parallelamente a questi, è sistemata una lastra di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$, il cui spessore è $\delta = 1$ cm. Calcolare la d.d.p. $(V_A - V_B)$ tra i due piani carichi.

(Risposta: $7{,}05 \cdot 10^2\ V$)

Es.III.8

III.9. Un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0$, di modulo $E_0 = 200\ V/m$, è presente, nel vuoto, all'esterno della faccia piana che delimita una lastra di materiale dielettrico, omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$. Le linee di forza del campo $\vec{E}_0$ formano un angolo $\theta = 30°$ con la normale $\vec{n}$ alla lastra. Calcolare la densità superficiale σ_P delle cariche di polarizzazione sulla superficie della lastra.

(Risposta: $\sigma_P = -1{,}15 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$)

Es.III.9

III.10. Un condensatore sferico di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 ha l'armatura interna a potenziale V e quella esterna a potenziale nullo. Lo spazio tra le armature è completamente riempito di un dielettrico di rigidità dielettrica E_R. Qual'è l'espressione della massima d.d.p. V_{MAX} che si può applicare tra le armature del condensatore?

(Risposta: $V_{MAX} = (R_2 - R_1) \dfrac{R_1}{R_2} E_R$)

Es.III.10

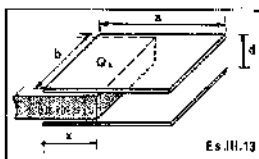
III.11. L'armatura interna di un condensatore sferico ha raggio R_1 ed è rivestita da un guscio sferico dielettrico di raggio interno R_1 e raggio esterno pari a $(R_1 + \delta)$. Il dielettrico è omogeneo ed isotropo ed ha costante dielettrica relativa ε_r. L'armatura esterna ha raggio $R_2 > (R_1 + \delta)$ e lo spazio compreso tra guscio dielettrico ed armatura esterna è vuoto.
Calcolare la capacità del condensatore per i seguenti valori dei parametri: $R_1 = 5$ cm, $\delta = 2$ cm, $R_2 = 10$ cm, $\varepsilon_r = 3$.

(Risposta: $C = 18\ pF$)

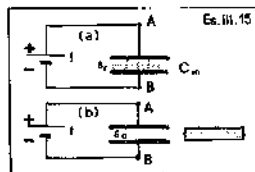
III.12. Una sfera metallica di raggio R si trova immersa in un dielettrico omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3$. La sfera è dotata di carica positiva tale che il campo elettrico nel dielettrico, a distanza $r = 2R$ dal centro della sfera, valga $E(2R) = 10\ V/cm$.
Calcolare la densità di cariche di polarizzazione σ_P sulla superficie del dielettrico a contatto con la sfera carica.

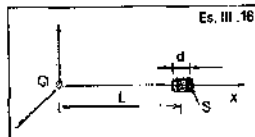
(Risposta: $-7{,}09 \cdot 10^{-8}\ C/m^2$)

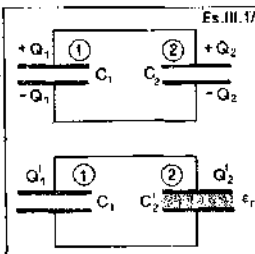
III.13. Un condensatore a facce piane e parallele, rettangolari di dimensioni a e b (vedi figura) è parzialmente riempito, per un tratto $x = a/3$, da una lastra di dielettrico omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$. Se la carica totale sull'armatura superiore è $Q = 10^{-6}\ C$, quanto vale la carica Q_x che si dispone sulla parte di armatura superiore affacciata al dielettrico?

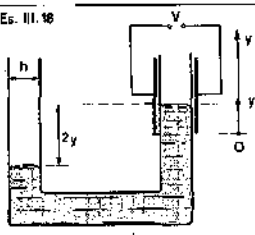
(Risposta: $Q_x = 6{,}67 \cdot 10^{-7}\ C$)

Es.III.13

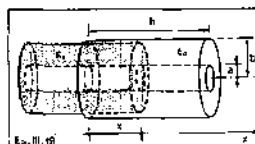
III.14. Un condensatore a facce piane e parallele, rettangolari di lati a e b, separate da una distanza d, è inizialmente nel vuoto e caricato con carica Q. A partire da questa situazione, una porzione di lunghezza x (vedi figura esercizio III.13) viene interamente riempita di dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa ε_r, mentre il sistema è tenuto elettricamente isolato. Calcolare la variazione percentuale di energia elettrostatica del sistema nel caso in cui sia $\varepsilon_r = 3$ ed $x = a/4$.

(Risposta: $\dfrac{\Delta U}{U_{in}} = -33\%$)

III.15. Un condensatore a facce piane e parallele è collegato stabilmente ad un generatore di d.d.p. costante $f = 100$ V. Inizialmente lo spazio tra le armature è riempito con una lastra di dielettrico omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$ (fig. (a)) ed in questo stato la capacità vale $C_{in} = 1$ μF. Il dielettrico viene successivamente spostato, mediante una traslazione parallela alle armature del condensatore, fino a che lo spazio tra le armature non risulta completamente vuoto (fig. (b)).
Quale lavoro elettrico L_G viene compiuto dal generatore?

(Risposta: $L_G = -7{,}5 \cdot 10^{-3}$ J)

III.16. Una carica puntiforme Q è fissata nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$. Lungo l'asse x, a distanza L dall'origine, è posto il centro di un piccolo cilindretto retto, di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa ε_r, avente le generatrici parallele all'asse x. L'altezza del cilindretto è d ($d << L$) e l'area di base è S; anche le basi hanno dimensioni molto piccole rispetto ad L. Ricavare l'espressione della forza che si esercita sul cilindretto.

(Risposta: $\vec{F} = -\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) \frac{Q^2 S d}{8\pi^2 \varepsilon_0 L^5} \hat{x}$)

III.17. Due condensatori (1) e (2) a facce piane e parallele, inizialmente nel vuoto, hanno capacità $C_1 = 1$ μF e $C_2 = 2$ μF rispettivamente e sono collegati in parallelo. Inizialmente ai due condensatori è fornita una carica totale $Q = Q_1 + Q_2 = 2$ μC. A partire da questa situazione iniziale e mantenendo isolato il sistema, nel condensatore (2) viene introdotta una lastra di materiale omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3$ che riempie completamente lo spazio tra le armature. Calcolare le cariche Q_1' e Q_2' presenti sui due condensatori nello stato finale e la variazione complessiva di energia elettrostatica del sistema.

(Risposte: $Q_1' = 0{,}29$ μC; $Q_2' = 1{,}71$ μC; $\Delta U = U_{fin} - U_{in} = -3{,}8 \cdot 10^{-7}$ J)

III.18. Il dispositivo illustrato in figura consta di un tubo ad U aperto alle estremità, a sezione costante rettangolare di lati $h = 3$ mm e b, parzialmente riempito di un isolante liquido di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$ e di densità $\rho = 0{,}75$ g/cm^3. Un braccio del tubo è inserito tra le armature di un condensatore a facce piane e parallele distanti h e di forma quadrata di lato b. Quando il condensatore è scarico, il liquido si dispone in equilibrio con le superfici libere nei due bracci del tubo alla stessa quota $y = 0$, corrispondente all'estremo inferiore delle armature del condensatore.
Se le armature del condensatore vengono portate e mantenute, tramite un opportuno generatore, alla d.d.p. $V = 5000$ V, calcolare a quale quota si viene a disporre, all'equilibrio, la superficie libera del liquido presente nella zona compresa tra le armature del condensatore. (Supporre trascurabile l'effetto della sottile parete di vetro del tubo).

(Risposta: $y = 2{,}5$ mm)

III.19. Un condensatore cilindrico, le cui armature hanno raggi a e b rispettivamente, e la cui lunghezza è h, è parzialmente riempito, per un tratto x, da un guscio cilindrico di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa ε_r. Il guscio cilindrico ha raggi a e b, come mostrato in figura. Le armature del condensatore sono caricate con cariche localizzate $(+Q)$ e $(-Q)$ rispettivamente ed il sistema è isolato. Ricavare l'espressione della forza con cui il dielettrico è risucchiato nel condensatore.

$$\left(\text{Risposta: } F = \frac{Q^2 \ln (b/a)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\varepsilon_r - 1)}{[h + (\varepsilon_r - 1)x]^2}\right)$$

III.20. Una sfera di raggio R, di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa ε_r, è posta nel vuoto in un campo elettrico esterno $\vec{E}_0$ uniforme. La geometria della sfera è tale che il vettore intensità di polarizzazione risulta uniforme all'interno della sfera. Ricavare l'espressione del campo elettrico interno ed esterno alla sfera e disegnarne qualitativamente le linee di forza.

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del III capitolo

III.1. Ricordare le formule [III.8] e [III.19], trascurando il contributo di polarizzazione per deformazione. Riferirsi anche all'esempio [E.III.2]. Il vapore si comporta come un gas perfetto.

III.2. Esprimere l'intensità di polarizzazione come prodotto del numero di dipoli orientati per unità di volume per il momento di dipolo della singola molecola (come se i dipoli fossero orientati perfettamente paralleli al campo elettrico) e confrontare tale espressione con quella in funzione della costante dielettrica e del campo elettrico nel dielettrico

III.3. Utilizzare la proprietà del vettore $\vec{D}$ di essere esprimibile in funzione delle sole cariche libere e tenere conto del fatto che, alla superficie di separazione tra due mezzi, non varia la componente normale di $\vec{D}$

III.4. Riferirsi all'esempio E.III.4, oppure applicare direttamente la relazione che lega ρ_P al vettore intensità di polarizzazione $\vec{P}$.

III.5. Osservare che l'integrale di linea, che fornisce il potenziale del conduttore, può essere spezzato in un contributo per la parte di linea interna al dielettrico ed in un contributo per la parte di linea che si sviluppa nel vuoto (fino all'infinito). Per il calcolo dei relativi campi elettrici, ricordare la proprietà del vettore $\vec{D}$ al passaggio tra due mezzi.

III.6. Determinare ε_r sulla base dell'informazione sul rapporto delle d.d.p. e tenendo conto che il riempimento con dielettrico cambia la capacità in modo noto. Calcolare il campo elettrico $\vec{E}$ e quindi la polarizzazione $\vec{P}$, da cui ricavare σ_P.

III.7. Utilizzare le proprietà del vettore spostamento $\vec{D}$ e ricordare l'esempio E.III.7.

III.8. Calcolare il campo elettrico nelle tre zone in cui viene suddiviso lo spazio compreso tra i piani (A) e (B) e quindi valutare la d.d.p. $(V_A - V_B = \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{l})$.

III.9. La componente normale di $\vec{D}$ non varia al passaggio dal vuoto alla lastra di dielettrico.

III.10. Determinare il valore massimo E_{MAX} del campo E tra le armature per una certa carica Q del condensatore. Esprimere Q in funzione di V, R_1, ε_r ed R_2 e ricavare il valore di V che rende E_{MAX} pari alla rigidità dielettrica. Per la rigidità dielettrica vedere l'esempio E.III.8.

III.11. Applicare la definizione di capacità $C = Q/\Delta V$, esprimendo ΔV come integrale del campo elettrico lungo una linea che, andando dall'armatura interna a quella esterna, si sviluppa parte nel dielettrico e parte nel vuoto. Vedere anche l'esempio E.III.7.

III.12. Esprimere σ_P in funzione di $\bar{E}(R)$, utilizzando la conoscenza di $\bar{E}$ a distanza $(2R)$.

III.13. Riferirsi agli esempi E.III.10 ed E.III.13.

III.14. Riferirsi agli esempi E.III.10, E.III.13, oltre che all'esercizio III.13.

III.15. Il generatore di d.d.p. f è un dispositivo che deve provvedere ad uno spostamento di carica elettrica ΔQ tra i suoi estremi per far passare dallo stato iniziale a quello finale il condensatore, che cambia capacità, ma non d.d.p. tra i suoi estremi A e B.

III.16. Assumere che, per le sue piccole dimensioni, il cilindretto si polarizzi uniformemente. Utilizzare la [I.64].

III.17. Riferirsi all'esempio E.III.13 ed alla conservazione della carica elettrica.

III.18. La forza con cui il dielettrico è risucchiato nel condensatore deve fare equilibrio alla forza peso corrispondente allo squilibrio tra i due rami, di grandezza $2y$. Per la forza elettrica riferirsi agli esempi E.III.10 ed E.III.13, tenendo conto che il principio dei lavori virtuali deve essere applicato a potenziale costante.

III.19. Procedere come nell'esempio E.III.13, ricordando la formula [II.20] per la capacità del condensatore cilindrico.

III.20. L'informazione relativa all'uniformità della polarizzazione $\bar{P}$ all'interno della sfera riconduce il problema all'esempio E.III.3.

Capitolo IV

Corrente elettrica stazionaria

IV.1. Conduttori

In questo capitolo tratteremo cariche elettriche in movimento in conduttori per effetto di campi elettrici. Concentreremo la nostra attenzione sui conduttori metallici, ma gran parte dei concetti sviluppati sono estendibili anche ad altri tipi di conduttori (elettroliti, gas ionizzati, ecc.).

Conduttore

Come abbiamo già visto, un conduttore metallico può essere pensato nella maggior parte dei casi come una struttura reticolare tridimensionale di atomi fissi con un grandissimo numero di elettroni liberi di muoversi all'interno del conduttore e, salvo condizioni particolari, impossibilitati ad uscire dal conduttore stesso.

Elettroni di conduzione o elettroni liberi

Per avere un'idea del numero di elettroni liberi (detti anche *elettroni di conduzione*) presenti in un conduttore, basti pensare che tipicamente si ha dell'ordine di un elettrone libero per atomo. Ad esempio nel rame, di densità $\rho = 8{,}9\ g/cm^3$ e peso atomico $A = 63{,}5$, si ottiene immediatamente un valore di circa $8 \cdot 10^{22}$ elettroni liberi per cm^3. Le dimensioni geometriche degli elettroni sono minori della migliore risoluzione spaziale fino ad oggi realizzata sperimentalmente, che è dell'ordine di $10^{-14}\ cm = 0{,}1\,f$ (fermi).

Un conduttore, in assenza di campi elettrici esterni, può essere dunque assimilato ad una scatola contenente un gran numero di particelle praticamente puntiformi, ciascuna dotata di carica negativa $(-e) = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$, e libere di muoversi in una struttura rigida costituita dagli ioni fissi ai vertici di un reticolo. Una schematizzazione conveniente per interpretare molti fenomeni fisici, è quella di assimilare gli elettroni in un conduttore ad una sorta di gas («gas di elettroni» o «gas di portatori di carica») contenuto in un recipiente chiuso. In assenza di campi elettrici esterni, gli elettroni sono animati dalla sola agitazione termica, urtano contro gli ioni del reticolo e sono in equilibrio termico con il reticolo stesso.

Esempio

Agitazione termica degli elettroni liberi

E.IV.1. ***Supponendo che gli elettroni si comportino come molecole di un gas perfetto, applicando il principio di equipartizione dell'energia, stimare la velocità quadratica media $\bar{v}_T$ con cui si muovono gli elettroni liberi in un conduttore a temperatura ambiente.***

L'equazione che esprime il principio di equipartizione dell'energia per una particella puntiforme (3 gradi di libertà) è:

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} KT$$

con

$$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \qquad K = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}, \qquad T = 300 \text{ K}$$

dunque

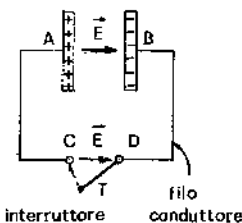
$$\bar{v}_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3KT}{m}} = 1{,}2 \cdot 10^5 \text{ m/s} = 120 \text{ km/s}$$

In realtà questo calcolo classico, che trascura gli effetti del principio di esclusione di Pauli, sottostima di circa un ordine di grandezza la velocità. Vedi par. XII.9.2.

Anche nei casi statici, è bene notarlo, ciò che abbiamo finora considerato come situazioni di equilibrio altro non erano che situazioni di equilibrio ~~statistico~~ dinamico: infatti, come abbiamo osservato nel par. II.7, nessuna carica libera può restare in equilibrio nel campo elettrostatico generato da altre cariche.

Moto di deriva

Nel seguito analizzeremo il caso in cui, per effetto di un campo elettrico esterno, al moto disordinato dovuto all'agitazione termica si sovrapponga un moto di insieme (o «di deriva»), che comporta spostamenti di una carica macroscopicamente misurabile da un punto all'altro del conduttore.

IV.2. Corrente elettrica

Movimento di cariche elettriche

Consideriamo, a titolo di esempio, una situazione statica nota in cui un condensatore sia carico inizialmente alla differenza di potenziale ΔV: fra i punti A e B è presente dunque un campo elettrico $\vec{E}$, tale che

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = \pm \Delta V$$

Supponiamo che a un certo istante l'interruttore T venga chiuso, cosicché le due armature risultino fra loro collegate da un filo conduttore. Subito dopo la chiusura del circuito si osservano alcuni fatti peculiari:

- la differenza di potenziale ΔV (e dunque anche il campo $\vec{E}$) decresce rapidamente, tendendo a zero con legge esponenziale;
- contemporaneamente, tendono a zero le cariche sulle armature, «come se» le cariche positive si spostassero dall'armatura A verso l'armatura B andando ad annullare le cariche negative inizialmente presenti su quest'ultima;
- il filo conduttore si scalda;
- un ago magnetico, eventualmente presente nelle vicinanze del filo, si muove; ecc. ecc.

Come abbiamo appena accennato, dal punto di vista delle cariche elettriche tutto va come se una carica positiva si muovesse dall'armatura positiva verso quella negativa; in realtà sono gli elettroni di conduzione a muoversi in senso inverso, ma per ragioni storiche il fenomeno viene a tutt'oggi descritto riferendosi convenzionalmente a un movimento fittizio di cariche positive.

Quando si ha un movimento ordinato di cariche che, globalmente, si spostano da una posizione a un'altra si usa dire che fra le due posizioni si è avuto un *passaggio di «corrente elettrica»*, la cui definizione operativa verrà precisata fra poco.

Corrente elettrica (di conduzione)

Nell'esempio considerato, il passaggio di corrente è un fenomeno non stazionario che riguarda solo un breve intervallo transitorio di tempo, dopo di che il condensatore si scarica e il movimento di cariche si arresta.

Lo studio dei fenomeni relativi alle correnti elettriche si è sviluppato sistematicamente solo quando è stato possibile realizzare dispositivi capaci di mantenere inalterata la differenza di potenziale (d.d.p.) fra due punti A e B anche in presenza di movimenti di cariche in un conduttore di collegamento posto fra A e B. Tali dispositivi appartengono alla categoria dei *generatori di forza elettromotrice* (pile, accumulatori, macchine elettrogeneratrici, ecc.), che caratterizzeremo nel par. IV.6 e di cui descriveremo più avanti il principio di funzionamento per alcune tipologie significative. Qui vale solo la pena di ricordare che Alessandro Volta negli anni intorno al 1800, scoprì che se in una soluzione acida (ad esempio acido solforico diluito in acqua) si immergono due diversi conduttori metallici («elettrodi»), ad esempio uno di rame e uno di zinco, tra i due conduttori si manifesta una d.d.p. (il rame diventa positivo rispetto allo zinco). Un dispositivo di questo tipo (detto *cella voltaica* o *pila di Volta*) gode della proprietà che se i due elettrodi vengono collegati con un filo conduttore, in questo si manifesta un flusso continuo di cariche senza che la d.d.p. fra gli elettrodi cambi. Nello stesso tempo, nei due elettrodi immersi nella soluzione acida procede una reazione chimica il cui effetto è fra l'altro quello di rifornire agli elettrodi via via nuove cariche, a mano a mano che la carica elettrica fluisce dall'uno all'altro nel conduttore esterno.

Generatori di forza elettromotrice

Cella voltaica

Considerata una sbarretta (o un filo, ecc.) di materiale conduttore internamente al quale si abbia, per effetto di un campo elettrico, un movimento ordinato di cariche, si definisce la *corrente elettrica* I che passa nel conduttore

Corrente elettrica

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{[IV.1]}$$

come il *rapporto fra la carica* dQ che fluisce nel tempo dt attraverso una sezione S del conduttore e *l'intervallo di tempo* dt stesso. Nel sistema S.I., l'unità di misura delle correnti è l'Ampere A, pari a un Coulomb per secondo

Ampere, A

$$1\ \text{A} = \frac{1\ \text{C}}{\text{s}} \qquad \text{[IV.2]}$$

Sulla definizione operativa dell'Ampere, cioè sulla realizzazione pratica del campione di corrente (o, equivalentemente, del campione di carica), torneremo più avanti.

Se con un opportuno dispositivo si realizza una d.d.p. costante nel tempo ai capi di un conduttore, a regime (una volta stabilizzatasi la temperatura, ecc.) si osserva che il conduttore è sede di una corrente costante nel tempo; si dice allora che si è in regime di *corrente stazionaria*.

Corrente stazionaria

Dal punto di vista microscopico, l'azione del campo elettrico attivo internamente al conduttore per conseguenza della d.d.p. applicata, è quella di sovrapporre alla agitazione termica degli elettroni liberi un moto di deriva nella direzione del campo elettrico. Tale moto di deriva, ordinato, avviene con velocità media $\vec{v}_d$ che è molto minore della velocità disordinata $\vec{v}_T$ propria della agitazione termica: come vedremo nel prossimo paragrafo (es. E.IV.3), $\vec{v}_d$ è dell'ordine delle frazioni di mm al secondo, mentre $\vec{v}_T$ (es. E.IV.1) è dell'ordine delle centinaia di km al secondo. Questa circostanza rende ragione del fatto che in presenza di un campo elettrico esterno il moto di deriva non è un moto uniformemente accelerato, ma una volta mediato sugli urti esso avviene con velocità costante proporzionale al campo, analogamente alla caduta di un grave in un mezzo viscoso.

Esempio

E.IV.2. *Giustificare, in base a considerazioni dinamiche, il fatto che la velocità di derivo $\vec{v}_d$ è proporzionale al campo elettrico $\vec{E}$ agente internamente al conduttore.*

In virtù della agitazione termica, in assenza di campo elettrico gli elettroni si muovono disordinatamente, e negli urti che compiono contro gli ioni del reticolo cristallino si portano in equilibrio termico con questi ultimi. In presenza di campo elettrico, un elettrone che emerga con velocità $\vec{v}_T$ da un urto viene accelerato dal campo elettrico, e cede al reticolo nell'urto successivo l'energia in eccesso così acquisita. L'aumento di velocità dovuto al campo elettrico fra un urto e l'altro è dato da

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}'_T - \vec{v}_T = \vec{a}\,\Delta t = \frac{\vec{f}}{m}\Delta t = \frac{-e\vec{E}}{m}\Delta t$$

dove $\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m} = \frac{-e\vec{E}}{m}$ è l'accelerazione, e Δt è l'intervallo di tempo che intercorre fra i due urti. D'altra parte la velocità di deriva $\vec{v}_d$ acquisita fra i due urti dall'elettrone considerato è data dal valor medio di $\Delta\vec{v}$, $\vec{v}_d = \frac{\Delta\vec{v}}{2}$; e dunque:

$$\vec{v}_d = \vec{E}\left(\frac{-e\,\Delta t}{2\,m}\right) = \vec{E}\cdot K \qquad [IV.3]$$

Ma come abbiamo anticipato, e come meglio vedremo nell'esempio E.IV.3, v_d è molto più piccolo di $v_T \simeq v'_T$; e dunque l'intervallo di tempo $\Delta t \simeq \frac{\Delta l}{v_T}$ (dove Δl è la distanza spaziale fra i due urti, il cui valor medio è detto *cammino libero medio*) è praticamente indipendente da E, ed ha lo stesso valore che avrebbe avuto in assenza del campo elettrico. Nella [IV.3], dunque, il fattore di proporzionalità K fra $\vec{v}_d$ ed $\vec{E}$ è indipendente, in ottima approssimazione, da E; la [IV.3] mostra pertanto che la velocità di deriva (antiparallela al campo $\vec{E}$ per il fatto che la carica $-e$ è negativa), ha modulo proporzionale al modulo di $\vec{E}$.

Cammino libero medio

Da quanto fin qui detto, si può già capire come gli ioni della struttura cristallina, continuamente urtati dai portatori liberi, vadano accrescendo la propria energia media acquisendo indirettamente, in forma di energia termica, l'energia che il campo esterno comunica ai portatori; di conseguenza, aumenta la temperatura del conduttore fino all'instaurarsi di una situazione di equilibrio termodinamico con l'ambiente circostante. Dal punto di vista macroscopico, gli effetti termici del passaggio di una corrente in un conduttore verranno discussi nel par. IV.5.

A conclusione di questo paragrafo, osserviamo che il fatto che la velocità di deriva degli elettroni di conduzione sia molto piccola (dell'ordine di frazioni di mm al secondo), non impedisce ai segnali elettrici di propagarsi nei conduttori con velocità prossima alla velocità della luce nel vuoto. In realtà ciò che si propaga è il campo elettrico nel conduttore; all'arrivo di questo campo inizia il moto di deriva degli elettroni di conduzione in tutti i punti del conduttore in cui il campo elettrico è via via presente.

IV.3. Densità di corrente ed equazione di continuità

Densità di corrente $\vec{J}$

Consideriamo un conduttore, all'interno del quale si abbiano n portatori di carica liberi per unità di volume, ciascuno di carica q (se si tratta di elettroni, $q = -e$). Le velocità $\vec{v}_d$ di deriva (che da qui in poi immagineremo sempre mediate su volumetti macroscopicamente significativi, in modo da liberarci delle fluttuazioni microscopiche) sono parallele o antiparallele al campo $\vec{E}$ localmente presente nel conduttore, a seconda che q sia positivo o negativo. Le $\vec{v}_d$ costituiscono un campo vettoriale definito all'interno del conduttore, la cui sezione sia S. Dentro il conduttore, consideriamo un tubo di flusso elementare del campo vettoriale $\vec{v}_d$ e sia $d\vec{S}$ una sezione, non necessariamente normale, di tale tubo elementare. La quantità di carica dq che nel tempo dt passa attraverso la sezione $d\vec{S}$ vale evidentemente

$$dq = nq\vec{v}_d \cdot d\vec{S}\, dt = nq\, v_d\, dS_n\, dt \qquad \text{[IV.4]}$$

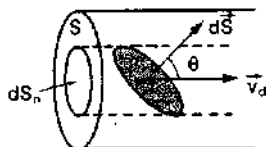
dove $dS_n = dS \cos\theta$ rappresenta la proiezione di $d\vec{S}$ normalmente al tubo di flusso. Alla quantità

$$\vec{J} = nq\,\vec{v}_d \qquad \text{[IV.5]}$$

si dà il nome di *densità di corrente*. Osserviamo che poiché $\vec{v}_d$ è proporzionale a $q\vec{E}$ (vedi eq. [IV.3]), $\vec{J}$ è proporzionale a $q^2\vec{E}$ e dunque è sempre parallelo ad $\vec{E}$ (e concorde in verso). Le dimensioni fisiche di $\vec{J}$ sono

$$[J] = \left[\frac{1}{\mathrm{m}^3} \cdot \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{\mathrm{m}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right] \quad \text{(Ampere/m}^2\text{).}$$

Dalla [IV.4], tenuto conto della [IV.5], segue che la corrente $dI = \dfrac{dq}{dt}$ che passa nel tubo di flusso elementare può essere scritta come:

$$dI = \frac{dq}{dt} = nq\,\vec{v}_d \cdot d\vec{S} = \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad \text{[IV.6]}$$

e dunque integrando su un'intera sezione S del conduttore si ha per la corrente I che attraversa il conduttore

$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad \text{[IV.7]}$$

Dunque la densità di corrente $\vec{J}$ è quel vettore tale che il suo flusso attraverso una sezione S del conduttore fornisce la corrente che attraversa tale sezione.

Mettendo insieme la [IV.5], la [IV.3] e l'espressione per v_T ricavata nell'esempio E.IV.1, possiamo facilmente calcolare l'espressione che lega $\vec{J}$ al campo elettrico $\vec{E}$ nel semplice modello microscopico fin qui utilizzato; si ottiene:

$$\vec{J} = \sigma_{micr} \vec{E} \quad \text{con} \quad \sigma_{micr} = \frac{n q^2 \Delta l}{2\sqrt{3 m K T}} \qquad \text{[IV.8]}$$

dove n è il numero di portatori per unità di volume
q è la carica dei portatori
m è la loro massa
K è la costante di Boltzmann
T è la temperatura assoluta del conduttore
Δl è il cammino libero medio dei portatori nel conduttore.

La [IV.8] verrà da noi ripresa e commentata nel par. IV.4.

Può accadere che la corrente sia portata da più di un tipo di portatore, ad esempio da due tipi con carica di segno opposto. In questo caso, indicando con i pedici (+) e (−) le quantità relative ai due tipi di portatori, si ha:

$$\vec{J} = \vec{J}_{(+)} + \vec{J}_{(-)} = n_{(+)} q_{(+)} \vec{v}_{(+)} + n_{(-)} q_{(-)} \vec{v}_{(-)} \qquad \text{[IV.5.a]}$$

Per quanto osservato sopra, $\vec{J}_{(+)}$ e $\vec{J}_{(-)}$ sono entrambe parallele e concordi ad $\vec{E}$, e il loro contributo si somma in $\vec{J}$.

Esempio

Ordine di grandezza della velocità di deriva v_d

E.IV.3. *Calcolare la velocità media di deriva v_d degli elettroni di conduzione in un filo di rame cilindrico di raggio $r = 1$ mm percorso da una corrente di 1 A.*

Dalla [IV.7] e dalla [IV.5] si ha:

$$I = J \cdot S_n = n q v_d \cdot S_n = n q v_d \pi r^2$$

dove $S_n = \pi r^2$ è la sezione normale del filo. Dunque:

$$v_d = \frac{I}{n q \pi r^2}$$

Nel caso in esame si ha:

$I = 1\ \text{A}$

$n = \dfrac{N \cdot \delta_{cu}}{P_{cu}} = 8{,}5 \cdot 10^{28}$ elettroni/m^3 (N = numero di Avogadro = $6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomi/grammo atomo; δ_{cu} = densità del rame = $8{,}9 \dfrac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$; P_{cu} = peso atomico del rame = 63,5)

$q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb (carica dell'elettrone)

$S = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot (10^{-3}\ \text{m})^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$

Dunque

$$v_d = \frac{1\ \text{A}}{8{,}5 \cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} \sim 2{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}$$

Per confronto col valore di v_T calcolato nell'esempio E.IV.1, vediamo che in effetti $v_d << v_T$; così come avevamo più sopra anticipato.

Principio di conservazione della carica elettrica

Abbiamo già accennato nel primo capitolo che, in un sistema isolato, la carica elettrica totale si conserva. L'applicazione di questo principio permette di correlare fra loro la densità di corrente $\vec{J}$ e la variazione temporale della densità di carica ρ.

Consideriamo una superficie chiusa S in cui, all'istante t, sia racchiusa la carica totale $Q(t)$. Se, nell'intervallo di tempo dt, la carica $Q(t)$ diminuisce di una certa quantità dQ, per la conservazione della carica la quantità dQ deve essere uscita dalla superficie S; e dunque per la [IV.7]:

$$-dQ = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot dt$$

Pertanto:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad \text{[IV.9]}$$

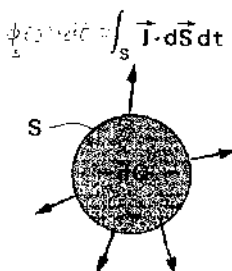
D'altra parte, se ρ è la densità di carica, si ha:

$$Q(t) = \int_\tau \rho(x, y, z, t)\, d\tau$$

(dove τ è il volume racchiuso da S); e dunque, essendo S una superficie fissa (indipendente dal tempo):

$$\frac{dQ}{dt} = \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau \qquad \text{[IV.10]}$$

(osserviamo che Q dipende *solo* dal tempo, e dunque la sua derivata rispetto a t è una derivata totale; mentre ρ dipende da x, y, z, t e pertanto la sua derivata temporale è una derivata parziale). Inoltre, applicando al flusso di $\vec{J}$ il teorema della divergenza:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, d\tau \qquad \text{[IV.11]}$$

Inserendo la [IV.10] e la [IV.11] nella [IV.9] si ha

$$-\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, d\tau$$

Questa relazione deve valere qualunque sia il volume τ su cui abbiamo posto la nostra attenzione; e dunque l'uguaglianza degli integrali implica l'uguaglianza degli integrandi:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \equiv \text{div } \vec{J}$$

ovvero:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \qquad \text{[IV.12]}$$

Equazione di continuità della corrente

Questa equazione prende il nome di *equazione di continuità della corrente*, ed esprime in forma locale il principio di conservazione della carica. Come risulta chiaro dalla deduzione che ne abbiamo fatto, il suo significato fisico è il seguente: *se la carica contenuta all'interno di un certo volume τ cambia nel tempo, in virtù della conservazione della carica tale variazione non può che essere dovuta alla carica che fluisce attraverso la superficie S che racchiude τ.*

In condizioni stazionarie, per definizione tutte le grandezze elettriche sono indipendenti dal tempo; e dunque in particolare $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. In condizioni stazionarie dunque la [IV.12] diviene:

Equazione di continuità nel caso stazionario

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \equiv \text{div } \vec{J} = 0 \qquad \text{[IV.13]}$$

e integrando su un qualunque volume fisso τ (di contorno S):

$$0 = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, d\tau = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad \text{[IV.14]}$$

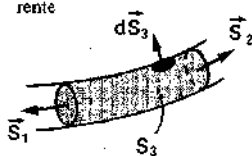
Campo vettoriale solenoidale

In condizioni stazionarie, il flusso della densità di corrente $\vec{J}$ attraverso una qualunque superficie chiusa S è nullo. Un campo vettoriale che abbia divergenza nulla in un certo dominio spaziale è detto *solenoidale* in tale dominio. Dunque *in condizioni stazionarie il vettore densità di corrente $\vec{J}$ è solenoidale in tutto lo spazio.*

In condizioni stazionarie ogni sezione di un filo conduttore è attraversata dalla stessa corrente

Per conseguenza di questa proprietà si ha in particolare che **in condizioni stazionarie la corrente che fluisce attraverso due qualunque sezioni S_1 ed S_2 di un tubo di flusso di $\vec{v}_d$ (e dunque anche attraverso due sezioni di un filo conduttore percorso da corrente) è la stessa.**

Infatti consideriamo il tratto di tubo di flusso compreso fra le sezioni S_1 ed S_2; sia S_3 la superficie laterale di tale porzione del tubo di flusso. Applicando la [IV.14] si ha:

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{[IV.15]}$$

Per definizione di tubo di flusso, $\vec{v}_d$ (e dunque $\vec{J}$) è in ogni punto tangente alle generatrici della superficie laterale S_3, e dunque

$$\int_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 ;$$

per cui la [IV.15] si riduce a:

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_1 + I_2 = 0 \qquad \text{[IV.16]}$$

Le correnti I_1 e I_2 uscenti dalle due sezioni $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$ *sono uguali e opposte*; ovvero, se il verso convenzionale di flusso delle correnti viene assunto concorde per entrambe le sezioni, *la corrente attraverso le due sezioni è la stessa*.

La [IV.16] è immediatamente generalizzabile al caso in cui più fili conduttori, percorsi dalle correnti I_1, I_2, I_3..., rispettivamente, convergano in uno stesso punto (detto *nodo*). Applicando la [IV.14] a una qualunque superficie chiusa S che contenga al suo interno il nodo N, si ottiene:

Prima legge di Kirchhoff: in condizioni stazionarie, la somma algebrica delle correnti uscenti da un nodo è nulla.

$$I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n = 0 \qquad \text{[IV.17]}$$

In condizioni stazionarie, la somma algebrica delle correnti uscenti da un nodo è nulla. Questa legge, detta **prima legge di Kirchhoff** implica *la convenzione che vengano assunte come positive le correnti uscenti dal nodo, e negative quelle entranti* (o viceversa).

IV.4. Resistenza elettrica e legge di Ohm

Il passaggio di corrente elettrica in regime stazionario in conduttori metallici (e in altri solidi omogenei e isotropi cosiddetti «ohmici») è regolato, entro ampi intervalli di variabilità dei parametri in gioco, dalla **legge di Ohm**.

Consideriamo un conduttore metallico e due sue sezioni S_A ed S_B; fra le sezioni S_A ed S_B sia applicata una differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B > 0$ costante nel tempo. Si trova sperimentalmente (Ohm, prima metà dell''800) che fino a che ΔV non raggiunge valori così elevati da provocare scariche elettriche che danneggino irreversibilmente il materiale, sussiste in ottima approssimazione una relazione di proporzionalità fra ΔV e la corrente I che fluisce da A a B:

$$\Delta V \equiv V_A - V_B = RI \qquad \text{[IV.18]}$$

Legge di Ohm

La costante di proporzionalità R è detta *resistenza elettrica* del particolare conduttore considerato. In generale, per un qualunque componente elettrico, la relazione che lega la corrente I che passa nel componente alla differenza di potenziale ΔV ad esso applicata è detta *caratteristica* $(I, \Delta V)$ del componente considerato. Dunque la legge di Ohm ci dice che la caratteristica di un conduttore ohmico (detto anche «*resistore*») è una retta passante per l'origine, la cui pendenza vale

Resistenza elettrica

Curva caratteristica di un conduttore

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{R} = G \qquad \text{[IV.19]}$$

Conduttanza $G = \dfrac{1}{R}$

Simbolo del resistore

COLORE	CIFRA
Nero	0
Marrone	1
Rosso	2
Arancione	3
Giallo	4
Verde	5
Blu	6
Violetto	7
Grigio	8
Bianco	9

La costante $G = \dfrac{1}{R}$ è detta *conduttanza* del conduttore in oggetto.

Nel sistema S.I. l'unità di misura della resistenza è detta ohm (Ω): ha resistenza pari a 1 Ω quel conduttore che è percorso da una corrente di 1 A se ai suoi capi è applicata la d.d.p. di 1 V:

$$[R] = \frac{[V]}{[I]}; \qquad \text{Ohm} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} \left(\Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}\right).$$

Volendo, la caratteristica può essere posta ovviamente anche nella forma $\Delta V = \Delta V(I)$.

Nei disegni schematici di circuiti elettrici, un resistore viene indicato come in figura; analogamente ogni altro componente elettrico viene indicato con un simbolo convenzionale, cosicché ad esempio il semplice circuito introdotto all'inizio del par. IV.2 viene indicato con lo schema mostrato a fianco. Via via che introdurremo altri tipi di componenti elettrici, specificheremo anche il simbolo grafico usato per rappresentarli. I valori della resistenza dei resistori che si trovano in commercio sono spesso rappresentati sul resistore stesso mediante il codice di colori mostrato in figura e specificato nella tabella: i primi due anelli colorati danno un numero intero a due cifre che va moltiplicato per 10 elevato all'esponente indicato dal terzo anello (esempio: rosso arancione verde $= 23 \cdot 10^5\,\Omega = 2{,}3 \cdot 10^6\,\Omega = 2{,}3\,M\Omega$).

La resistenza elettrica di un conduttore ohmico dipende dalla geometria e dal materiale, oltreché dalle condizioni fisiche (e in particolare dalla temperatura). Per conduttori a sezione costante (sbarre, cilindri, fili, ecc.), la resistenza può essere espressa nella forma

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} \qquad \text{[IV.20]}$$

dove l è la lunghezza ed S la sezione; ρ (comunemente usato come simbolo, benché possa confondersi con la densità di carica) è detto *resistività elettrica* del materiale; e $\sigma = 1/\rho$ è detto *conducibilità elettrica*. È immediato verificare che le dimensioni fisiche di ρ sono quelle di $\Omega \cdot$ m (ohm per metro).

Introducendo la [IV.20] nella [IV.18], nel caso di conduttore a forma di sbarra di lunghezza l e sezione di area S, per il quale $\Delta V/l$ è pari al campo elettrico E agente nel conduttore e I/S è pari alla densità di corrente J che in esso circola, otteniamo una semplice relazione (che può essere posta anche in forma vettoriale) che lega fra di loro $\vec{E}$ e $\vec{J}$:

Legge di Ohm in forma istantanea e locale

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad \text{ovvero} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad \text{[IV.21]}$$

con ρ e σ costanti, cioè indipendenti da $\vec{E}$.

In realtà la relazione [IV.21] è più generale della [IV.18]: mentre quest'ultima vale per conduttori ohmici di dimensioni finite, la [IV.21] è una relazione *locale* che *lega fra di loro il campo elettrico presente a un certo istante in una certa posizione del conduttore, e la densità di corrente nello stesso istante e posizione*: la [IV.21] può essere il punto di partenza, in particolare, per il calcolo della resistenza di conduttori ohmici di geometrie complesse (vedi par. IV.8).

Il valore della resistività elettrica per alcuni materiali a temperatura ambiente è *riportato* nella *tabellina* a fianco.

MATERIALE	RESISTIVITÀ ρ ($\Omega \cdot m$)
Al	$2,5 \cdot 10^{-8}$
Ag	$1,5 \cdot 10^{-8}$
Fe	$10 \cdot 10^{-8}$
Zn	$5,8 \cdot 10^{-8}$
Cu	$1,7 \cdot 10^{-8}$
Legno	10^{8}
Vetro	10^{10}
Plastiche	$10^{13} - 10^{16}$
Ceramica	10^{16}

Confrontando la [IV.21] con la [IV.8] vediamo che l'espressione

$$\sigma_{micr} = \frac{n q^2 \Delta l}{2\sqrt{3 m KT}} \qquad \text{[IV.8]}$$

rappresenta, nel semplice modello utilizzato, l'interpretazione microscopica della conducibilità elettrica. Tale espressione (con le approssimazioni fatte per ricavarla) ci fornisce le seguenti indicazioni:

a) ci aspettiamo che la [IV.21] (e la legge di Ohm [IV.18]) valga per materiali in cui il numero di portatori n per unità di volume sia costante (indipendente da $\vec{E}$). In molti materiali, e in alcune condizioni di campo $\vec{E}$, questa ipotesi non è verificata: vedremo in particolare nel paragrafo IV.12 il caso della conduzione elettrica in gas rarefatti;

b) per la validità della [IV.21] è necessario che la velocità di deriva v_d sia molto minore della velocità di agitazione termica v_T. Questa ipotesi è ampiamente soddisfatta nei conduttori a temperatura ambiente; ma a temperature molto basse possono instaurarsi regimi di conduzione profondamente diversi (vedi par. IV.13);

c) il fatto che $\vec{J}$ sia parallelo a $\vec{E}$, e che il fattore di proporzionalità σ abbia valore indipendente dalla direzione di $\vec{E}$, vale nell'ipotesi che il cammino libero medio Δl sia lo stesso in tutte le direzioni. Ciò vale per materiali isotropi, ma in materiali anisotropi la [IV.21] è sostituita da una relazione del tipo

$$\vec{J} = \|\sigma\|\vec{E}$$

Tensore conducibilità elettrica

dove $\|\sigma\|$ è una matrice detta *tensore conducibilità elettrica*;

d) ci aspettiamo che la resistività $\rho = 1/\sigma$ aumenti con la temperatura, proporzionalmente alla radice quadrata della temperatura assoluta.

Intorno alla temperatura ambiente, l'andamento di ρ con la temperatura centigrada t, è ben descritto da uno sviluppo al primo ordine del *tipo*

$$\rho(t) = \rho_0(1 + \alpha t) \qquad \text{[IV.22]}$$

dove ρ_0 rappresenta la resistività a 0°C ed α è un coefficiente con le dimensioni di un inverso della temperatura detto *coefficiente di temperatura*. Valori tipici del coefficiente di temperatura sono riportati in tabella. È da osservare che per i metalli α è positivo, coerentemente con quanto ci si aspetta in base alla [IV.8]. Al contrario per gli elettroliti, e per alcuni materiali non metallici come il carbonio, il coefficiente di temperatura è negativo. Lo stesso accade per i materiali appartenenti alla categoria cosiddetta dei *semiconduttori*; ciò è dovuto al fatto che in questi materiali il numero di portatori non è indipendente dalla temperatura, ma aumenta con la temperatura stessa via via che l'agitazione termica trasferisce elettroni dallo stato legato (*«banda di valenza»*) allo stato libero (*«banda di conduzione»*).

Coefficiente di temperatura α

CONDUTTORE	α (°C^{-1})
Fe	$5 \cdot 10^{-3}$
Ni	$6 \cdot 10^{-3}$
Cu	$4 \cdot 10^{-3}$

Esempio

E.IV.4. *Calcolare la variazione percentuale di resistività (e dunque di resistenza) di un conduttore di rame, al passare della temperatura da 0°C a 20°C.*

Secondo la [IV.22] si ha:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\rho(t) - \rho_0}{\rho_0} = \alpha t = 4 \cdot 10^{-3}\,°C^{-1} \cdot 20°C = 8 \cdot 10^{-2} = 8\%$$

IV.5. Fenomeni dissipativi nei conduttori percorsi da corrente

Abbiamo già accennato al fatto che uno degli effetti del passaggio di corrente in un conduttore è il riscaldamento del filo stesso: si tratta del resto di un fenomeno che ha molte applicazioni pratiche (lampade a incandescenza, stufette elettriche, scaldabagni, ecc.). Formuliamo ora in termini quantitativi la legge che descrive tale fenomeno nel caso di corrente stazionaria.

Consideriamo un tratto di conduttore di estremi A e B, a potenziale costante pari a V_A e V_B rispettivamente, sede di una corrente I stazionaria. Nell'intervallo di tempo dt, l'effetto della corrente è quello di spostare di un tratto $dl = v_d\, dt$ le cariche libere: cosicché le cariche che all'istante t occupavano lo spazio AB rappresentato in figura dal rettangolo a tratto continuo, all'istante $t + dt$ occupano lo spazio $A'B'$ delimitato dalla linea tratteggiata. Ciò equivale a spostare la carica $dq = I\,dt$ dal potenziale V_A al potenziale V_B; e ciò facendo il campo elettrostatico compie un lavoro elementare pari a

$$dL = dQ\,(V_A - V_B) = I\,\Delta V\,dt$$

La potenza sviluppata dal campo elettrico (lavoro per unità di tempo) è dunque

Legge di Joule

$$W = \frac{dL}{dt} = I\,\Delta V = I\,(V_A - V_B) \qquad \text{[IV.23]}$$

Questa relazione va sotto il nome di **legge di Joule**. Poiché il fenomeno, dal punto di vista elettrico e dinamico, è stazionario, l'energia così spesa dal campo elettrico non può trasformarsi né in energia potenziale né in energia cinetica: negli urti fra portatori e reticolo cristallino essa si trasforma in moto di agitazione disordinato, cioè in energia termica. Il conduttore si riscalda, e a regime disperde verso l'ambiente circostante (nella forma di calore e/o di luce) la potenza elettrica dissipata dal campo nel conduttore. Il fenomeno prende il nome di *effetto Joule*.

Effetto Joule

Se il conduttore è un conduttore ohmico, I e ΔV sono fra di loro legati dalla legge di Ohm [IV.18], che sostituita nella [IV.23] ci consente di dare ad essa le forme fra di loro equivalenti:

$$W = I\,\Delta V = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R} \qquad \text{[IV.24]}$$

In alcuni casi è conveniente far riferimento a un'espressione locale della legge di Joule, che consenta di calcolare la potenza dissipata in un volume

infinitesimo $d\tau$ del conduttore. Tale espressione locale può essere facilmente ricavata come segue. Il lavoro compiuto dal campo elettrico nell'intervallo di tempo dt sugli $n\,d\tau$ portatori presenti nel volume $d\tau$ è dato da:

Forma locale della legge di Joule

$$dL = n\,d\tau\, q\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

dove $d\vec{l} = \vec{v}_d dt$ è lo spostamento medio subito dai portatori nel tempo dt; dunque

$$dL = n\,d\tau\, q\vec{E}\cdot\vec{v}_d dt = \vec{E}\cdot(n q\,\vec{v}_d)\,d\tau\,dt\,.$$

Dividendo per $d\tau\,dt$, e tenendo conto che $nq\,\vec{v}_d$ rappresenta la densità di corrente $\vec{J}$, si ottiene

$$w = \vec{E}\cdot\vec{J} \qquad \text{[IV.25]}$$

Densità di potenza dissipata per effetto Joule

dove $w = \dfrac{dL}{d\tau\,dt}$ rappresenta la potenza dissipata per effetto Joule nell'unità di volume del conduttore (*densità di potenza*). Naturalmente, nei conduttori ohmici in cui $\vec{J}$ è parallelo a $\vec{E}$, il prodotto scalare $\vec{E}\cdot\vec{J}$ si riduce al prodotto EJ dei moduli. Nel sistema S.I., la densità di potenza [IV.25] si misura in w/m^3.

IV.6. Forza elettromotrice e generatori elettrici

Generatori elettrici

Abbiamo accennato ai *generatori di forza elettromotrice* (detti anche *generatori elettrici* o *elettrogeneratori*): dispositivi capaci di mantenere una d.d.p. costante ai capi di un conduttore percorso da corrente. Poiché il passaggio di corrente nei conduttori, caratterizzati da una loro resistenza elettrica, comporta dissipazione di energia per effetto Joule, il generatore G è anche l'elemento del circuito che deve rifornire questa energia con continuità via via che essa viene dissipata. In questo paragrafo ci proponiamo di precisare la definizione delle grandezze che caratterizzano le prestazioni di questi dispositivi.

Consideriamo il semplice circuito rappresentato in figura, costituito da un generatore G fra i cui elettrodi A e B (detti anche *morsetti*) è posto il resistore R (detto anche «carico»). L'elettrodo positivo viene detto anche **anodo**, e quello negativo **catodo**. Convenzionalmente, il generatore G viene indicato con il disegno schematico mostrato a fianco; cosicché l'intero circuito viene schematizzato come mostrato nel disegno che segue.

disegno schematico di un elettrogeneratore

In virtù della differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B$ che il generatore mantiene ai capi della resistenza R, in quest'ultima circola una corrente I da A verso B, legata a ΔV dalla legge di Ohm [IV.18]:

$$V_A - V_B = RI \qquad \text{[IV.18]}$$

Per la conservazione della carica, internamente al generatore la stessa corrente I deve circolare da B verso A.

Nel resistore, chi fa circolare la corrente è il campo elettrostatico $\vec{E}_s$. Nel tempo dt passa in R la carica $dQ = I\,dt$; e il campo elettrostatico $\vec{E}_s$ compie su di essa *lavoro positivo* $dL_{AB}^{(s)}$ pari a:

$$dL_{AB}^{(s)} = \int_A^B dQ\,\vec{E}_s\cdot d\vec{l} = dQ\int_A^B \vec{E}_s\cdot d\vec{l} = dQ\,(V_A - V_B) = I\,(V_A - V_B)\,dt \qquad \text{[IV.26]}$$

Come abbiamo visto nel par. IV.5, tale lavoro si dissipa nella forma di calore, cosicché il bilancio energetico nel resistore si chiude in pareggio.

Internamente al generatore, una carica uguale pari a $dQ = I\,dt$ si è però mossa da B ad A; e su di essa il campo elettrostatico compie lavoro $dL_{BA}^{(s)}$ pari a:

$$dL_{BA}^{(s)} = \int_B^A dQ\,\vec{E}_s \cdot d\vec{l} = dQ\,(V_B - V_A) = I\,(V_B - V_A)\,dt = -\,dL_{AB}^{(s)} \qquad \text{[IV.27]}$$

Il campo elettrostatico, nella resistenza determina la circolazione della corrente compiendo sulla carica elementare dQ il *lavoro positivo* $dL_{AB}^{(s)}$ che compensa le dissipazioni; dentro il generatore si oppone alla circolazione della corrente, compiendo sulla carica dQ *lavoro negativo* $dL_{BA}^{(s)} = -\,dL_{AB}^{(s)}$.

Osserviamo che nello scrivere la [IV.26] e la [IV.27] abbiamo usato la proprietà di conservatività del campo elettrostatico

$$\int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$$

Campo elettromotore

Dunque, affinché la circolazione di corrente avvenga è necessario che internamente al generatore agisca sulle cariche anche un campo non conservativo di natura non elettrostatica, detto *campo elettromotore* $\vec{E}_e$, il quale muove le cariche *contro il campo elettrostatico* compensando il lavoro negativo [IV.27], e compensando inoltre gli effetti dissipativi $dL^{(d)}$ sempre presenti quando le cariche si muovono in un mezzo materiale. Dunque:

$$dL^{(e)} = \int_B^A dQ\,\vec{E}_e \cdot d\vec{l} = dL_{AB}^{(s)} + dL^{(d)} = I\,(V_A - V_B)\,dt + dL^{(d)} \qquad \text{[IV.28]}$$

Il campo elettromotore $\vec{E}_e$, che rappresenta *la forza* non elettrostatica *agente sull'unità di carica dentro il generatore*, può essere di origine diversa: meccanica (nelle dinamo, alternatori, macchine elettrostatiche, ecc.) chimica (pile, accumulatori); luminosa (celle fotovoltaiche); ecc.

Il lavoro compiuto dal campo elettromotore sulla carica unitaria

$$\frac{dL^{(e)}}{dQ} = \int_B^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = f \qquad \text{[IV.29]}$$

Forza elettromotrice

$$f = \oint (\vec{E}_e + \vec{E}_s) \cdot d\vec{l}$$

viene detto *forza elettromotrice* del generatore. Nello scrivere la [IV.29] abbiamo tenuto conto del fatto che il campo elettromotore è nullo fuori del generatore, per cui

$$\int_B^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l}$$

In realtà, lo scrivere la forza elettromotrice come circuitazione del campo elettromotore anziché come integrale del campo elettromotore stesso eseguito fra B ed A (ovvero anche come circuitazione del campo totale $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_s$, visto che è nulla la circuitazione del campo elettrostatico $\vec{E}_s$) fornisce per f un'espressione più generale, considerato che nel caso che la forza elettromotrice sia dovuta al fenomeno dell'induzione elettromagnetica, essa è di norma distribuita su tutto il circuito, come avremo modo di approfondire nel capitolo VII.

A dispetto del suo nome storico, la forza elettromotrice f rappresenta *un lavoro per unità di carica*, e si misura pertanto in $\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \text{Volt}$.

Dimensioni fisiche della forza elettromotrice

Usando la definizione [IV.29] della forza elettromotrice f, la [IV.28] può essere scritta come:

$$f\,dQ = I\,(V_A - V_B)\,dt + dL^{(d)}$$

Dividendo questa relazione per il tempo elementare dt, otteniamo la potenza w erogata dal generatore

$$w = fI = I(V_A - V_B) + w^{(d)} \qquad \text{[IV.31]}$$

Bilancio energetico istantaneo del generatore

dove

$$w^{(d)} = \frac{dL^{(d)}}{dt}$$

rappresenta la potenza che si dissipa in effetti termici dentro il generatore quando questo è percorso dalla corrente I. Dividendo la [IV.31] per I, si ha:

Generatori a dissipazione ohmica

$$\Delta V \equiv V_A - V_B = f - \frac{w^{(d)}}{I} \qquad \text{[IV.32]}$$

Qualora la dissipazione entro il generatore abbia, in funzione della corrente I, l'andamento caratteristico dei conduttori ohmici (eq. [IV.24]), possiamo porre:

$$w^{(d)} = I^2 r \qquad \text{[IV.33]}$$

Resistenza interna del generatore

dove r è detto *resistenza interna del generatore*; la [IV.32] diviene allora:

$$\Delta V = V_A - V_B = f - Ir \qquad \text{[IV.34]}$$

L'ipotesi di dissipazione ohmica costituisce, per la maggior parte dei generatori reali, una approssimazione, non di rado assai rozza. Tuttavia del tutto in generale si ha che la quantità $w^{(d)}/I$ (che per i generatori a dissipazione ohmica vale Ir) tende comunque a zero al tendere di I a zero. Per $I = 0$ (generatore aperto, cioè senza alcun carico fra i morsetti) la [IV.32] diviene dunque:

Generatore aperto

$$(\text{per } I \Rightarrow 0) \qquad V_A - V_B = f \qquad \text{[IV.35]}$$

La forza elettromotrice f coincide con la differenza di potenziale ΔV presente ai morsetti del generatore a circuito aperto: questa costituisce anche la definizione operativa della forza elettromotrice f, in quanto indica un modo per misurarla sperimentalmente. La [IV.32] mostra che, quando nel generatore circola la corrente I, la differenza di potenziale ΔV ai morsetti non è pari al valore f che si ha a circuito aperto, ma è diminuita di una quantità $w^{(d)}/I$ ($w^{(d)}/I = Ir$ nel caso di generatore a dissipazione ohmica). Solo nel caso ideale di assenza di dissipazione interna ($r = 0$ per generatori a dissipazione ohmica), la differenza di potenziale ΔV è pari ad f indipendentemente dalla corrente I erogata: si parla allora di *generatore perfetto* o *generatore ideale di tensione*

Definizione operativa di forza elettromotrice

Generatore ideale di tensione

Coerentemente con la definizione da noi data nel par. IV.4, la [IV.32] (o la [IV.34] per un generatore a dissipazione ohmica) rappresenta la *curva caratteristica $\Delta V = \Delta V(I)$ del generatore*. La [IV.34] è rappresentata da una retta, per la quale $tg\beta = r$; se il generatore è ideale ($r = 0$), la retta è verticale. In generale, la curva caratteristica è più complicata (vedi ad es. la linea tratteggiata in figura), e in questo caso la resistenza interna è definita tramite la pendenza della curva caratteristica al punto di lavoro.

Caratteristica di un generatore ohmico

Quando il generatore viene usato per alimentare un qualunque componente elettrico C (lampada, motore elettrico, ecc.), ai capi di C agisce la stessa differenza di potenziale ΔV presente ai morsetti del generatore G; e inoltre C e G sono attraversati dalla stessa corrente I. Pertanto, se $I = I_C(\Delta V)$ è la curva caratteristica di C, il *punto di lavoro* del generatore (cioè la differenza di potenziale ΔV e la corrente I da esso erogata) può essere trovato facendo sistema fra la [IV.32] e la curva caratteristica $I = I_C(\Delta V)$ del componente C; ciò può essere fatto sia algebricamente che graficamente. Ad esempio, se il componente C è schematizzabile come un conduttore ohmico di resistenza R, la sua caratteristica $I = I_C(\Delta V)$ è la retta [IV.18] . Se anche il generatore è a dissipazione ohmica, facendo sistema fra la [IV.34] e la [IV.18] si ha semplicemente:

$$\begin{cases} \Delta V = f - Ir \\ \Delta V = I \cdot R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = I(r+R) \\ I = \dfrac{f}{r+R} \end{cases} \qquad \text{[IV.36]}$$

Graficamente, il punto di lavoro è indicato con la lettera P nel grafico a fianco.

Molto spesso, con il simbolo da noi usato per indicare il generatore G si indica in realtà un generatore ideale di tensione; mentre un generatore reale viene rappresentato indicando esplicitamente, in serie al generatore, la resistenza interna r. Il semplice circuito da noi usato per l'analisi condotta in questo paragrafo viene allora indicato con il disegno rappresentato a fianco. Nello stesso disegno sono anche indicate le differenze di potenziale presenti ai capi dei componenti del circuito (siano essi «reali» come il resistore R, o «fittizi» come la resistenza interna r) coerentemente con la [IV.36]: osserviamo che i morsetti del generatore sono indicati, come al solito, dalle lettere A e B.

Esempio

E.IV.5. *Può essere istruttivo illustrare i concetti introdotti in questo paragrafo con un classico esempio di analogia meccanica.*

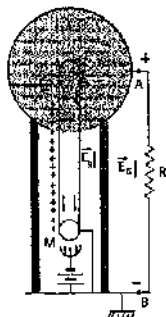
Consideriamo un dispositivo costituito da un piano inclinato su cui siano infissi molti chiodi (letto di fakiro). Delle palline di piombo, scivolando lungo il piano inclinato per effetto della forza di gravità (conservativa) urtano ripetutamente contro i chiodi in modo anelastico. A causa dei numerosi urti, le palline sono accelerate solo per brevi tratti dalla forza peso: al successivo urto esse cedono ai chiodi l'energia acquisita fra un urto e l'altro. Mediamente, il moto delle palline è praticamente uniforme, con una piccola velocità diretta lungo la retta di massima pendenza del piano inclinato. Il lavoro compiuto dalla forza peso non si trasforma così in energia cinetica, ma si trasforma in calore negli urti fra le palline e i chiodi. Alla fine della discesa, le palline si ripresentano, praticamente ferme, alla base del piano inclinato. Per risalire la sommità, esse debbono spostarsi di un tratto verticale h contro la forza peso; la stessa peraltro che aveva causato la discesa. La risalita in

verticale può essere realizzata con un opportuno sistema di ascensori che prendono le palline alla base e le riportano in cima. Il lavoro che questi ascensori (equivalenti al campo elettromotore) compiono per portare dalla base alla sommità la massa unitaria (analoga alla carica unitaria) contro la forza peso (analogo al campo elettrostatico agente internamente al generatore) è l'analogo meccanico della forza elettromotrice.

La circuitazione, su un percorso completo di una pallina, del campo delle forze su di essa agenti, non è nulla: è nulla la parte relativa al campo gravitazionale (che, come il campo elettrostatico, è conservativo); ma è diversa da zero la parte relativa alla forza che muove l'ascensore (come nella forza elettromotrice, $f = \oint (\vec{E}_e + \vec{E}_s) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l}$).

IV.7. Alcuni esempi di generatori elettrici

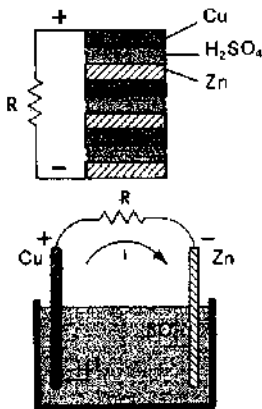
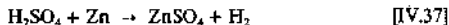
Forza elettromotrice della pila di Volta

Un esempio di notevole valore illustrativo, anche se poco pratico come generatore di forza elettromotrice, è rappresentato dalla macchina di Van der Graaf già illustrata nel par. III.7. Supponiamo che la macchina sia chiusa all'esterno su una resistenza R. Il campo elettrostatico $\vec{E}_s$ generato dalla macchina (e diretto verso il basso in figura) produce il passaggio di corrente nella resistenza R; ma all'interno si oppone al moto della cinghia isolante carica positivamente in moto verso l'alto. Per muovere la cinghia verso l'alto occorre una forza, esercitata dal motore M, opposta alla forza repulsiva elettrostatica dovuta al campo $\vec{E}_s$. Il lavoro necessario a spostare la carica unitaria da B fino ad A è la forza elettomotrice di questo generatore. In questo caso si tratta di lavoro meccanico erogato dal motore M.

Di uso assai comune sono generatori elettrici in cui la forza elettromotrice esiste a spese di energia chimica (pile, accumulatori).

Il prototipo di pila elettrica è la pila di Volta, cui abbiamo già accennato nel par. IV.2. Essa è costituita da due elettrodi, uno di rame (Cu) e uno di zinco (Zn) immersi in una soluzione acquosa di acido solforico; il primo esemplare costruito da Volta era in realtà costituito da una piccola colonna («pila») di coppie di dischi CuZn, separate da dischi di feltro imbevuti in soluzione acida. Oggi, viene comunemente indicato col nome di *pila* un unico elemento costituito da due elettrodi (Cu e Zn nella pila di Volta) immersi in soluzione acida.

Per questioni di affinità elettrochimica, gli ioni SO_4^{--} migrano verso l'elettrodo di zinco (catodo): depositando in esso due cariche negative, questo ione si combina con un atomo di zinco formando una molecola di solfato di zinco $ZnSO_4$. Verso l'elettrodo di rame (anodo) migrano invece gli ioni idrogeno H^+; depositando sull'anodo la carica positiva, questi ioni si liberano verso l'esterno nella forma di bollicine di idrogeno gassoso.

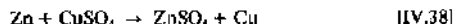
A circuito aperto (cioè in assenza di resistenza R che colleghi fra di loro all'esterno i due elettrodi) il processo elettrochimico si arresta quando, in virtù delle cariche negative accumulate dal catodo e delle cariche positive accumulate dall'anodo, fra i due elettrodi si è stabilita *una differenza di potenziale $f \simeq 1$ Volt; questa rappresenta la forza elettromotrice della pila di Volta.* Chiudendo la pila su un resistore, in quest'ultimo circola una corrente descritta dalla legge [IV.34]. Il processo dovrebbe in linea di principio procedere fino a che tutto l'acido solforico H_2SO_4 non si è trasformato in solfato di zinco secondo la reazione

$$H_2SO_4 + Zn \rightarrow ZnSO_4 + H_2 \qquad [IV.37]$$

Polarizzazione della pila

In realtà, la forza elettromotrice della pila di Volta va progressivamente diminuendo a causa di un deterioramento dell'anodo di rame dovuto ad adsorbimento in esso di idrogeno (*polarizzazione della pila*). La forza elettromotrice della pila può essere riportata a questo punto al suo valore iniziale liberando l'anodo del suo strato superficiale inquinato da idrogeno. Ribadiamo che nella pila di Volta l'energia necessaria a vincere la repulsione elettrostatica (gli ioni negativi migrano verso il catodo negativo; gli ioni positivi verso l'anodo positivo) si rende disponibile a spese di una diminuzione dell'energia libera del sistema soluzione/elettrodi. In altri termini, il sistema $ZnSO_4 + H_2$ ha energia libera minore rispetto al sistema $H_2SO_4 + Zn$.

Pila di Daniell

Per evitare il fenomeno della polarizzazione, Daniell (1836) realizzò la pila mostrata in figura. Nella pila Daniell, la cui forza elettromotrice è $f = 1{,}1$ Volt, la reazione che ha luogo è sostanzialmente

$$Zn + CuSO_4 \rightarrow ZnSO_4 + Cu \qquad [IV.38]$$

Lo zinco del membro a sinistra della [IV.38] è fornito dal catodo; mentre il rame che si libera a destra della [IV.38] si deposita sull'anodo.

Osserviamo che inizialmente l'anodo Cu è immerso in $CuSO_4$, mentre il catodo Zn è immerso in $ZnSO_4$. Via via che la reazione procede, il catodo continua ad essere immerso in $ZnSO_4$; mentre la soluzione di $CuSO_4$ in cui è immerso l'anodo si trasforma progressivamente in $ZnSO_4$. Quando questa reazione è completa (tutto il $CuSO_4$ si è trasformato in $ZnSO_4$) la pila è scarica.

Un'importante caratteristica della pila di Daniell è la *reversibilità*: in altri termini, se alimentando la pila con un opportuno generatore si fa passare in essa una corrente in senso inverso, la reazione [IV.38] procede in senso inverso

$$Cu + ZnSO_4 \rightarrow Zn + CuSO_4 \qquad [IV.38.a]$$

Accumulatore al piombo-acido

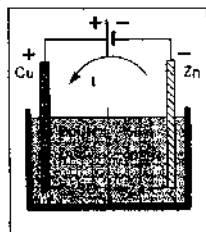
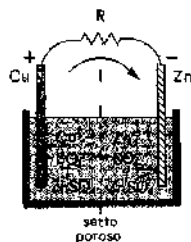
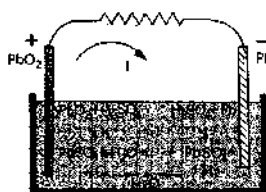
Partendo da una pila inizialmente scarica si può così *ricaricarla*. Una pila reversibile è detta anche *accumulatore* di energia elettrica. L'accumulatore di uso più comune è l'accumulatore cosiddetto al *piombo-acido*, il cui grande vantaggio è il basso costo; mentre il principale svantaggio è l'elevato peso.

Lo schema di funzionamento dell'accumulatore al piombo-acido in fase di scarica è mostrato in figura; si tratta in verità di uno schema semplificato, poiché nella realtà si realizzano diversi passaggi intermedi. In fase di carica, i processi si invertono.

La forza elettromotrice di un accumulatore al Pb/acido è di circa 2,4 Volt, anche se si usa attribuirgli un «valore nominale» di 2 Volt.

Mettendo in serie più accumulatori (il negativo del primo al positivo del secondo e così via) si ottiene una *batteria* di accumulatori. Sono comunemente in commercio batterie costituite da 6 elementi in serie, la cui forza elettromotrice nominale è dunque 12 Volt: sono queste in particolare le batterie usate nelle automobili.

Capacità di carica di una batteria

Con *capacità di carica* di una batteria si intende la carica in essa contenuta quando è completamente carica; la capacità di carica si misura in Coulomb nel sistema S.I., anche se commercialmente è d'uso indicarla in *amperora*

Esempio

E.IV.6. ***Calcolare l'energia erogabile da una batteria di automobile con capacità di carica di 70 amperora.***

La potenza W è pari a $V \cdot I$; dunque l'energia è $U = V \cdot I \cdot t$. Nel caso in esame è $V = 12$ V; $I \cdot t = Q = 70$ Amperora $= 70 \times 3600$ Ampere × secondi $= 252 \cdot 10^3$ C. Dunque:

$$U = 12 \text{ Volt} \cdot 70 \text{ Amperora} = 840 \text{ Wattora} = 0{,}84 \text{ Kwh}$$

ovvero, in Joule:

$$U = 12 \text{ Volt} \cdot 252 \cdot 10^3 \text{ C} = 3{,}02 \cdot 10^6 \text{ Joule}.$$

La curva caratteristica di un accumulatore dipende dal suo stato di carica e anche dalla sua «storia» (cioè da quante volte, e con quali modalità essa è stata sottoposta a processi di carica-scarica). Qualitativamente, la caratteristica ha comunque un andamento come quello indicato in figura. Osserviamo che nel disegnare tale figura, si è fatta la convenzione di assumere come senso positivo di circolazione della corrente quello *proprio* della fase di scarica.

Osserviamo altresì che quando dalla batteria viene erogata una corrente I_o, la potenza utile W_{SC} è quella rappresentata dal rettangolo tratteggiato nel quadrante in alto della figura; mentre se la stessa corrente I_o entra nella batteria in fase di ricarica, la potenza richiesta $W_C = I_o V_C$ è quella rappresentata nel rettangolo del quadrante in basso della figura. Poiché la grandezza che si conserva fra il processo di carica e quello di scarica è la carica totale $Q = I_o t_o$ (dove t_o è il tempo per cui la corrente I_o deve essere mantenuta per caricare la batteria, pari anche al tempo per cui la corrente I_o può essere erogata in fase di scarica), il rapporto

Rendimento energetico del processo di carica/scarica

$$\eta = \frac{W_{SC}}{W_C} = \frac{I_o V_{SC}}{I_o V_C} = \frac{I_o V_{SC} t_o}{I_o V_C t_o}$$

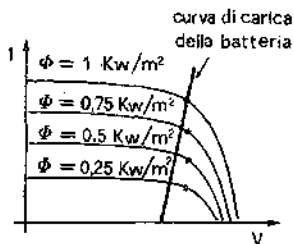
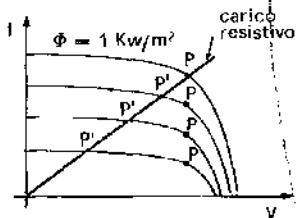
rappresenta anche il rendimento energetico del processo carica/scarica della batteria. Solo qualora la curva caratteristica fosse verticale (cioè fosse nulla la resistenza interna r dell'accumulatore) e qualora fosse $f = f'$ tale rendimento energetico sarebbe pari al 100%, cioè l'accumulatore erogherebbe in fase di scarica tutta l'energia richiesta per caricarlo. È ovvio che quando tale rendimento è diverso dal 100% (nelle batterie commerciali in condizioni normali di lavoro esso è tipicamente compreso fra 85% e 95%), l'energia mancante è andata dispersa in effetti termici. Osserviamo anche che il rendimento η è tanto più grande quanto più piccola è la corrente utilizzata per la carica e la corrente erogata in fase di scarica.

Cella fotovoltaica (o solare)

Un elettrogeneratore con grandi prospettive di impiego è la *cella fotovoltaica*, normalmente utilizzata per convertire in energia elettrica l'energia luminosa trasportata dalla radiazione solare; essa è detta infatti normalmente anche *cella solare*.

Cella al silicio

La più comune e la più affidabile delle celle solari è la cella al silicio, formata da un disco il cui spessore è una frazione di millimetro, costituito da due strati («wafer») di silicio cristallino opportunamente «drogati» (cioè

Curva caratteristica di una tipica cella al silicio di area 10×10 cm²

contenenti, in opportune percentuali, impurità di due diversi elementi chimici, ad esempio boro B e fosforo P) i due strati essendo separati da una interfaccia («giunzione») parallela alle facce del disco. La faccia posteriore del disco di silicio è metallizzata, e costituisce uno degli elettrodi del generatore; mentre l'altro elettrodo, applicato alla faccia frontale, è costituito da una metallizzazione a forma di griglia in modo da essere sostanzialmente trasparente alla radiazione solare in arrivo.

Quando la cella è colpita dalla radiazione solare (misurata dalla intensità Φ espressa in watt/m², e rappresentante l'energia per unità di tempo e per unità di area disposta ortogonalmente ai raggi), fra i due elettrodi chiusi sul carico R si eroga una certa potenza elettrica W proporzionale alla intensità Φ e dipendente dalle caratteristiche del carico.

La curva caratteristica di questo particolare generatore (curva che dipende ovviamente dalla intensità Φ) ha l'andamento indicato in figura. Fissata l'intensità della radiazione solare – cioè fissata la particolare curva caratteristica del generatore su cui ci si trova – l'effettivo punto di lavoro (cioè la coppia di valori corrente-tensione effettivamente erogata dal generatore) dipende dalla curva caratteristica del carico: come sappiamo, infatti, il punto di lavoro è rappresentato dalla intersezione fra la caratteristica del generatore e quella del carico. Il punto di lavoro più conveniente è quello che massimizza la potenza W erogata, cioè massimizza il prodotto $W = IV$: tale punto (*detto punto di massima potenza*) è rappresentato dal punto P in grassetto sulle curve. Se ad esempio il carico è resistivo, e se la resistenza è tale da intersecare il punto di massima potenza della caratteristica corrispondente a $\Phi = 1$ kw/m², come si vede alle intensità solari diverse, l'intersezione P' si allontana dal punto di massima potenza P, e la cella viene utilizzata con basso rendimento.

Se la cella viene invece usata per caricare un accumulatore (cosa opportuna dal punto di vista delle applicazioni, considerato che la radiazione solare è disponibile solo in alcune ore del giorno, mentre le esigenze di energia elettrica possono presentarsi in tempi diversi) si ottiene una configurazione delle intersezioni fra caratteristica del generatore e caratteristica del carico come quella mostrata nell'ultima figura: l'intersezione è prossimo al punto di massima potenza indipendentemente dalla intensità della radiazione solare incidente. Naturalmente, per adattare la tensione del generatore a quella della batteria si metterà in serie un numero opportuno di celle solari.

In questa configurazione, il rendimento del sistema solare costituito da celle più accumulatore può mantenersi su valori medi complessivi dell'ordine del 10% indipendentemente dalla intensità solare in arrivo; in altri termini, l'energia elettrica erogata dal sistema è pari al 10% circa dell'energia luminosa complessiva raccolta dalle celle esposte al sole.

IV.8. Resistenza elettrica di strutture conduttrici ohmiche

Abbiamo finora considerato la resistenza di singoli conduttori ohmici di sezione costante. Nella pratica, i conduttori possono presentarsi in configurazioni più complesse: ad esempio possono aversi più conduttori semplici, collegati fra di loro da fili conduttori a formare sistemi più complessi. In questi casi, vale comunque una relazione di proporzionalità fra la differenza di potenziale ΔV applicata fra due punti A e B del

sistema, e la corrente I che passa fra i punti A e B stessi; per cui si può parlare di *resistenza elettrica R del sistema di conduttori fra i punti A e B*, definita come

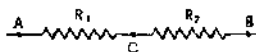
Resistenza di un sistema di conduttori

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} \qquad [IV.39]$$

Il più semplice sistema di conduttori è costituito da *due resistori* ohmici R_1 ed R_2 *collegati in serie*. Poiché entrambi i resistori sono in questo caso attraversati dalla stessa corrente, si ha:

Resistenze in serie

Resistori in serie

$$V_A - V_C = IR_1$$
$$V_C - V_B = IR_2$$

Sommando membro a membro:

$$V_A - V_B = I(R_1 + R_2)$$

da cui segue, per confronto con la [IV.39]:

resistori in serie: $R = R_1 + R_2$ [IV.40]

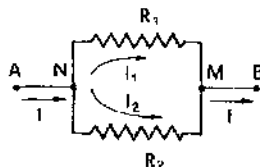
Analogo risultato si ottiene quando i resistori collegati in serie siano più di due: **La resistenza di una serie di più resistori è pari alla somma delle resistenze dei singoli resistori.**

Per una serie: $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

Un'altra configurazione semplice in cui due resistori possono essere collegati è il *collegamento in parallelo*. Nel collegamento in parallelo ai capi di entrambi i resistori si ha la stessa differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B$. Mentre fra la corrente I circolante nel parallelo, e le correnti I_1 e I_2 circolanti rispettivamente in R_1 ed R_2, applicando la prima legge di Kirchhoff ai nodi N ed M, si ha la relazione:

Resistenze in parallelo

Resistori in parallelo

$$I = I_1 + I_2 \qquad [IV.41]$$

Potremo pertanto scrivere, per ciascuna delle due resistenze:

$$I_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

Sommando membro a membro

$$I_1 + I_2 = I = (V_A - V_B)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = (V_A - V_B)\,\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

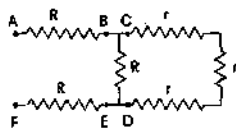
Per confronto con la [IV.39], si ricava il valore dell'inverso $\frac{1}{R}$ della resistenza del parallelo dei due resistori $\left(\frac{1}{R} = \frac{I}{V_A - V_B}\right)$:

resistori in parallelo: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ovvero $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ [IV.42]

Per un parallelo
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

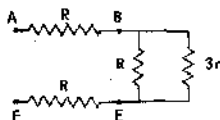
Analogo risultato si ottiene quando i resistori collegati in parallelo sono più di due: **la resistenza di un parallelo di più resistori è tale che il suo inverso è pari alla somma degli inversi delle resistenze dei singoli resistori.**

Esempi

E.IV.7. *Calcolare la resistenza presentata fra gli estremi A ed F del sistema di resistori mostrato in figura.*

Il ramo CD consta di una serie di 3 resistenze uguali pari ad r; dunque il sistema complessivo equivale al sistema semplificato mostrato nella seconda figura. Il ramo BE è costituito dal parallelo fra una resistenza pari ad R e una pari a $3\,r$; pertanto la sua resistenza R_{BE} vale, coerentemente con la [IV.42]:

$$R_{BE} = \frac{R \cdot 3\,r}{R + 3\,r}$$

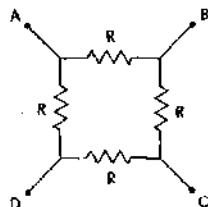
La resistenza totale R_{AF} è ora pari alla serie di tre resistenze (R, R_{BE}, R)

$$R_{AF} = 2\,R + R_{BE} = 2\,R + \frac{3\,R\,r}{R + 3\,r}$$

E.IV.8. *Quattro resistenze pari ad R sono collegate in modo da formare il quadrato mostrato in figura. Calcolare la resistenza R_{AB} che il sistema presenta fra i punti A e B, e la resistenza R_{AC} che esso presenta fra i punti A e C.*

La resistenza R_{AB} è data dal parallelo R e $3\,R$; dunque:

$$R_{AB} = \frac{R \cdot 3\,R}{R + 3\,R} = \frac{3}{4}\,R$$

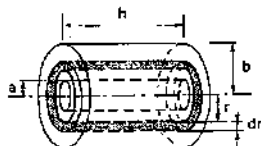
La resistenza R_{AC} è data invece dal parallelo fra $2\,R$ e $2\,R$; per cui:

$$R_{AC} = \frac{2\,R \cdot 2\,R}{2\,R + 2\,R} = \frac{4\,R^2}{4\,R} = R$$

E.IV.9. *Utilizzando l'espressione della resistenza di resistori in serie, calcolare la resistenza di un tubo cilindrico omogeneo di raggio interno a e raggio esterno b, di lunghezza h e resistività ρ, al passaggio di corrente dalla superficie cilindrica interna alla superficie cilindrica esterna.*

Consideriamo un guscio cilindrico interno allo spessore del tubo; sia r ($a < r < b$) il raggio di tale guscio e dr il suo spessore. La resistenza dR che questo guscio presenta fra la sua superficie interna e la sua superficie esterna è data, secondo la [IV.20], dal momento che il guscio può essere considerato come un conduttore a sezione costante di area $(2\pi\,r\,h)$ e spessore dr:

$$dR = \rho\,\frac{dr}{2\pi\,r\,h}$$

Il tubo può essere pensato come la serie di tanti gusci di spessore dr; dunque:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\rho\,dr}{2\pi\,r\,h} = \frac{\rho}{2\pi\,h}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi\,h}\ln\frac{b}{a}$$

E.IV.10. *Calcolare la resistenza al passaggio di corrente radiale da parte di un guscio sferico omogeneo di raggio interno a, raggio esterno b e resistività ρ.*

L'esercizio può essere risolto analogamente all'esempio E.IV.9, considerando il guscio sferico come serie di tanti gusci sferici concentrici di spessore elementare dr. Si ha:

$$R = \int dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Un metodo più generale per il calcolo della resistenza di conduttori ohmici di varia forma nella configurazione mostrata in figura consiste nello sviluppare la relazione [IV.21].

Consideriamo dunque una certa porzione di spazio Σ, compresa fra due conduttori 1 e 2 a potenziale rispettivo V_1 e V_2. La configurazione del campo elettrostatico $\vec{E}_s$ fra i due conduttori è completamente determinata (teorema di unicità), indipendentemente dal materiale (purché omogeneo) che riempia lo spazio Σ.

Consideriamo ora in Σ una superficie chiusa S che intercetti tutte le linee di forza del campo elettrostatico $\vec{E}_s$, e calcoliamo il flusso di $\vec{E}_s$ attraverso S. Se lo spazio Σ è riempito con un conduttore omogeneo di resistività ρ, dalla [IV.21] si ha

$$\int_S \vec{E}_s \cdot d\vec{S} = \rho \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \rho I \qquad \text{[IV.43]}$$

avendo usato la definizione [IV.7] di densità di corrente; I rappresenta la corrente che fluisce fra il conduttore 1 e 2 quando questi si trovano a potenziale rispettivo V_1 e V_2.

Se lo spazio Σ è riempito con un dielettrico omogeneo di costante dielettrica ε (o eventualmente esso è vuoto, nel qual caso $\varepsilon = \varepsilon_0$), il flusso di $\vec{E}_s$ attraverso S è legato dal teorema di Gauss [I.24.a] alla carica Q posseduta dal conduttore 1:

$$\int_S \vec{E}_s \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \qquad \text{[IV.44]}$$

Confrontando la [IV.43] e la [IV.44] vediamo che a parità di $\Delta V = V_1 - V_2$ deve aversi uguaglianza fra la quantità ρI (spazio S pieno di conduttore) e la quantità $\frac{Q}{\varepsilon}$ (spazio pieno di dielettrico). D'altra parte nel primo caso si ha $I = \frac{\Delta V}{R}$ (legge di Ohm), mentre nel secondo si ha $Q = C\Delta V$ (definizione di capacità), per cui deve essere in definitiva:

$$\rho \frac{\Delta V}{R} = \frac{C\Delta V}{\varepsilon}$$

da cui infine

Relazione fra capacità e resistenza di una porzione di spazio compresa fra due conduttori

$$CR = \rho\varepsilon \qquad \text{[IV.45]}$$

che rappresenta la *relazione che lega la capacità C di un condensatore* riempito di dielettrico di costante ε, e *la resistenza che si presenta fra le due armature* qualora il condensatore sia riempito con materiale conduttore di

Condensatore riempito con dielettrico in perdita

resistività ρ. Nel caso di un condensatore reale riempito con un dielettrico non perfettamente isolante (dielettrico «in perdita»), la [IV.45] rappresenta la relazione fra la capacità del condensatore e la sua resistenza (diversa da $R = \infty$, quale sarebbe per un dielettrico perfettamente isolante).

Va osservato che il metodo su esposto vale solo qualora i conduttori si trovino in una configurazione di induzione completa e qualora tutto lo spazio Σ sia riempito di materiale omogeneo; in caso contrario il calcolo della resistenza R richiede il computo esplicito del primo membro della [IV.43] dopo aver calcolato il campo $\bar{E}$, risolvendo il problema generale della elettrostatica nella particolare geometria considerata.

Esempio

E.IV.11. *Verificare che le resistenze elettriche relative alle due configurazioni analizzate negli esempi E.IV.9 ed E.IV.10 sono coerenti con la [IV.45].*

La verifica segue immediatamente dal confronto fra le espressioni delle resistenze calcolate negli esempi E.IV.9 ed E.IV.10, e le espressioni delle rispettive capacità calcolate negli esempi E.II.8 ed E.II.7.

IV.9. Circuiti in corrente continua

Abbiamo finora considerato la resistenza elettrica di strutture conduttrici semplici e di loro collegamenti elementari (in serie o in parallelo). I circuiti elettrici, in regime di correnti stazionarie (o «continue») cui stiamo per ora limitando la nostra attenzione, comprendono però oltre a resistori anche generatori di forza elettromotrice (f.e.m.) variamente collegati fra di loro.

Sviluppiamo in questo paragrafo *un minimo di teoria* di tali circuiti, lasciando a corsi specialistici il compito di approfondire la trattazione. Una prima legge importante, da noi già acquisita, è la legge di Kirchhoff [IV.17], conseguenza dell'equazione di continuità [IV.12] (ovvero della conservazione della carica elettrica) nel caso stazionario.

Prima legge di Kirchhoff o legge *dei nodi*

Procediamo ora a sviluppare alcune ulteriori leggi dei circuiti in continua derivate dalla conservazione della carica e dell'energia. Abbiamo visto che la legge di Ohm, riferita ad un singolo conduttore di resistenza R, si esprime con la relazione $\Delta V = I \cdot R$. Questa legge può essere immediatamente generalizzata al caso in cui fra gli estremi A e B siano collegati in serie vari elementi di circuito (resistori e generatori di f.e.m.) con la condizione che nel circuito circoli un'unica corrente I. In condizioni stazionarie, questa condizione è verificata se, lungo tutta la sequenza di elementi circuitali considerati tra i punti A e B, non ci sia alcun nodo (cioè alcun punto di confluenza di conduttori nel quale varie correnti possano entrare e/o uscire) né alcun altro contatto localizzato o distribuito con l'ambiente circostante capace di disperdere o di immettere corrente elettrica. Un elemento di circuito come quello ora descritto si dice *ramo*

Legge di Ohm generalizzata

Ramo di circuito

Per scrivere l'*equazione del ramo* si fissa arbitrariamente un verso positivo di circolazione nel ramo (per esempio da A a B) e si considera l'andamento lungo il ramo della differenza di potenziale V. Tale andamento può essere rappresentato come una sequenza di tratti lineari, come quella mostrata in figura. Il passaggio da un capo all'altro di una resistenza R_i implica

una caduta di potenziale pari al prodotto $I \cdot R_i$ della corrente per la resistenza; ed il passaggio da un morsetto all'altro di un generatore di f.e.m. implica un salto pari alla f.e.m., positivo o negativo a seconda che la f.e.m., da sola, tenda a far passare corrente concordemente o discordemente al verso scelto come positivo nel ramo. Per conseguenza, il potenziale nel punto B si ottiene a partire dal potenziale nel punto A sommando algebricamente ad esso i contributi dei vari elementi del ramo:

$$V_B = V_A - IR_1 + f_1 - IR_2 - IR_3 - f_2 - IR_4$$

Questa relazione, detta *legge di Ohm generalizzata*, viene normalmente scritta nella seguente forma:

$$\text{Ramo } A \to B: \quad \boxed{(V_A - V_B) + \sum_{\text{ALO}} f_i = \sum_{\text{RAMO}} IR_i} \qquad \text{[IV.46]}$$

Ovviamente, fra le resistenze vanno prese in considerazione anche le resistenze interne dei generatori. Poiché I è costante su tutta la maglia, il secondo membro della [IV.46] può essere scritto anche come IR, dove $R = \Sigma R_i$ è la resistenza totale del ramo.

Analisi dei circuiti: maglie

Un insieme di rami, che formino nel loro insieme una linea *chiusa* in un circuito complesso, costituisce una *maglia* del circuito. In generale, in una maglia ogni ramo è caratterizzato da una sua corrente diversa, perché agli estremi di ogni ramo si ha un nodo in cui possono confluire altri rami non appartenenti alla maglia.

Per scrivere l'equazione della maglia, basta fissare in essa un verso positivo di percorrenza e scrivere la legge di Ohm generalizzata per ogni ramo:

$$\begin{array}{ll} A \to B & V_A - V_B + \sum_{AB} f_i = I_{AB} \cdot R_{AB} \\ B \to C & V_B - V_C + \sum_{BC} f_i = I_{BC} \cdot R_{BC} \\ C \to D & V_C - V_D + \sum_{CD} f_i = I_{CD} \cdot R_{CD} \\ D \to A & V_D - V_A + \sum_{DA} f_i = I_{DA} \cdot R_{DA} \\ \hline \text{Sommando m.a.m.} & 0 \quad + \sum_{MG} f_i = \sum I_i R_i \end{array}$$

dove con I_i indichiamo la corrente circolante in ciascun ramo della maglia, e con R_i la somma delle resistenze presenti nel ramo stesso.

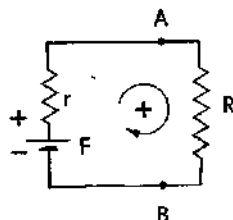
La relazione, valida per una maglia,

$$\boxed{\sum_{\text{Mg}} f_i = \sum R_i I_i} \qquad \text{[IV.47]}$$

Seconda legge di Kirchhoff per le maglie

prende il nome di *seconda legge di Kirchhoff*

Esempi

E.IV.12. *Calcolare la differenza di potenziale ai capi della resistenza di carico R nel circuito rappresentato in figura, in cui la corrente I circola per effetto del generatore di f.e.m. f e resistenza interna r.*

Questo circuito semplice, già analizzato precedentemente, può essere visto come una maglia priva di nodi, in cui circola una sola corrente I. La seconda legge di Kirchhoff è dunque espressa dalla relazione:

$$\sum f_i = f = \sum I_i R_i = Ir + IR = I(r + R)$$

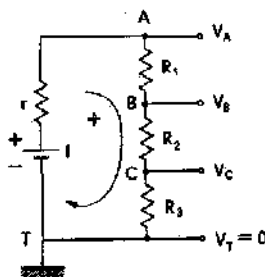
da cui:

$$I = \frac{f}{r + R}$$

Dunque:

$$V_A - V_B = I \cdot R = \left(\frac{R}{r + R}\right) f < f$$

Osserviamo che la d.d.p. $\Delta V = V_A - V_B$ ai morsetti A e B del generatore, quando circola corrente nel circuito è minore di f a causa della caduta di potenziale ai capi della resistenza interna r. Si ha $V_A - V_B = f$ solo a circuito aperto, come già avevamo visto nel par. IV.6.

Partitore resistivo

E.IV.13. *Nelle applicazioni capita spesso che si disponga di un generatore di f.e.m. f, e che serva avere una differenza di potenziale $\Delta V < f$ ai capi di un certo carico R. Un modo per ottenere questo risultato consiste nel costruire una maglia resistiva contenente la f.e.m. f e il carico R, dimensionata in modo che ai capi di R si abbia la differenza di potenziale ΔV desiderata. Data la maglia disegnata in figura, esprimere i potenziali V_A, V_B, V_C in cui la d.d.p. f può pensarsi ripartita.*

L'equazione della maglia è: $\sum f_i = \sum I_i R_i$

$$f = I(r + R_1 + R_2 + R_3)$$

da cui

$$I = \frac{f}{r + R_1 + R_2 + R_3}$$

Le cadute di potenziale ai capi delle varie resistenze del partitore sono:

$$V_A - V_B = IR_1 = f\left(\frac{R_1}{r + R_1 + R_2 + R_3}\right)$$

$$V_B - V_C = IR_2 = f\left(\frac{R_2}{r + R_1 + R_2 + R_3}\right)$$

$$V_C - V_T = IR_3 = f\left(\frac{R_3}{r + R_1 + R_2 + R_3}\right)$$

Mediante opportuna scelta delle resistenze è possibile avere i punti A, B, C a potenziali fissi del valore desiderato.

E.IV.14. *Una maglia è costituita da N generatori tutti uguali, ciascuno di f.e.m. f e resistenza interna r, collegati in serie con verso concorde delle f.e.m. Calcolare la d.d.p. fra due connessioni A e B qualunque tra generatori.*

Supponiamo che fra A e B vi siano $n < N$ generatori. Trattandosi di una maglia semplice, si ha una sola corrente I in tutto il circuito, che può essere calcolata usando la seconda legge di Kirchhoff, eq. [IV.47]:

$$\sum f = Nf = \sum Ir = I \sum r = I N r$$

da cui

$$I = \frac{Nf}{Nr} = \frac{f}{r}$$

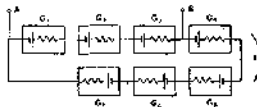
La d.d.p. fra i punti A e B si calcola applicando la legge di Ohm generalizzata, eq. [IV.46], al ramo AB:

$$(V_A - V_B) + nf = I n r = \frac{f}{r} \cdot nr = nf$$

da cui segue:

$$V_A - V_B = 0$$

Osserviamo che la corrente che circola nel ramo è la stessa che si avrebbe chiudendo un unico generatore in corto circuito su sé stesso.

Analisi dei circuiti: reti

L'analisi dei circuiti costituisce oggetto di trattazioni specialistiche, e non verrà qui svolta in termini sistematici e approfonditi. Ci limiteremo ad illustrare, con qualche esempio, un metodo di soluzione delle reti, cioè di strutture di maglie aventi in comune rami e nodi. Risolvere una rete significa, per esempio, calcolare le correnti che circolano nei vari rami una volta nota la configurazione topologica della rete e le caratteristiche degli *elementi passivi* (resistori) *e attivi* (generatori di f.e.m.) presenti nei vari rami; ovvero calcolare le f.e.m. dei generatori necessarie per ottenere una certa configurazione delle correnti; ecc.

Metodo delle correnti di maglia

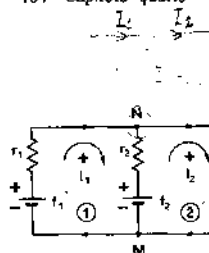
Come esempio tratteremo il metodo della *analisi per maglie*; questo tipo di analisi, basato - come del resto ogni altro - sulle leggi di Kirchhoff, procede attraverso i seguenti passi:

a) si individua un certo numero di percorsi chiusi (maglie) realizzati con i rami della rete, con le seguenti condizioni:
   - che ogni ramo risulti presente in almeno una delle maglie scelte
   - che le maglie scelte siano tali che le rispettive equazioni siano indipendenti. Un modo per scegliere maglie indipendenti consiste nell'assicurarsi che ciascuna maglia abbia almeno un ramo che non faccia parte delle maglie scelte precedentemente. Si dimostra, nella teoria dei circuiti, che il numero di maglie indipendenti di una rete è legato al numero di rami e di nodi dalla relazione:

$$\text{Maglie indipendenti} = \text{Rami} - \text{Nodi} + 1$$

b) si assegna un verso positivo convenzionale ad ogni maglia

c) si applicano le leggi di Kirchhoff delle maglie e dei nodi

d) si ricavano le correnti (una per maglia) e quindi (equazione dei nodi) le correnti per ciascun ramo. Se la corrente di maglia risulta negativa significa che il suo verso effettivo è opposto a quello arbitrariamente scelto come positivo.

Esempi

E.IV.15. *Nel circuito di figura, due generatori di f.e.m. rispettivamente f_1 ed f_2 e resistenze interne r_1 ed r_2 sono collegati in parallelo concordemente (poli omonimi collegati) in modo da alimentare una resistenza di carico R. Ricavare l'espressione della d.d.p. ai capi A e B del carico.*

Applicando il metodo delle maglie alle maglie (1) e (2) indicate in figura con i rispettivi versi positivi, si ottengono le seguenti due equazioni indipendenti (numero di equazioni indipendenti = Rami − Nodi + 1 = 3 − 2 + 1 = 2):

1ª maglia: $f_1 - f_2 = I_1 r_1 + (I_1 - I_2)\, r_2$

dove la corrente per r_2 è ottenuta applicando l'equazione dei nodi al nodo N

2ª maglia: $f_2 = I_2 R + (I_2 - I_1)\, r_2$

notare che il verso convenzionale positivo della corrente in r_2 è opposto nella maglia (1) e nella maglia (2).

Le equazioni delle maglie formano un sistema lineare nelle incognite I_1 e I_2

$$\begin{cases} I_1 (r_1 + r_2) - I_2 r_2 = f_1 - f_2 \\ -I_1 r_2 + I_2 (R + r_2) = f_2 \end{cases}$$

Essendo richiesto il calcolo di $V_A - V_B = I_2 R$, basta ricavare I_2, che applicando la regola di Kramer risulta:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & f_1 - f_2 \\ -r_2 & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & R + r_2 \end{vmatrix}} = \frac{f_2 r_1 + f_1 r_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$$

Dunque

$$V_A - V_B = \frac{(f_2 r_1 + f_1 r_2)\, R}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$$

Caso particolare: i due generatori in parallelo sono fra di loro uguali, per cui $f_1 = f_2 = f$ e $r_1 = r_2 = r$. L'espressione per I_2 diviene:

Generatori identici in parallelo

$$I_2 = \frac{2fr}{r^2 + 2rR} = \frac{2f}{r + 2R} = \frac{f}{R + r/2}$$

Il parallelo dei due generatori equivale a un unico generatore di pari forza elettromotrice, e resistenza interna pari a $r/2$. Più in generale, disponendo n generatori identici fra di loro in parallelo, si ottiene un sistema equivalente a un unico generatore di forza elettromotrice pari a quella di ciascun generatore, e resistenza interna n volte più piccola.

E.IV.16. *Nella rete mostrata in figura, calcolare le correnti circolanti in R_A, R_C ed R_E, essendo note le f.e.m. f_A ed f_B e le resistenze presenti nella rete (la resistenza interna dei generatori è supposta essere trascurabile).*

Il numero di maglie indipendenti è:

$$\text{Rami} - \text{Nodi} + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

Scelte le maglie come in figura, le rispettive equazioni sono:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad f_A - f_B = I_1 R_A + (I_1 - I_2) R_B \\
&(2) \qquad 0 \qquad\;\; = I_2 R_C + (I_2 - I_3) R_D + (I_2 - I_1) R_B \\
&(3) \qquad f_B \qquad = I_3 R_E + (I_3 - I_2) R_D
\end{aligned}$$

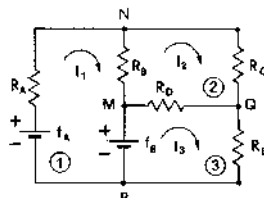
da cui il sistema:

$$\begin{cases} I_1 (R_A + R_B) - I_2 R_B & = f_A - f_B \\ - I_1 R_B + I_2 (R_B + R_C + R_D) - I_3 R_D & = 0 \\ - I_2 R_D + I_3 (R_D + R_E) & = f_B \end{cases}$$

La corrente I_1 che passa in R_A è data da

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_A - f_B & -R_B & 0 \\ 0 & R_B + R_C + R_D & -R_D \\ f_B & -R_D & R_D + R_E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_A + R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B + R_C + R_D & -R_D \\ 0 & -R_D & R_D + R_E \end{vmatrix}}$$

e analogamente per le correnti I_2 e I_3 che passano rispettivamente in R_C ed R_E.

Teorema di sovrapposizione

Come conseguenza della linearità delle leggi di Kirchhoff [IV.17] e [IV.47], e considerato che una rete comunque complessa può essere risolta applicando tali leggi alle sue maglie indipendenti, si ha che *le correnti sono funzioni lineari delle f.e.m.* Questa proprietà può essere espressa nella forma di *teorema di sovrapposizione: la corrente che passa in un ramo di una rete può essere espressa come somma delle correnti che circolerebbero se ogni f.e.m. operasse singolarmente.*

Circuito equivalente di una rete

Nel par. IV.8 abbiamo visto che un sistema di resistenze in serie o in parallelo può essere sostituito da un'unica «resistenza equivalente», rispettivamente uguale alla somma delle resistenze, o tale che il suo inverso sia pari alla somma degli inversi delle resistenze.

Il concetto di circuito equivalente può essere generalizzato al caso di una qualunque rete lineare comprendente generatori di f.e.m. e resistori. Data una rete, e considerati due suoi punti qualunque A e B, supponiamo che a tali punti venga collegato un circuito esterno: dal punto di vista degli effetti prodotti sul circuito esterno, la rete considerata può essere sostituita (materialmente, o nei modelli di calcolo) con un circuito semplice rappresentato da un unico generatore di forza elettromotrice f_E opportuna, e di opportuna resistenza interna r_E.

Al riguardo di tale equivalenza, ci limitiamo qui ad enunciare il fondamentale *teorema di Thevenin* che, oltre a stabilire l'equivalenza, consente di calcolare la forza elettromotrice f_E e la resistenza interna r_E del generatore equivalente. Tale teorema si enuncia come segue:

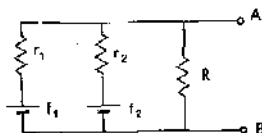
Teorema di Thevenin

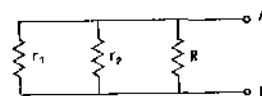
Data una rete comunque complessa di resistenze e generatori e due punti A e B della rete (morsetti), dal punto di vista di una «rete utenza» da applicarsi fra A e B, la rete data equivale a un unico generatore di forza elettromotrice f_E pari alla d.d.p. che si misura fra A e B quando la «rete

utenza» viene staccata, e di resistenza interna r_E pari alla resistenza che si misura fra A e B quando ogni generatore venga rimpiazzato da un resistore di resistenza pari alla sua resistenza interna.

È interessante notare che i parametri equivalenti f_E ed r_E si prestano ad essere misurati dall'esterno dei morsetti A e B. La f.e.m. f_E si misura con un voltmetro (ad alta resistenza interna equivalente al distacco della «rete utenza») piazzato tra A e B, mentre la resistenza r_E si ricava misurando con un amperometro posto tra A e B la corrente «di corto circuito» I_C tra A e B (caso di rete utenza a resistenza trascurabile) ed applicando la relazione $r_E = f_E/I_C$.

Esempi

E.IV.17. *Determinare la forza elettromotrice f_E e la resistenza interna r_E del generatore equivalente al circuito mostrato in figura.*

Il calcolo della differenza di potenziale $V_A - V_B$ presente fra A e B a «circuito aperto» (cioè quando fra A e B non è connesso alcun carico) è già stato effettuato nell'esempio E.IV.15, per cui abbiamo:

$$f_E = \frac{(f_2 r_1 + f_1 r_2)\, R}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$$

Per il calcolo di r_E, basta sostituire ai generatori la loro resistenza interna; il circuito diviene così quello mostrato in figura. La resistenza r_E è dunque data dal parallelo di r_1, r_2 ed R, per cui:

$$\frac{1}{r_E} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} \Rightarrow r_E = \frac{r_1 r_2 R}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$$

E.IV.18. *Una volta ridotta una rete al suo circuito equivalente, determinare il valore che deve avere il carico resistivo R perché sia massima la potenza su questo dissipata.*

La potenza $W = I^2 R$ è nulla sia per $R = 0$ che per $R \Rightarrow \infty$ $(I \Rightarrow 0)$, e dunque fra questi due valori estremi deve aversi un valore per cui W è massima. Poiché $I = \dfrac{f_E}{r_E + R}$, si ha:

$$W(R) = f_E^2 \, \frac{R}{(r_E + R)^2}\,.$$

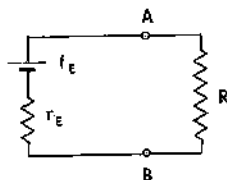
Condizioni di massima potenza trasferita al carico

Derivando rispetto a R ed uguagliando a zero si ha

$$\frac{dW}{dR} = f_E^2 \left(\frac{1}{(r_E + R)^2} - \frac{2R}{(r_E + R)^3} \right) = f_E^2 \, \frac{r_E - R}{(r_E + R)^3} = 0$$

Dunque $\dfrac{dW}{dR} = 0$ per $R = r_E$. Per questo valore di R si ha dunque il massimo valore di W, che vale

$$W_{max} = \frac{f_E^2}{4 r_E} \qquad \text{per } R = r_E$$

Osserviamo che in queste condizioni metà della potenza erogata dal generatore si dissipa nel carico R, e metà si dissipa nella resistenza interna del generatore. Il

generatore viene dunque impiegato con un rendimento η pari al 50%: in effetti, con *rendimento* si intende il rapporto fra la potenza W dissipata nel carico, e la potenza W_T totale erogata dal generatore. Notiamo che, poiché il carico R e la resistenza interna r_E sono attraversati dalla stessa corrente I, si ha

$$\eta = \frac{W}{W_T} = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r_E)} = \frac{R}{R + r_E} = \frac{1}{1 + \frac{r_E}{R}}$$

Dunque il massimo rendimento ($\eta = 1$) si ha per $\frac{r_E}{R} \Rightarrow 0$; cioè, fissato $r_E \neq 0$, si ha per $R \Rightarrow \infty$. All'estremo opposto ($R = 0$), tutta la potenza erogata dal generatore si dissipa nel generatore stesso. È inoltre immediato verificare che per $R = 0$, si ha il valore massimo di W_T ($W_T = f_E^2/r_E$).

IV.10. Cariche su conduttori percorsi da corrente

Come abbiamo visto, nel caso statico (caratterizzato dal fatto che le medie macroscopiche delle grandezze elettriche siano indipendenti dal tempo e che non si abbiano migrazioni macroscopiche di cariche) le grandezze elettriche in un conduttore metallico godono delle seguenti proprietà:

- il campo elettrico $\vec{E}^{(INT)}$ internamente al conduttore è nullo;
- il volume del conduttore, e la superficie che lo delimita, sono equipotenziali;
- in vicinanza del conduttore, esternamente ad esso, il campo elettrico è ortogonale alla superficie del conduttore;
- le cariche elettriche sono distribuite in superficie.

Nel caso in cui il conduttore sia percorso da corrente stazionaria, le grandezze elettriche (campo elettrico, potenziale, densità di carica, ecc.) sono ancora indipendenti dal tempo. Tuttavia si ha ora una migrazione di cariche: le cariche microscopiche, che pur muovendosi velocemente a causa della agitazione termica avevano nel caso statico valor medio vettoriale della velocità nullo, hanno nel caso di corrente stazionaria velocità media (velocità di deriva) diversa da zero, anche se piccola in modulo rispetto al valor quadratico medio della velocità termica. Si ha per conseguenza $\vec{E}^{(INT)} \neq 0$ (vedi eq. [IV.21]), e dunque anche potenziale non uniforme; inoltre il campo elettrico non è più ortogonale alla superficie del conduttore, non essendo più essa equipotenziale.

Vogliamo ora analizzare in maggior dettaglio la configurazione delle grandezze elettriche in un conduttore percorso da corrente stazionaria. Essendo i simboli ρ e σ impegnati ad indicare rispettivamente resistività e conducibilità elettrica, indichiamo la densità di carica volumica e superficiale rispettivamente con ρ_c e con σ_c.

È facile verificare innanzi tutto che anche in condizioni di corrente stazionaria le cariche si dispongono in superficie, cioè la densità di carica volumica ρ_c è nulla come nel caso statico.

Anche nel caso di corrente stazionaria la densità volumica di carica in un conduttore è nulla.

Usando infatti la prima equazione di Maxwell [I.36] e la relazione [IV.21] fra campo elettrico e densità di corrente $\vec{J}$, abbiamo per la densità di carica ρ_c internamente al conduttore:

$$\rho_c = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{(INT)} = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{J}) = \varepsilon \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \qquad [IV.48]$$

Ma usando l'equazione di continuità [IV.13] nel caso stazionario ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$), la [IV.48] comporta che sia

$$\rho_c = 0 \qquad \text{[IV.49]}$$

Osserviamo che affinché valga la [IV.48] è necessario che si abbia a che fare con un conduttore ohmico omogeneo (ρ = cost), e solo in questo caso in condizioni stazionarie vale la [IV.49]. In effetti, qualora il conduttore presenti, ad esempio, una giunzione fra materiali diversi, in corrispondenza di questa si possono avere degli addensamenti di carica. Va osservato inoltre che il fatto che la densità di carica ρ_c sia nulla internamente al conduttore non implica che la corrente si localizzi sulla superficie. La corrente è infatti presente internamente al conduttore (dove è $\vec{E}^{(INT)} \neq 0$) a causa del moto di deriva dei portatori (in generale elettroni) in una situazione in cui il bilancio netto delle cariche negative e positive può essere nullo; e tale è in effetti, come la [IV.49] mostra, internamente a un conduttore ohmico omogeneo. In generale, in un conduttore metallico non si hanno nemmeno effetti di polarizzazione elettrica ($\vec{P} = 0$), per cui è $\varepsilon_r = 1$ (e dunque $\varepsilon = \varepsilon_0$); tuttavia in alcuni conduttori non metallici (ad esempio in soluzioni, in particolare acquose) si può avere un effetto anche intenso di polarizzazione, per cui nella [IV.48] abbiamo preferito riferirci alla situazione più generale in cui la costante dielettrica ε non è necessariamente quella del vuoto ε_0.

Esempio

E.IV.19. *Supponiamo che all'istante $t = 0$ internamente ad un conduttore si abbia una densità di carica volumica $\rho_0 \neq 0$. A partire da quell'istante, le condizioni al contorno vengono «bloccate» a un valore costante (indipendente dal tempo). Dopo quanto tempo il conduttore raggiunge la condizione di stazionarietà in cui $\rho_c = 0$?*

Partiamo dalla [IV.48], che ha validità generale in un conduttore ohmico omogeneo. Tuttavia, finché non si è raggiunta la situazione di stazionarietà, l'equazione di continuità non si scrive $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ bensì $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho_c}{\partial t}$ (eq. [IV.12]). Questa relazione, introdotta nella [IV.48] ci fornisce

$$\rho_c = -\rho\varepsilon \frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

che, integrata per separazione di variabili, diviene:

$$\rho_c(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z)\, e^{-t/\tau} \qquad \text{con } \tau = \rho\varepsilon$$

Tempo di rilassamento

Tipicamente, in un metallo è $\rho \simeq 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$; inoltre $\varepsilon = \varepsilon_0 \simeq 10^{-11}$ *F*/m, per cui $\tau = \rho\varepsilon \simeq 10^{-19}$ sec (*tempo di rilassamento*). Come si vede, la situazione stazionaria in cui $\rho_c = 0$ viene raggiunta in tempi estremamente brevi, inferiori al periodo proprio degli elettroni negli atomi (che è nell'ordine di 10^{-15} sec).

Densità di carica superficiale su un conduttore percorso da corrente stazionaria

Dunque, internamente a un conduttore omogeneo percorso da corrente stazionaria, essendo nulla la densità di carica ρ_c, la distribuzione delle cariche è descritta solo dalla densità superficiale σ_c.

In linea di principio, il calcolo della configurazione (indipendente dal tempo) assunta dalla densità di carica σ_c su un conduttore ohmico percorso da corrente sta-

zionaria – nonché dal campo elettrico presente internamente ed esternamente al conduttore – può essere effettuato in base a considerazioni del tipo di quelle esposte qui nel seguito.

Per semplicità, consideriamo un conduttore omogeneo filiforme, anche se non necessariamente rettilineo, né di sezione costante.

Assegnata la differenza di potenziale ΔV applicata agli estremi A e B del conduttore e la sua resistenza totale R, si determina tramite la legge di Ohm la corrente che in esso circola ($I = \Delta V/R$). Internamente al conduttore, la densità di corrente $\vec{J}$ ha direzione longitudinale; in altri termini è nulla la componente J_n della densità di corrente normalmente alla superficie del conduttore. Questa conclusione deriva da un ragionamento analogo a quello da noi svolto per ricavare la [III.31]. Considerata infatti la superficie Σ che delimita un conduttore percorso da corrente stazionaria, prendiamo un cilindretto con asse ortogonale ad essa e altezza infinitesima, come in figura. Dalla condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, segue che il flusso si $\vec{J}$ uscente da tale cilindretto è nullo; ma essendo trascurabile il flusso uscente dalla superficie laterale (infinitesima di ordine superiore), ciò comporta che la componente J_n di $\vec{J}$ normalmente alla superficie si conserva. Ma se il conduttore è immerso in un mezzo isolante, esternamente è $\vec{J} = 0$ e dunque in particolare $J_n = 0$; da cui segue che anche internamente al conduttore è $J_n = 0$.

In condizioni stazionarie la componente di $\vec{J}$ normalmente alla superficie di separazione fra un conduttore e un isolante è nulla

Essendo $\vec{J}$ tangenziale al filo, ed essendo la corrente I la stessa lungo tutto il conduttore, la densità di corrente $\vec{J}$ ha punto per punto lungo il filo modulo inversamente proporzionale alla sezione S del filo stesso (vedi eq. [IV.7]); cioè

$$\vec{J} = \frac{I}{S}\,\hat{t} \qquad \text{[IV.50]}$$

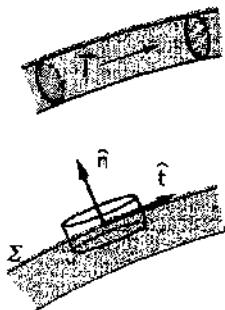
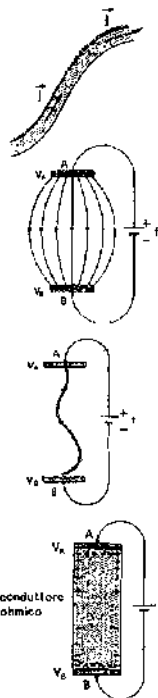
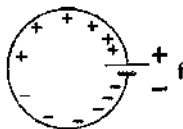
dove $\hat{t}$ è il versore tangente alla direzione del filo conduttore. Una volta nota tramite la [IV.50] la densità di corrente $\vec{J}$ in ogni punto del conduttore, possiamo calcolare tramite la [IV.21] il campo elettrico $\vec{E}^{(\mathrm{INT})}$ presente internamente al conduttore

$$\vec{E}^{(\mathrm{INT})} = \rho\vec{J} = \rho\frac{I}{S}\,\hat{t} = \frac{I\hat{t}}{\sigma S} \qquad \text{[IV.51]}$$

Il campo elettrico è diretto tangenzialmente al filo, e il suo modulo è inversamente proporzionale alla sezione del filo stesso.

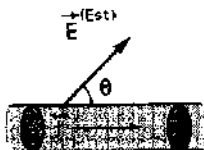
Osserviamo che in assenza di conduttore, il campo elettrico nella posizione occupata dal filo sarebbe determinato unicamente dai potenziali V_A e V_B degli elettrodi imposti agli estremi: ad esempio, nella geometria degli elettrodi indicata in figura, le linee di forza del campo elettrico avrebbero una configurazione del tipo mostrato nella figura stessa.

La presenza fra A e B del filo conduttore percorso da corrente impone al campo di seguire, come direzione, il percorso del filo stesso; e di avere modulo dato dalla [IV.51] (ad esempio modulo costante, se il filo ha sezione costante). Questa «distorsione» del campo elettrico è determinata dalla densità di carica σ_c (che sovrappone il suo effetto a quello degli elettrodi A e B). In base a questa condizione, in linea di principio è possibile calcolare la configurazione assunta dalla densità di carica, benché il calcolo sia nella pratica assai complesso salvo che nelle geometrie più semplici. Se la forma del circuito è regolare, la distribuzione delle cariche di superficie presenta, qualitativamente, un addensamento di cariche positive nel conduttore in vicinanza dell'elettrodo positivo del generatore, e un addensamento di cariche negative in vicinanza dell'elettrodo negativo.

Quanto al campo elettrico $\vec{E}^{(\mathrm{EST})}$ presente esternamente al conduttore, una volta determinata la densità di carica σ_c esso può essere calcolato coi metodi che abbiamo esposto nei capitoli dedicati all'elettrostatica. In particolare, in vicinanza del conduttore la componente del campo elettrico tangenziale alla superficie è pari al valore che il campo elettrico ha internamente al conduttore (vedi eq. [II.2]);

mentre la componente normale alla superficie è legata alla densità di carica σ_c dal teorema di Coulomb (eq. [II.5]).

$$\begin{cases} E_t^{(EST)} = E_t^{(INT)} = E^{(INT)} = \dfrac{J}{\sigma} = \rho J \\ E_n^{(EST)} = \dfrac{\sigma_c}{\varepsilon_0} \end{cases} \qquad [IV.52]$$

Esempi

E.IV.20. *Un conduttore cilindrico omogeneo, di conducibilità σ, è percorso da corrente stazionaria di densità J. In un punto immediatamente all'esterno del conduttore, il campo elettrico è diretto in modo da formare un angolo θ con la direzione del conduttore. Ricavare l'espressione della densità superficiale σ_c presente sulla superficie del conduttore in vicinanza del punto considerato.*

Dalla seconda delle [IV.52] si ha:

$$\sigma_c = \varepsilon_0 E_n^{(EST)} = \varepsilon_0 E^{(EST)} \sin\theta$$

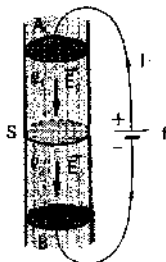
e dalla prima delle stesse equazioni:

$$E_t^{(EST)} = E^{(EST)} \cos\theta = \frac{J}{\sigma}$$

Sostituendo nella prima di queste relazioni il valore di $E^{(EST)}$ ricavato dalla seconda, si ha

$$\sigma_c = \varepsilon_0 \frac{J}{\sigma} \operatorname{tg}\theta$$

In generale σ_c e θ variano da punto a punto lungo il conduttore.

E.IV.21. *Due cilindri conduttori aventi la stessa sezione e resistività ρ_1 e ρ_2 rispettivamente, sono posti a contatto lungo una sezione retta S. Se il filo è percorso da corrente I, nella sezione di contatto S si accumula carica elettrica con densità superficiale σ_c. Esprimere σ_c in funzione di S, I, ρ_1 e ρ_2.*

È questo un caso di conduttore non omogeneo, in cui può dunque presentarsi una densità di carica diversa da zero internamente al conduttore stesso: ciò accade appunto sulla sezione S dove la disomogeneità è concentrata.

Poiché la sezione del conduttore è costante, in ogni sua sezione si ha la stessa densità di corrente [IV.50]; e dunque nei due materiali il campo elettrico vale rispettivamente, secondo l'eq. [IV.51]:

$$E_1 = \rho_1 \frac{I}{S} \qquad\qquad E_2 = \rho_2 \frac{I}{S}$$

ed è diretto secondo l'asse del conduttore cilindrico. Considerato un tratto del conduttore che contenga al suo interno la superficie di separazione S, il flusso del

campo elettrico uscente da tale volume vale evidentemente $\Phi(\vec{E}) = (E_2 - E_1)\,S$; e tenuto conto delle espressioni sopra ricavate per E_1 ed E_2 si ha $\Phi(\vec{E}) = (\rho_2 - \rho_1)\,I$. D'altra parte, per il teorema di Gauss tale flusso deve essere pari a $\frac{Q}{\varepsilon}$, dove $Q = \sigma_c S$ è la carica contenuta nel volume considerato. Dunque in definitiva:

$$\sigma_c S = \varepsilon\,\Phi(\vec{E}) = \varepsilon\,(\rho_2 - \rho_1)\,I$$

da cui

$$\sigma_c = \frac{\varepsilon\,(\rho_2 - \rho_1)\,I}{S}$$

IV.11. Conduzione elettrica nei liquidi

Si ha conducibilità elettrica diversa da zero in un liquido se in esso sono presenti degli ioni. Liquidi come gli oli, o la paraffina, non presentano alcuna dissociazione ionica, e sono degli ottimi isolanti.

L'acqua distillata presenta una debole conducibilità: una piccola frazione delle molecole si dissocia infatti in una coppia di ioni H^+ e OH^-; e sono questi ioni che, muovendosi per effetto di un eventuale campo elettrico applicato dall'esterno, determinano un passaggio di corrente elettrica. Come noto, le concentrazioni molari di ioni H^+ e OH^- in acqua distillata, espresse in numero di moli per litro, sono pari a 10^{-7} moli/litro. Tenuto conto che il numero di ioni per mole è espresso dal numero di Avogadro $N = 6{,}023 \cdot 10^{23}$, si calcola facilmente che ogni centimetro cubo di acqua distillata contiene circa $6 \cdot 10^{13}$ ioni positivi e altrettanti ioni negativi, contro i $\sim 10^{23}$ elettroni di conduzione presenti in un cm^3 di rame. L'acqua distillata presenta una resistività elettrica di circa $2{,}2 \cdot 10^5\ \Omega \cdot m$, che è circa $1{,}4 \cdot 10^{13}$ volte più elevata rispetto a quella del rame. Questo elevato rapporto è dovuto, oltre che alla diversa concentrazione dei portatori, anche alla loro diversa *mobilità* (definita come velocità di deriva per unità di campo elettrico applicato): a parità di campo elettrico applicato, gli elettroni nel rame hanno una velocità di deriva che è maggiore di alcune migliaia di volte rispetto a quella degli ioni H^+ in acqua.

Numero di Avogadro

Resistività dell'acqua distillata

Mobilità: m/s diviso Volt/*m*

Osserviamo che (come abbiamo visto nell'esempio E.IV.1) fissata la temperatura T, la velocità media $\bar{v}_T = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$ è inversamente proporzionale alla radice quadrata della massa della particella che si considera; dunque gli ioni, la cui massa è alcune migliaia di volte più grande rispetto alla massa degli elettroni, hanno una velocità di agitazione termica che è circa due ordini di grandezza più piccola – a parità di temperatura – rispetto a quella degli elettroni. Tuttavia, in virtù della loro minore mobilità, resta comunque verificata anche per gli ioni disciolti in un liquido la condizione che la loro velocità di deriva v_d è molto minore della loro velocità quadratica media termica $\bar{v}_T$.

Se nell'acqua distillata viene disciolta una sostanza organica (ad esempio zucchero), caratterizzata da un legame molecolare omeopolare, la conducibilità non è apprezzabilmente modificata. Se invece si porta in soluzione acquosa un acido o una base o i relativi sali (sostanze, dette anche *elettroliti*, le cui molecole sono caratterizzate da legami eteropolari), la conducibilità dell'acqua aumenta notevolmente.

In effetti, nel processo di soluzione di un sale si verificano alcuni fenomeni che possono essere così schematizzati:

Calore di soluzione

a) il sale si scioglie attraverso un processo endotermico, che cioè assorbe calore. Il calore assorbito risulta essere pari alla somma del calore latente di fusione e del calore latente di evaporazione. Il processo di soluzione può essere dunque assimilato alla liquefazione del sale e alla sua successiva gassificazione. Esso si arresta quando la concentrazione di soluto raggiunge un valore caratteristico (dipendente dal solvente e dal sale, oltreché dalla temperatura): la soluzione è allora *satura*.

Soluzione satura

b) Per effetto della costante dielettrica del solvente, i legami eteropolari che uniscono gli ioni a formare la molecola si allentano. Questo fenomeno è tanto più pronunciato quanto più grande è la costante dielettrica relativa del solvente (ad esempio, in acqua è $\varepsilon_r \simeq 80$; in alcool etilico è $\varepsilon_r = 26$). Per conseguenza, negli urti dovuti alla agitazione termica, può avvenire che le molecole di sale si scindano negli ioni costituenti. A regime, se la soluzione è molto diluita, praticamente tutte le molecole si scindono; a concentrazioni più elevate, il processo di scissione va in competizione con un processo di ricombinazione di ioni che casualmente si incontrino, finché si raggiunge una situazione di equilibrio in cui una certa frazione (sia α tale frazione) di molecole è scissa in ioni. La condizione di equilibrio chimico-fisico di questa reazione reversibile è descritta dalla *legge di azione di massa* (da noi introdotta nel par. V.5 di termodinamica).

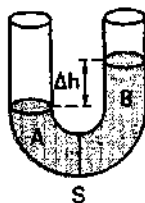
In base a questa semplice descrizione fenomenologica, ci aspettiamo che il soluto disciolto nel solvente si comporti come un gas contenuto nel volume occupato dal solvente, e avente un numero N di molecole pari a:

Legge di azione di massa

$$N = \underset{\text{(molecole non dissociate)}}{n\mathrm{N}(1-\alpha)} + \underset{\text{(ioni dissociati)}}{2n\mathrm{N}\alpha} = n\mathrm{N}(1+\alpha) \qquad \text{[IV.53]}$$

dove n è il numero di moli di sale in soluzione, N è il numero di Avogadro e α è la frazione di molecole di soluto che si sono dissociate.

Modello di Van t'Hoff

Pressione osmotica

Questo modello, formalizzato da Van t'Hoff e ben verificato sperimentalmente, prevede in particolare che la soluzione sia caratterizzata da una sua pressione (*pressione osmotica*) proporzionale – a parità di volume di solvente – al numero di particelle [IV.53] del soluto, e avente una dipendenza dal volume e dalla temperatura descritta dalla equazione di stato dei gas.

La pressione osmotica può essere misurata mediante il semplice dispositivo mostrato in figura. Nel tubo a U, i due bracci sono divisi dal setto poroso S che può essere attraversato dalle molecole del solvente, ma non da quelle del soluto né dai relativi ioni. La pressione osmotica «pompa» allora molecole del solvente dal braccio A (contenente soluzione) al braccio B (contenente solvente puro), fino a che la pressione idrostatica dovuta al dislivello Δh non equilibra la pressione osmotica. Misurando il dislivello Δh, può dunque essere misurata la pressione osmotica; e poiché nel modello di Van t'Hoff tale pressione è proporzionale al numero N di particelle del soluto (molecole più ioni), tramite la [IV.53] può essere misurato il *grado di dissociazione* α.

Grado di dissociazione

Si riscontra in particolare che α è indipendente dal campo elettrico eventualmente applicato dall'esterno tramite due elettrodi (realizzati ad esempio in metallo che non reagisca con la soluzione) immersi nella soluzione stessa e collegati a un generatore di f.e.m.

Poiché sono verificate le condizioni richieste (numero di portatori indipendente dal campo elettrico applicato; velocità di deriva piccola rispetto

alla velocità quadratica media dovuta alla agitazione termica) ci si aspetta che la conduzione elettrica in una soluzione elettrolitica soddisfi la legge di Ohm; ed in effetti così risulta sperimentalmente.

La conduzione elettrica negli elettroliti soddisfa la legge di Ohm

Via via che gli ioni, per effetto della conduzione elettrica, migrano verso gli elettrodi e, lasciando su di essi la loro carica elettrica, abbandonano la soluzione (sia che si depositino su di essi, sia che si liberino in loro vicinanza ad esempio in forma di gas) la concentrazione della soluzione va diminuendo; e se si trattava di una soluzione satura in presenza di sale non disciolto, la quantità di soluto che abbandona la soluzione viene via via compensata dal passaggio in soluzione di nuovo sale.

Il fenomeno della conduzione elettrica in soluzioni elettrolitiche va sotto il nome di *elettrolisi*, e la cella in cui l'elettrolisi si realizza è detta anche *voltametro*.

Elettrolisi
Voltametro

L'elettrolisi ha svariate applicazioni connesse con il fatto che il passaggio di elettricità è accompagnato da spostamento di materia dalla soluzione verso gli elettrodi; citiamo qui solo alcune di tali applicazioni.

Da quanto fin qui detto, risulta chiaro che, fissata la composizione della soluzione elettrolitica, indipendentemente dalla sua concentrazione la quantità di materiale che passa dalla soluzione agli elettrodi (ad esempio la quantità di rame, se si tratta di una soluzione di solfato di rame; o la quantità di argento, in una soluzione di nitrato d'argento) è proporzionale alla quantità di carica che è passata nel voltametro: infatti ogni ione trasporta un numero di cariche elettroniche pari alla sua valenza. Dunque la misura della quantità di materiale depositato consente di tarare strumenti di misura della carica e della corrente elettrica. In particolare il *Coulomb internazionale* è definito operativamente come la carica elettrica il cui passaggio in una cella elettrolitica a nitrato d'argento avente anodo d'argento e catodo di platino, deposita sul catodo 1,118 milligrammi di argento. Considerato che l'Ampere è definito come la corrente che trasporta un Coulomb al secondo, la stessa procedura consente anche di dare la definizione operativa di Ampere. Tuttavia, per convenzione internazionale si preferisce ricorrere, nel caso dell'Ampere, a una procedura di taratura diversa, che descriveremo nel prossimo capitolo.

Coulomb internazionale

La produzione industriale di molti elementi (metalli, gas) e di molti composti, viene effettuata elettroliticamente; e così pure la purificazione di alcuni metalli. Ad esempio usando rame impuro come anodo di una cella a solfato di rame, sul catodo si deposita rame con impurità inferiori a una parte su diecimila.

Usando come anodo un opportuno metallo (oro, argento, nichel, cromo, ecc.) con una opportuna soluzione elettrolitica, sul catodo si deposita uno strato di tale metallo più o meno spesso a seconda della durata del trattamento. Usando come catodo un oggetto da dorare, argentare, ecc., si ha così il processo della *galvanoplastica*.

Galvanoplastica

Un'altra interessante applicazione dell'elettrolisi si ha nei cosiddetti *condensatori elettrolitici*. Consideriamo una sottile lamina di ferro affacciata a una sottile lamina di alluminio; fra questi due elettrodi poniamo un tampone imbevuto in una soluzione di solfato di ammonio. Se si usa il ferro come anodo e l'alluminio come catodo, in questa cella elettrolitica passa corrente; ma se si inverte la polarità, a contatto con l'alluminio si forma un sottile strato di ossido di alluminio elettricamente isolante, e la conduzione si arresta. Il sistema si comporta allora come un condensatore, di cui una armatura è la lamina di ferro e l'altra è il tampone elettrolitico, mentre il dielettrico è rappresentato dal sottile strato di ossido. In virtù del piccolo

Condensatori elettrolitici

spessore di quest'ultimo (dell'ordine della decina di Angstrom), questo tipo di condensatore è caratterizzato da una elevatissima capacità per unità di superficie (dell'ordine del μF per cm²); gli svantaggi sono che esso non sopporta elevate differenze di potenziale (poche decine di Volt al massimo); e inoltre lavora solo con una polarità preferenziale sulle sue armature.

IV.12. Conduzione elettrica nei gas

Le molecole dei gas sono elettricamente neutre; dunque un gas, nel suo stato «naturale», è elettricamente isolante. Tuttavia nella pratica i gas sono di norma parzialmente ionizzati ad opera di agenti esterni che colpendo una molecola strappano ad essa un elettrone (*processo di ionizzazione*). Si produce così uno ione positivo e un elettrone. Se il gas non contiene molecole dotate di attività elettronica, l'elettrone è libero di muoversi come tale; altrimenti viene in breve tempo catturato a formare uno ione negativo. In ogni caso, ogni evento di ionizzazione (che va in competizione con un processo di ricombinazione che ha effetti trascurabili finché la percentuale di molecole ionizzate è bassa) genera una coppia di portatori di carica di segno opposto; e questi portatori producono una certa conducibilità elettrica del gas.

Ionizzazione

Già da quanto fin qui detto, è chiaro che la conducibilità elettrica di un gas – dipendente, come in ogni altro mezzo, dalla densità dei portatori e dalla loro mobilità – può essere condizionata da numerosi fattori esterni (dalla presenza di agenti ionizzanti; da effetti indiretti di moltiplicazione della ionizzazione prodotti dal campo elettrico applicato; ecc.) per cui la relativa fenomenologia si presenta assai complessa. Nel seguito ci limitiamo a descrivere in termini qualitativi i processi che più frequentemente si presentano nelle condizioni usuali.

A livello del mare, in un cm³ di aria atmosferica (contenente circa $3 \cdot 10^{19}$ molecole) sono presenti tipicamente fra 500 e 1000 ioni. Di questi, in media 1 circa è dovuto all'azione ionizzante di raggi cosmici (cioè alla azione diretta o indiretta di particelle di alta energia provenienti dallo spazio cosmico); alcune unità sono dovute all'effetto di particelle cariche o fotoni emessi nel decadimento radioattivo di materiali presenti nella crosta terrestre (fondo di radioattività naturale); alcune centinaia sono dovute all'azione ionizzante della banda ultravioletta della radiazione solare. Quest'ultimo effetto va aumentando all'aumentare della quota sul livello del mare: intorno a 100 km di quota (dove la densità dell'aria è scesa a $\sim 10^{11}$ molecole per cm³) una frazione apprezzabile delle molecole d'aria atmosferica è ionizzata (*ionosfera*). I meccanismi attraverso i quali particelle cariche energetiche e radiazione elettromagnetica di alta frequenza (ultravioletti, raggi X o γ) possono provocare la ionizzazione di un gas (e più in generale della materia nei suoi diversi stati di aggregazione) verranno da noi solo accennati; qui ci limitiamo a ricordare che l'energia di ionizzazione (cioè l'energia che deve essere comunicata a un elettrone atomico per strapparlo dal suo stato legato al nucleo) è dell'ordine di alcuni elettronvolt (un elettronvolt eV è l'energia che acquista un elettrone quando attraversa la differenza di potenziale di un volt: $1\ \text{eV} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1 \dfrac{\text{J}}{\text{C}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$)

Raggi cosmici

Fondo di radioattività naturale

Ionosfera

Elettronvolt eV
$1\ \text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

Naturalmente la densità di ioni presente in un campione di gas contenuto in un recipiente in laboratorio può essere molto diversa da quella caratteristica dell'aria atmosferica a livello del mare. Mantenendo il gas al

buio, si elimina la ionizzazione dovuta alla radiazione ultravioletta; opportune schermature possono ridurre, almeno in parte, l'effetto dei raggi cosmici meno energici e del fondo radioattivo naturale; per contro mediante l'uso di agenti esterni (ad esempio una sorgente radioattiva) si può aumentare notevolmente la ionizzazione specifica del campione.

Caratteristica $V = V(I)$ della conduzione di un gas

Se dall'esterno viene applicato un campo elettrico mediante due elettrodi collegati ai morsetti di un generatore di f.e.m., il gas viene attraversato da una corrente elettrica. Lo studio della conduzione elettrica nei gas può essere fatto usando un dispositivo come quello mostrato in figura. Il simbolo -/\/\/- indica una resistenza variabile mediante opportuna regolazione meccanica: una tale resistenza variabile è detta anche *potenziometro* o *reostato*. Variando la resistenza del reostato si varia la corrente che attraversa il gas, misurandola con l'amperometro (A); e in corrispondenza di ogni valore della corrente si misura la caduta di potenziale V fra gli elettrodi applicati al gas mediante il voltmetro (V).

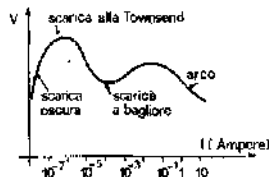
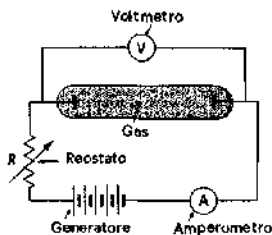
Si può così determinare la curva caratteristica $V = V(I)$ del gas, che risulta avere un andamento come quello mostrato in figura. Come si vede, si tratta di un andamento molto diverso da quello lineare caratteristico della legge di Ohm: un gas *non* si comporta come un conduttore ohmico.

Finché la corrente è molto debole, all'aumentare della corrente il potenziale (e dunque anche il campo elettrico applicato) aumenta rapidamente: la conducibilità del gas è assai modesta, essendo limitata dal numero di ioni prodotti per unità di tempo dagli agenti esterni (*Regime di scarica oscura*).

Scarica alla Townsend

All'aumentare della corrente, il potenziale aumenta rapidamente: l'energia acquisita da ioni ed elettroni fra un urto e l'altro può superare il valore richiesto affinché, nel successivo urto con una molecola, quest'ultima venga a sua volta ionizzata. Si raggiunge così un nuovo regime di conduzione (*scarica alla Townsend*), che innescata dagli ioni inizialmente presenti nel gas, può poi autosostenersi indipendentemente dalla presenza di agenti ionizzanti esterni. Il valore del potenziale a cui questo nuovo regime si presenta è condizionato da numerosi fattori. Va infatti considerato che l'energia acquisita dagli ioni fra un urto e l'altro dipende in primo luogo dal cammino libero medio Δl e questo a sua volta, oltre che dalla pressione P del gas, dipende dalle dimensioni delle particelle interessate al fenomeno, e quindi in particolare dal fatto che i portatori negativi siano elettroni o ioni; e dipende inoltre dalla caduta di potenziale per unità di lunghezza (cioè dal campo elettrico locale E) e questo è determinato, oltre e più che dal potenziale totale applicato, dalla geometria del sistema (in particolare dalla geometria e dalla distanza relativa fra gli elettrodi). A parità di composizione del gas, il passaggio da un regime all'altro dipende dal prodotto $E \cdot \Delta l$ e dunque dal rapporto E/P fra il campo elettrico e la pressione del gas (*legge di Paschen*).

Legge di Paschen

Aumentando ancora la corrente, la conducibilità del gas aumenta così rapidamente che correnti via via più intense comportano una caduta di potenziale via via decrescente fra gli elettrodi: la moltiplicazione degli ioni diviene un fenomeno a valanga ed è accompagnata dalla eccitazione di alcuni elettroni atomici dallo stato fondamentale a stati instabili; decadendo nuovamente nello stato fondamentale questi elettroni emettono energia luminosa e il gas si illumina (regime di *scarica a bagliore*). Per intensità di corrente ancora più elevate, si entra nel regime di *scarica ad arco*: il catodo, colpito da ioni positivi, si scalda a sufficienza così da emettere elettroni per effetto termoionico, e ciò aumenta ancor più la conducibilità del gas.

Scarica a bagliore
Scarica ad arco

Da quanto abbiamo fin qui visto, appare chiaro che i fenomeni connessi con la conduzione elettrica nei gas sono fenomeni assai complessi: complicazione ulteriormente aumentata dal fatto che alle elevate ionizzazioni caratteristiche dei regimi ad alta corrente si generano fenomeni di *carica spaziale* (a loro volta dipendenti dalla geometria degli elettrodi) capaci di produrre azioni di schermaggio elettrostatico; ovvero si generano zone di gas fortemente ionizzato ma mediamente neutro (con ugual numero di portatori positivi e negativi) detto *plasma*, nel qual caso possono presentarsi nel gas «elettrodi fittizi» che prolungano e deformano la geometria degli elettrodi reali.

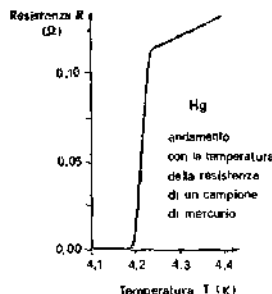
Carica spaziale

Plasma

Una trattazione dettagliata delle scariche elettriche nei gas, e delle loro molteplici applicazioni nei più svariati settori di impiego, ci porterebbe lontano dagli scopi del presente volume, e rimandiamo pertanto al riguardo a testi specialistici.

IV.13. Superconduttori

Metallo	Temperatura critica (K)	Campo critico (oersted)
Titanio	0,39	100
Vanadio	5,30	1420
Niobio	9,20	1980
Tantalio	8,80	830
Indio	3.40	293
Stagno	3,72	309
Mercurio	4,2	412

Alcuni superconduttori metallici, con relativa temperatura critica e campo magnetico critico

Come abbiamo visto nel par. IV.4 la resistività dei metalli diminuisce al diminuire della temperatura, e ciò è qualitativamente interpretabile in base a un semplice modello microscopico.

Molti metalli, e molte leghe metalliche, a temperatura molto bassa (dell'ordine di pochi gradi Kelvin, o di una frazione di Kelvin) divengono *superconduttori*: la loro resistività elettrica scende bruscamente a zero. Questo fenomeno non può essere interpretato in base alla fisica classica, ma solo ricorrendo alla meccanica quantistica (Teoria di Bardeen, Cooper e Schrieffer). La temperatura a cui un materiale diviene superconduttore è detta *temperatura critica*. In un circuito costituito di materiale allo stato superconduttivo, la corrente può circolare senza dissipazioni: una volta avviata la circolazione, essa può mantenersi senza l'azione di alcuna forza elettromotrice. In spire superconduttrici è stata fatta così circolare corrente per anni senza che si sia osservata alcuna diminuzione della intensità della corrente stessa. I materiali superconduttori godono di altre proprietà notevoli: se immersi in un campo magnetico (che definiremo nel prossimo capitolo) purché di intensità inferiore a un certo valore critico, espellono il campo magnetico stesso (*effetto Meissner*). Se il campo magnetico supera il valore critico, il campione cessa però di essere superconduttore anche se la sua temperatura è inferiore a quella critica.

Recentemente, sono stati trovati materiali ceramici per i quali la temperatura critica è assai alta (molte decine di Kelvin, o addirittura superiore ai 200 K): ciò può aprire spazi ad applicazioni di grande interesse, oltre alle già interessanti applicazioni dei superconduttori «classici».

IV.14. Cenno ad alcuni metodi di misura di correnti, differenze di potenziale e resistenze

Le metodologie delle misure elettriche vengono sviluppate in dettaglio in corsi specifici; qui ci limitiamo ad accennare ad alcuni schemi generali di misura delle grandezze fisiche fin qui introdotte, cioè correnti, differenze di potenziale e resistenze.

Galvanometro

La maggior parte degli strumenti normalmente usati per queste misure si basano sul *galvanometro a bobina mobile*. Come si vedrà nel prossimo

capitolo, una spira percorsa da corrente, posta in un opportuno campo magnetico esterno, è sollecitata da un momento meccanico proporzionale alla corrente I_g che passa nella spira.

Il galvanometro a bobina mobile è costituito da un filo conduttore avvolto in varie spire rigide (bobina). La bobina, immersa nel campo magnetico generato da un piccolo magnete permanente, può ruotare intorno a un asse (nella figura tale asse è ortogonale al foglio) ed è richiamata verso la posizione di equilibrio da una coppia di richiamo, realizzata ad esempio con una molletta a spirale.

In assenza di corrente I_g circolante nella bobina, la posizione di equilibrio corrisponde alla posizione di riposo della molla: in corrispondenza è segnato lo zero sulla scala graduata. Quando nella bobina passa la corrente I_g, si stabilisce una nuova posizione di equilibrio quando la coppia dovuta alle forze magnetiche (di momento proporzionale a I_g) è equilibrata dalla coppia di richiamo elastica.

Una volta tarato, il galvanometro permette di leggere direttamente la corrente sulla scala graduata.

Resistenza interna r_g

Parametri caratteristici di un galvanometro sono la *resistenza interna* r_g, cioè la resistenza che la bobina offre al passaggio di corrente (tipicamente r_g è dell'ordine di alcuni ohm) e la massima corrente compatibile con l'ampiezza della scala graduata (*corrente di fondo scala* o corrente massima I_{max}, tipicamente dell'ordine di alcuni milliampere).

Corrente di fondo scala I_{max}

Un galvanometro può essere collegato in serie al circuito in cui circola corrente I: si dice allora che si è realizzato un *amperometro* per la misura di I. Nello schema mostrato in figura, l'amperometro è indicato col simbolo (A): evidentemente la corrente I_g che in esso passa è pari alla corrente I che circola nel circuito.

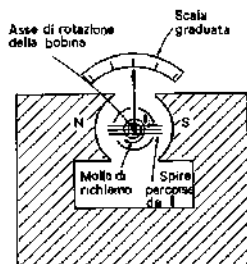
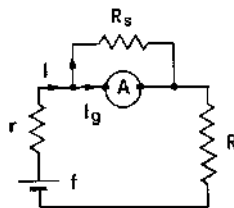
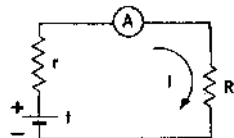
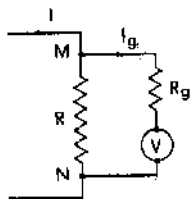
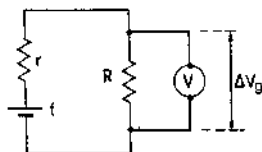
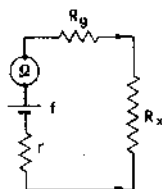
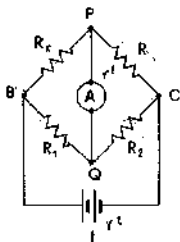
Col suo inserimento nel circuito, l'amperometro produce una perturbazione della corrente I che precedentemente circolava nel circuito. Infatti, detta I_{vera} la corrente che circola in assenza di amperometro e I_{mis} la corrente che circola quando è inserito l'amperometro e da questo misurata, si ha:

$$I_{vera} = \frac{f}{r + R} \qquad I_{mis} = \frac{f}{r + R + r_g} \qquad \text{[IV.54]}$$

Dunque $I_{mis} < I_{vera}$, e si può assumere $I_{mis} \simeq I_{vera}$ solo quando $r_g \ll r + R$. Di norma il valore di $r + R$ è tale che questa condizione è ben verificata; in caso contrario è necessario applicare una correzione secondo la relazione

$$I_{vera} = I_{mis}\left(1 + \frac{r_g}{r + R}\right) \qquad \text{[IV.55]}$$

che immediatamente si ricava dalle [IV.54].

Quando la corrente che circola nel circuito è maggiore della corrente di fondo scala I_{max}, occorre intervenire per variare la portata dell'amperometro. Ciò si realizza usualmente disponendo in parallelo all'amperometro una opportuna resistenza R_S, detta *resistenza di shunt*: così solo una frazione I_g della corrente I passa nell'amperometro. Negli usuali strumenti di laboratorio è possibile variare la resistenza di shunt azionando semplicemente un commutatore, in modo da adattare il fondo scala dell'amperometro alla corrente che si vuole misurare. Di solito si ha $R_S < r_g$.

Misura di d.d.p.: voltmetro

Un'altra modalità di impiego del galvanometro a bobina mobile consiste nel collegarlo in parallelo ad una resistenza R (o a un elemento qualunque del circuito). Poiché la differenza di potenziale ΔV_g ai capi del galvanometro è proporzionale alla corrente I_g che in esso circola, la deflessione dell'indice del galvanometro (che misura I_g) può indicare anche, mediante opportuna taratura, la differenza di potenziale ΔV_g presente ai capi dell'elemento di circuito cui il galvanometro è stato posto in parallelo. Uno strumento che lavori in questo modo è detto *voltmetro*. Perché il collegamento in parallelo del voltmetro non alteri apprezzabilmente la d.d.p. ai capi del carico R, si provvede a porre in serie al galvanometro una resistenza R_g opportunamente grande. Si vuole, in sostanza, che la resistenza equivalente tra i nodi M ed N sia molto prossima alla resistenza di carico R. Ciò significa che deve essere

$$\frac{R\,(R_g + r_g)}{R + R_g + r_g} \simeq \frac{R\,R_g}{R + R_g} \simeq R$$

condizione verificata quando $R_g >> R$. Dunque un voltmetro deve essere caratterizzato da una resistenza interna molto maggiore della resistenza di carico, ai cui capi è collegato.

Misure di resistenza: ohmetro

Corredandolo con un generatore di forza elettromotrice nota f, un galvanometro può essere usato per misurare una resistenza incognita R; in questa modalità di impiego esso viene detto *ohmetro* (Ω).

Il generatore, di resistenza interna r, viene posto in serie al galvanometro di resistenza R_g e alla resistenza R_x. La corrente che passa nel galvanometro, e che viene da esso misurata, vale

$$I_g = \frac{f}{r + R_g + R_x}$$

per cui, con una opportuna taratura della scala graduata, si ottiene una lettura diretta della resistenza R_x. È da osservare che non appena $R_x >> R_g$ la corrente I_g risulta approssimativamente inversamente proporzionale a R_x, e quindi la scala delle resistenze non è una scala lineare.

Esempio

Ponte di Wheatstone

E.IV.22. *Un metodo per misurare con elevata precisione una resistenza incognita R_x è fornito dal cosiddetto* ponte di Wheatstone, *cioè dal circuito mostrato in figura. In esso R è una resistenza fissa e nota, R_1 ed R_2 sono resistenze variabili di valori noti, mentre fra i punti P e Q è collegato un amperometro e fra i punti B e C un generatore di forza elettromotrice f. Per la misura di R_x, si variano R_1 ed R_2 aggiustandole su valori tali che la corrente nell'amperometro A si annulli (condizione di azzeramento). In questa situazione, quale è la relazione che lega R_x alle altre resistenze R, R_1, R_2 (note) presenti nel ponte?*

Indicando con I_1 la corrente che passa nel ramo BPC (I_1 passa sia in R_x che in R nell'ipotesi che in (A) non passi corrente), e analogamente indicando con I_2 la corrente che passa nel ramo BQC (la stessa sia in R_1 che in R_2), essendo nulla la differenza di potenziale fra P e Q deve essere:

$$I_1 R_x = I_2 R_1 \qquad I_1 R = I_2 R_2$$

da cui:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_x}{R_1} = \frac{R}{R_2}$$

e quindi:

$$R_x = R_1 \frac{R}{R_2}$$

IV.15. Circuiti percorsi da corrente quasi stazionaria

Segnali elettromagnetici

Come vedremo meglio più avanti, le variazioni del campo elettromagnetico (*segnali elettromagnetici*) si propagano alla velocità della luce, che nel vuoto è di circa trecentomila chilometri al secondo e in altri materiali, benché sia minore che nel vuoto, è comunque dello stesso ordine di grandezza. Ad esempio, per percorrere un metro i segnali elettromagnetici impiegano poco più di tre nanosecondi, cioè di tre miliardesimi di secondo.

Condizioni quasi-stazionarie

Molto spesso, si ha a che fare con circuiti in cui le sollecitazioni elettriche (ad esempio il potenziale applicato ai capi di una resistenza) non sono costanti nel tempo, ma le variazioni non sono così rapide da produrre effetti apprezzabili nel tempo impiegato dai segnali elettromagnetici per propagarsi da un capo all'altro del circuito. In questo caso, ad ogni istante la configurazione delle grandezze elettriche (corrente, campo elettrico, ecc.) ha tempo per aggiustarsi a soddisfare le relazioni proprie del caso stazionario prima che intervengano variazioni apprezzabili delle grandezze stesse. Si dice allora che il circuito opera in *condizioni quasi stazionarie*: fra le grandezze elettriche nel circuito valgono le leggi caratteristiche del caso stazionario (legge di Ohm generalizzata, leggi di Kirchhoff, ecc.) pur di intenderle come relazioni fra valori istantanei.

Va osservato che la trattazione dei problemi di correnti variabili nel tempo secondo l'approssimazione quasi-stazionaria implica in particolare che si trascuri l'energia emessa nella forma di radiazione elettromagnetica, di cui ci occuperemo nel capitolo IX. Nel caso di correnti stazionarie e quasi stazionarie, l'energia fornita dai generatori si troverà pertanto tutta localizzata nel campo elettrico e magnetico presente nello spazio circostante, ovvero sarà dissipata per effetto Joule.

Esempi

Scarica di un condensatore su una resistenza: circuito RC

E.IV.23. *Se il condensatore di capacità C inserito nel circuito mostrato in figura ha carica Q_0 prima che l'interruttore T venga chiuso, determinare l'andamento in funzione del tempo t della corrente che passa nella resistenza R.*

Come verificheremo fra poco, si tratta di un circuito per cui di norma è verificata la condizione di quasi-stazionarietà. Se $V(t)$ è la differenza di potenziale presente ai capi del condensatore all'istante t, avendo preso come istante $t = 0$ quello in cui l'interruttore T è stato chiuso, a tale istante la legge di Ohm per la resistenza R si scrive:

$$V(t) = I(t) \cdot R$$

e tenuto conto che fra il potenziale e la carica del condensatore vale la relazione $V(t) = \dfrac{Q(t)}{C}$:

$$\frac{Q(t)}{C} = I(t) \cdot R \qquad [IV.56]$$

Nel tempo elementare dt la resistenza è attraversata da una carica $I\,dt$; e per la conservazione della carica questa deve rappresentare anche la diminuzione della carica Q posseduta dal condensatore:

$$-dQ = I\,dt \quad \text{da cui} \quad -\frac{dQ}{dt} = I \qquad \text{[IV.57]}$$

relazione che sostituita nella [IV.56] fornisce:

$$-\frac{dQ}{dt} \cdot R = \frac{Q}{C}$$

da cui

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

costante-tempo $\tau = RC$

In un intervallo di tempo pari ad una costante-tempo τ la grandezza si riduce di un fattore $(1/e)$ rispetto al valore iniziale

Al prodotto $\tau = RC$ si dà il nome di *costante-tempo* del circuito

$$[\tau] = [RC] = [\text{Ohm} \cdot \text{Farad}] = \left[\frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} \cdot \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}\right] = \left[\frac{\text{Coulomb}}{\text{Coulomb/sec}}\right] = [\text{sec}]$$

Integrando l'equazione differenziale si ha

$$\log Q = -\frac{t}{\tau} + \text{cost}$$

ovvero, passando dai logaritmi ai numeri:

$$Q(t) = A\,e^{-t/\tau} \text{ (con } A \text{ costante di integrazione)}$$

Imponendo la condizione iniziale $Q(0) = Q_0$, si ha $A = Q_0$; e dunque

$$Q(t) = Q_0\,e^{-t/\tau} \qquad (\tau = RC)$$

Dalla conoscenza della carica Q presente nel circuito in funzione del tempo, usando la [IV.57] si ricava la corrente

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}$$

cioè:

$$I(t) = \frac{Q_0}{RC}\,e^{-t/\tau} \qquad \text{[IV.58]}$$

ovvero anche

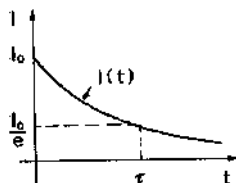
$$I(t) = \frac{V_0}{R}\,e^{-t/\tau} = I_0\,e^{-t/\tau} \qquad (\text{con } \tau = RC) \qquad \text{[IV.58.a]}$$

dove $V_0 = \frac{Q_0}{C}$ è la differenza di potenziale iniziale ai capi del condensatore, e I_0 è la corrente che circola in R sempre all'istante $t = 0$.

Ad esempio, se $C = 0{,}1\,\mu\text{F} = 10^{-7}$ F e $R = 100\,\Omega$, si ha

$$\tau = RC = 10^{-7}\,\text{F} \cdot 100\,\Omega = 10^{-5}\,\text{sec}$$

Se le dimensioni lineari del circuito sono dell'ordine di 0,1 m, il tempo impiegato dai segnali elettromagnetici per attraversarlo è dell'ordine di $3 \cdot 10^{-10}$ sec, e la condizione di quasi-stazionarietà è soddisfatta.

Carica residua su un condensatore

E.IV.24. *Un condensatore di capacità $C = 10^{-6}$ F = 1 μ F si scarica su una resistenza $R = 1000\ \Omega = 1\ k\Omega$. Quale percentuale della carica iniziale rimane sul condensatore dopo 3 millesimi di secondo?*

Abbiamo visto (eq. [IV.58]) che la carica nel condensatore decresce in modo esponenziale. Ciò vuol dire che, in linea di principio, un condensatore impiega un tempo infinito a scaricarsi su una resistenza. In realtà la legge esponenziale garantisce una scarica molto veloce verso valori, se non nulli, trascurabili. Nel caso di questo esempio, si ha:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \rightarrow \frac{Q(t)}{Q_0} = e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC = (10^3\ \Omega)(10^{-6}\ F) = 10^{-3}\ s = 1\ ms$$

L'intervallo di tempo di 3 ms corrisponde a 3 costanti di tempo, per cui:

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = e^{-3} \simeq 5 \cdot 10^{-2} = 5\%$$

In 3 costanti di tempo il condensatore ha perduto circa il 95% della sua carica.

Energia associata alla scarica del condensatore sulla resistenza

E.IV.25. *Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule sulla resistenza R del circuito RC discusso negli esempi precedenti e confrontarla con l'energia elettrostatica inizialmente presente nel condensatore.*

Abbiamo visto che la corrente che passa nella resistenza R ha la forma (eq. [IV.58●]):

$$I = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau} \qquad \text{con } \tau = RC$$

L'energia U_J dissipata in R per effetto Joule vale, nell'intervallo di tempo in linea di principio infinito che va dall'istante in cui l'interruttore viene chiuso all'istante in cui la corrente diventa nulla,

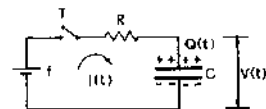
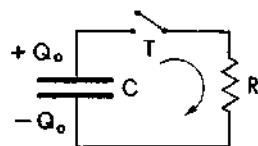
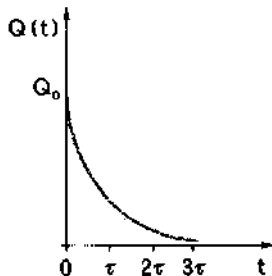
$$U_J = \int_0^\infty I^2 R\, dt = R \frac{Q_0^2}{R^2 C^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = -\frac{Q_0^2}{2C} \left[e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

L'energia elettrostatica del condensatore, prima dell'inizio della scarica, vale proprio $U_E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$. È da osservare che, come avevamo anticipato, l'aver trattato il problema nella schematizzazione di corrente quasi-stazionaria implica che l'energia iniziale, di tipo elettrostatico, si ritrovi integralmente convertita in calore per effetto Joule, senza nessuna perdita per irraggiamento elettromagnetico.

Carica di un condensatore

E.IV.26. *Un condensatore di capacità C viene caricato con un generatore di f.e.m. f, attraverso una resistenza in serie R, iniziando, al tempo t = 0 in cui viene chiuso l'interruttore, da una situazione di carica nulla. Ricavare l'espressione della corrente I(t) attraverso R e della d.d.p. V(t) ai capi condensatore.*

L'equazione del circuito si ricava dalla legge di Kirchhoff per le maglie, tenendo conto che il condensatore C si comporta come un generatore di d.d.p. variabile nel tempo di segno opposto ad f. Si ha dunque

$$f - V(t) = R\,I(t) \qquad \text{[IV.59]}$$

Indicando come al solito con $Q(t)$ la carica presente al tempo t sul condensatore, la variazione di carica dQ che si realizza nel tempo dt è pari, per la conservazione della carica elettrica, alla carica $I\,dt$ che passa nella resistenza R. In questo caso, a differenza della situazione di scarica del condensatore esaminata nell'esempio E.IV.23, si ha $I\,dt = +\,dQ$, perché, ad un passaggio di carica $I\,dt$ in R, corrisponde un aumento di carica sul condensatore. L'equazione del circuito [IV.59] diventa:

$$f - \frac{Q(t)}{C} = R\frac{dQ}{dt}$$

che è un'equazione differenziale nella funzione $Q(t)$. Integrando per separazione di variabili, si ha:

$$-\frac{d(fC-Q)}{(fC-Q)} = \frac{dt}{RC} \quad \text{da cui} \quad \ln[fC - Q(t)] = -\frac{t}{\tau} + \text{cost}$$

con $\tau = RC$. Dunque

$$Q(t) = fC - Ke^{-t/\tau},$$

dove la costante arbitraria K si determina imponendo la condizione iniziale per cui a $t = 0$ si ha $Q = 0$. Si trova: $K = fC$ e dunque:

$$Q(t) = fC(1 - e^{-t/\tau})$$

da cui

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = f(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \text{[IV.60]}$$

Per quanto riguarda la corrente, si ha:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -fC\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-t/\tau} = \frac{f}{R}e^{-t/\tau}$$

È interessante osservare che la corrente iniziale $I(0) = f/R$ è la stessa che si avrebbe se il condensatore fosse un corto circuito. Poi, a mano a mano che il condensatore si carica, la d.d.p. ai capi di R diminuisce così come la corrente $I(t)$ che circola in R.

E.IV.27. *Nel circuito dell'esempio E.IV.26, calcolare l'energia U_g erogata dal generatore nel processo di carica completa del condensatore C.*

La potenza erogata dal generatore varia nel tempo secondo la legge [IV.31]: $W(t) = I(t)\cdot f$. La carica completa della capacità prende, in linea di principio, un tempo infinito, per cui:

$$U_g = \int_0^\infty W(t)\,dt = \int_0^\infty I(t)\,f\,dt = f\int_0^\infty \frac{f}{R}e^{-t/\tau}\,dt$$

con $\tau = RC$. Dunque:

$$U_g = \frac{f^2}{R}(-RC)\left[e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = Cf^2.$$

Metà di questa energia si ritrova sotto forma di energia elettrica nel condensatore:

$$U_E = \frac{1}{2}\, C\, V^2 (t \to \infty) = \frac{1}{2}\, C f^2$$

La parte di energia dissipata per effetto Joule sulla resistenza R è dunque uguale a quella elettrostatica U_E e vale $U_J = \dfrac{1}{2}\, C f^2$.

E.IV.28. *Nel circuito di figura, all'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore T. Ricavare la legge con cui varia nel tempo la d.d.p. $V(t)$ ai capi del condensatore C, nell'ipotesi che, per $t = 0$, questo sia scarico.*

Si tratta di una rete a due maglie, per la quale, in regime di corrente quasi-stazionaria, è applicabile il metodo delle correnti di maglia in modo analogo a quello usato nell'esempio E.IV.15.

Le equazioni delle maglie si scrivono nel modo seguente:

$$\begin{cases} f - V(t) = I_1(t)\, r \\ V(t) = I_2(t)\, R, \qquad \text{da cui} \quad I_2(t) = V(t)/R \end{cases}$$

Si hanno così due equazioni per tre grandezze incognite (I_1, I_2, V). Una terza relazione è fornita dalla prima legge di Kirchhoff al nodo N in cui, detta $Q(t)$ la carica presente nel condensatore C al tempo t, deve valere la relazione:

$$I_1(t) = I_2(t) + \frac{dQ}{dt} \qquad \text{con} \quad Q(t) = C\, V(t)$$

Sostituendo nella prima equazione, si ha:

$$f - V(t) = I_1(t)\, r = \frac{V(t)}{R}\, r + C\, \frac{dV}{dt}\, r,$$

da cui:

$$f - V(t)\left(1 + \frac{r}{R}\right) = r\, C\, \frac{dV}{dt}$$

$$f - V(t)\, \frac{R + r}{R} = r\, C\, \frac{dV}{dt},$$

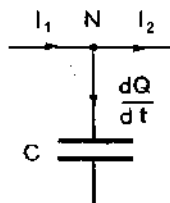
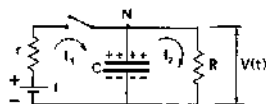
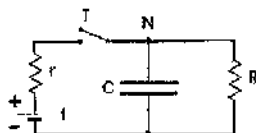
da cui:

$$\frac{f}{r} - \frac{V(t)}{R_{//}} = C\, \frac{dV}{dt}$$

avendo indicato con $R_{//}$ la resistenza equivalente al parallelo di r ed R. Si ha dunque:

$$f\, \frac{R_{//}}{r} - V(t) = R_{//}\, C\, \frac{dV}{dt},$$

da cui, separando le variabili:

$$\frac{dV}{f\, \frac{R_{//}}{r} - V(t)} = \frac{dt}{R_{//}\, C} = \frac{dt}{\tau} \qquad \text{con} \quad \tau = R_{//}\, C\,.$$

Integrando:

$$\ln\left[f\frac{R_{//}}{r} - V(t)\right] = -\frac{t}{\tau} + \text{cost}\,,$$

da cui:

$$f\frac{R_{//}}{r} - V(t) = K e^{-t/\tau}\,,$$

con K costante arbitraria.

Imponendo la condizione iniziale: $V(t=0) = 0$, si ha:

$$K = f\frac{R_{//}}{r}$$

da cui

$$V(t) = f\frac{R_{//}}{r}(1 - e^{-t/\tau}) = f\frac{R}{R+r}(1 - e^{-t/\tau})\,.$$

È da osservare che il valore asintotico $V(t \to \infty) = f\frac{R}{R+r}$ è quello che si poteva prevedere pensando che, una volta caricato il condensatore, la d.d.p. ai suoi estremi è la stessa che si ha ai capi del carico R nel partitore resistivo costituito dalle due resistenze r ed R in serie ad f.

Esercizi del IV capitolo

IV.1. Una batteria, di f.e.m. $f = 1{,}5$ V e resistenza interna $r = 2\ \Omega$, ha i morsetti collegati ai capi di un carico di resistenza $R = 10\ \Omega$. Quanto vale la d.d.p. tra i morsetti?
(Risposta: $\Delta V = 1{,}25$ V)

IV.2. Due batterie uguali di f.e.m. f e resistenza interna $r = 1\ \Omega$, collegate in serie, sono chiuse su un carico $R = 5\ \Omega$, nel quale passa una corrente I_S. Le stesse batterie, collegate in parallelo, fanno passare attraverso R una corrente I_P. Calcolare il rapporto I_S/I_P.
(Risposta: $I_S/I_P = 1{,}57$)

IV.3. Il circuito mostrato in figura rappresenta una rete di resistenze R tutte uguali tra loro. Una corrente $I = 8$ A entra nel nodo N ed esce dal nodo P. Calcolare l'intensità di corrente I_3 che passa nel ramo MQ.
(Risposta: $I_3 = 1$ A)

IV.4. Nel circuito indicato in figura, calcolare le d.d.p. $(V_A - V_C)$ e $(V_B - V_C)$ sia con l'interruttore T aperto, sia con l'interruttore chiuso, per $f_1 = f_2 = 1{,}5$ V, $r_1 = 1\ \Omega$, $r_2 = 2\ \Omega$, $R = 5\ \Omega$.

(Risposte: $V_A - V_C = 1{,}125$ V a T aperto
$V_A - V_C = 0{,}5$ V a T chiuso
$V_B - V_C = -0{,}75$ V a T aperto
$V_B - V_C = 0{,}5$ V a T chiuso)

IV.5. La d.d.p. tra i punti A e B del circuito di figura è $\Delta V = V_A - V_B = 10$ V. Calcolare il valore di f_2, sapendo che $r_1 = 1\ \Omega$, $r_2 = 2\ \Omega$ ed $f_1 = 12$ V.
(Risposta: $f_2 = 6$ V)

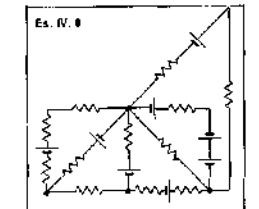
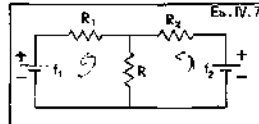
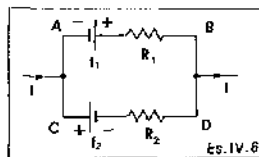
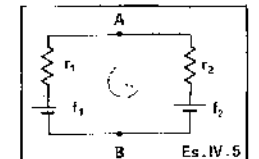
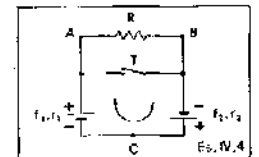
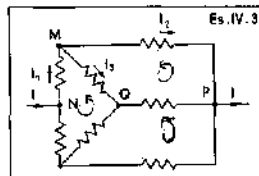
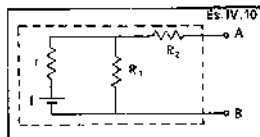
IV.6. La figura mostra una parte di una rete percorsa da correnti stazionarie. Calcolare le correnti I_1 ed I_2 che circolano, rispettivamente, nei rami AB e CD, per i seguenti valori dei componenti del circuito:

$f_1 = 10$ V, $f_2 = 20$ V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $I = 2$ A

e nell'ipotesi che le resistenze interne dei generatori f_1 ed f_2 siano trascurabili.
(Risposte: $I_1 = 1{,}43$ A; $I_2 = 0{,}57$ A)

IV.7. Nella rete di figura si ha: $f_1 = 10$ V, $R_1 = 100\ \Omega$, $f_2 = 20$ V, $R_2 = 200\ \Omega$, $R = 300\ \Omega$. Calcolare la corrente stazionaria I_1 erogata dal generatore f_1, nell'ipotesi che siano trascurabili le resistenze interne di entrambi i generatori.
(Risposta: $I_1 = -9{,}1$ mA)

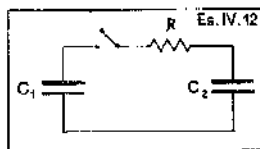
IV.8. Quante equazioni di maglia indipendenti si hanno nel circuito disegnato in figura?
(Risposta: 5)

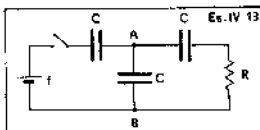
IV.9. Nel circuito dell'esercizio IV.3, supponiamo di collegare il punto P a terra e di tenere il punto N a potenziale fisso $V = 100$ V. A che potenziale si trova il nodo Q?
(Risposta: $V_Q = 28{,}6$ V)

IV.10. Ricavare l'espressione della f.e.m. f_E e della resistenza r_E equivalenti, secondo il teorema di Thevenin, al circuito disegnato in figura visto dai morsetti A e B. Valori numerici:

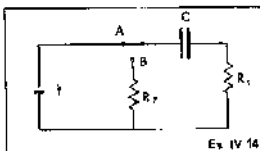
$$f = 10\ \text{V}, \qquad r = 2\ \Omega, \qquad R_1 = 10\ \Omega, \qquad R_2 = 5\ \Omega.$$

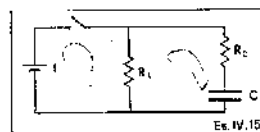
(Risposte: $f_E = 8{,}3$ V, $r_E = 6{,}7\ \Omega$)

IV.11. Un circuito è costituito da N generatori identici, di f.e.m. f e resistenza interna r, disposti in serie per formare una maglia. Tutti i generatori sono collegati con verso concorde tranne uno. Quanto vale la d.d.p. ai capi di questo generatore, collegato invertito, se $N = 10$ ed $f = 10$ V?

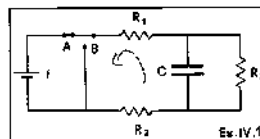
(Risposta: $\Delta V = 18$ V)

IV.12. Nel circuito di figura il condensatore $C_1 = 2\ \mu\text{F}$ inizialmente caricato alla tensione $V_{10} = 200$ V, viene, al tempo $t = 0$ collegato, per effetto della chiusura dell'interruttore, alla serie della resistenza $R = 10\ \text{k}\Omega$ e del condensatore di capacità $C_2 = 4\ \mu\text{F}$, inizialmente scarico. Calcolare il valore della d.d.p. V_2 ai capi della capacità C_2 al tempo $t^* = 5$ ms.

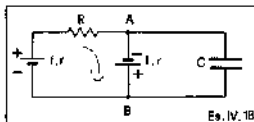
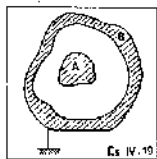
(Risposta: $V_2(t^*) = 65{,}3$ V)

IV.13. Nel circuito di figura, i tre condensatori sono uguali ed inizialmente scarichi. Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Ricavare l'espressione della d.d.p. tra i punti A e B a regime, sapendo che $f = 7$ V.

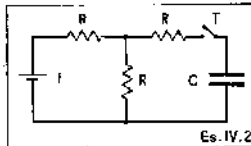
(Risposta: $V_A - V_B = 2{,}3$ V)

IV.14. Nel circuito mostrato in figura, tenendo il commutatore in posizione A, il condensatore C viene caricato al suo massimo valore. Al tempo $t = 0$, il commutatore viene spostato in posizione B e così lasciato fino alla scarica completa del condensatore C. Quanta energia viene dissipata nella resistenza R_1, per effetto Joule, durante il processo di scarica?

$$\left(\text{Risposta: } U_J = \frac{R_1\, C f^2}{2\,(R_1 + R_2)}\right)$$

IV.15. Al tempo $t = 0$ viene chiuso l'interruttore del circuito descritto nella figura. Nell'ipotesi che si possa trascurare la resistenza interna del generatore e che il condensatore sia inizialmente scarico, ricavare le espressioni delle correnti che circolano nelle resistenze R_1 ed R_2 rispettivamente, nonché la d.d.p. $v(t)$ ai capi del condensatore C.

IV.16. Nella scarica di un condensatore di capacità $C = 4\ \mu\text{F}$ su una resistenza $R = 5\ M\Omega$, in quanto tempo t^* si dimezza l'energia immagazzinata nel condensatore?

(Risposta: $t^* = 6{,}9$ s)

IV.17. Nel circuito schematizzato in figura, in cui la f.e.m. f ha resistenza interna trascurabile, il commutatore è inizialmente nella posizione A, così che si raggiunge una situazione di regime. All'istante $t = 0$, il commutatore viene posto in posizione B. Ricavare per $t > 0$, l'espressione della funzione $Q(t)$ che rappresenta la carica presente sul condensatore.

IV.18. Calcolare il valore della carica Q che, a regime, si trova sul condensatore di capacità $C = 1\ \mu F$, se $R = 20\ \Omega$ ed i generatori sono identici con $f = 1{,}5$ V ed $r = 2\ \Omega$. (Risposta: $Q = 1{,}25\ \mu C$)

IV.19. I due elettrodi metallici A e B rappresentati in figura, e tali che B racchiude completamente A, sono mantenuti a d.d.p. $(V_A - V_B) = 10$ V. Tra i due elettrodi scorre una corrente $I = 1$ mA. Tra i due elettrodi c'è un dielettrico omogeneo, di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 2$, non perfettamente isolante, di resistività $\rho = 10^7\ \Omega$m. Calcolare la capacità del condensatore costituito dagli elettrodi A B. (Risposta: $C = 1{,}8 \cdot 10^{-6}$ F)

IV.20. Nel circuito di figura, in cui la f.e.m. f ha resistenza interna trascurabile e T è un interruttore che viene chiuso ad un certo istante, ricavare l'espressione della costante di tempo di carica del condensatore.

$$\left(\text{Risposta: } \tau = \frac{3\,RC}{2}\right)$$

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del IV capitolo

IV.1. Vedere l'esempio E.IV.12.

IV.2. Nel collegamento in serie, applicare la seconda legge di Kirchhoff alla maglia, mentre, nel collegamento in parallelo, ricordare l'esempio E.IV.15.

IV.3. Osservare che, rispetto ai nodi N e P, la rete presenta simmetria. Tenere conto che la d.d.p. $(V_M - V_P)$ può essere espressa sia come prodotto $I_2 R$, sia come somma della d.d.p. $(V_M - V_Q) + (V_Q - V_P)$.

IV.4. Applicare la seconda legge di Kirchhoff per la maglia e la legge di Ohm generalizzata (IV.46) per le varie d.d.p.

IV.5. Utilizzare la seconda legge di Kirchhoff e la legge di Ohm generalizzata.

IV.6. Applicare la prima legge di Kirchhoff e la legge di Ohm generalizzata.

IV.7. Usare il metodo delle correnti di maglia.

IV.8. Nell'analisi per maglie, il numero di equazioni indipendenti, necessarie per risolvere una rete, è legato al numero di nodi ed al numero di rami mediante una precisa relazione.

IV.9. Con le notazioni usate nella soluzione dell'esercizio IV.3, si ha $V_Q = 2 I_3 R$. Ricavare I_3 in funzione di I ed I in funzione di V.

IV.10. Applicare il teorema di Thevenin

IV.11. Applicare, come nell'esempio E.IV.14, la seconda legge di Kirchhoff e la legge di Ohm generalizzata.

IV.12. Scrivere l'equazione del circuito e, per la relazione tra le cariche $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ presenti sui due condensatori, imporre la conservazione della carica.

IV.13. La situazione di regime è caratterizzata dal fatto che non circola più corrente nel circuito. A regime, dunque, tra i punti A e B si può pensare un condensatore di capacità $2\,C$ (parallelo di due condensatori uguali). Si tratta di un partitore capacitivo.

IV.14. Alla fine del processo di carica, il condensatore si trova alla tensione f. Nel processo di scarica, che avviene sulla serie delle resistenze R_1 ed R_2, la potenza, e quindi l'energia dissipata, si ripartiscono in modo proporzionale ad R_1 ed R_2 rispettivamente.

IV.15. Usare il metodo delle correnti di maglia (I_1 ed I_2) tenendo conto che, per quanto riguarda la resistenza R_1, la corrente richiesta è $(I_1 - I_2)$.

IV.16. Esprimere l'energia del condensatore in funzione della sua carica $Q(t)$, il cui andamento nel tempo è ricavato nell'esempio E.IV.23, e poi imporre la condizione di dimezzamento per ricavare t^*.

IV.17. La carica presente sul condensatore al tempo $t = 0$ si ricava osservando che il condensatore è piazzato tra gli estremi di una resistenza facente parte di un partitore resistivo. Con il commutatore posto in posizione B, la f.e.m. f è esclusa dal circuito e la successiva scarica del condensatore avviene su una resistenza R equivalente ad un'appropriata combinazione di R_2, R_1 ed R_3.

IV.18. Applicare la legge di Ohm generalizzata per il ramo AB e la seconda legge di Kirchhoff per la maglia contenente i due generatori.

IV.19. Ricordare la relazione [IV.45] e la discussione che segue.

IV.20. Applicare il teorema di Thevenin. In alternativa, in modo più laborioso, applicare il metodo delle correnti di maglia alla rete a due maglie in cui il circuito può schematizzarsi.

Capitolo quinto

Fenomeni magnetici stazionari nel vuoto

È noto fin dall'antichità (Talete, Archimede, tradizione cinese, ecc.) che esistono dei minerali (ad esempio Fe_3O_4, detto *magnetite*) capaci di attrarre piccoli oggetti di ferro come limatura, spilli, ecc. Si tratta di forze che normalmente sperimentiamo con le calamite a ferro di cavallo, barrette o aghi magnetici, ecc.; esse vanno sotto il nome di *forze magnetiche.*

Fenomeni magnetici

Avvicinando una calamita a della limatura di ferro si osserva che quest'ultima è attratta dagli estremi della calamita, in cui appaiono localizzarsi le sorgenti delle forze magnetiche: a tali zone è stato dato il nome di *poli magnetici.*

Poli magnetici

Le sostanze magnetiche (ad esempio calamite) oltre ad attrarre piccoli frammenti di ferro, esercitano anche tra loro delle forze che, a seconda della disposizione relativa dei poli, possono essere *attrattive* o *repulsive*. Con ragionamento analogo a quello che, a fronte di forze elettrostatiche attrattive o espulsive, ha condotto alla introduzione di cariche elettriche di due tipi o segni, siamo così portati a introdurre poli magnetici di due tipi diversi, indicati coi nomi di *polo Sud* e *polo Nord.* Questi nomi derivano dal fatto che anche la Terra si comporta come una debole calamita, coi poli coincidenti approssimativamente con i poli geografici; di un ago magnetico si designa come polo Sud quello che si orienta in direzione del Sud terrestre, e come polo Nord quello che si orienta verso il Nord terrestre.

Per convenzione, al polo Nord geografico è dunque situato un polo Sud magnetico, e viceversa.

L'esistenza delle forze magnetiche porta naturalmente alla introduzione di un campo vettoriale, detto *campo magnetico*, analogo al campo elettrostatico. Tuttavia il campo magnetico presenta caratteristiche sostanzialmente diverse da quelle del campo elettrico; ciò è conseguenza del fatto che mentre esistono cariche elettriche positive separate da quelle negative, ***non è per contro possibile isolare dei monopoli magnetici***, che si presentano sempre accoppiati nella forma di *dipoli magnetici.* Ciò che si osserva sperimentalmente è che spezzando una barra magnetica che porta ai suoi estremi un polo Sud e un polo Nord, si realizzano due barre più piccole, terminanti ciascuna con un polo Sud e un polo Nord. Per conseguenza di ciò, il campo magnetico ha caratteristiche notevolmente diverse dal campo elettrico: in particolare, come si vedrà in seguito, le sue linee di forza sono

sempre linee chiuse e dunque è nullo il suo flusso uscente da una qualunque superficie chiusa; mentre nel caso del campo *elettrico* le linee di forza nascono da cariche positive (*sorgenti del campo*) e finiscono su cariche negative (*pozzi del campo*). Inoltre, le forze subite da piccoli oggetti magnetizzati (*aghi magnetici*) hanno l'andamento tipico delle azioni subite da dipoli, e non delle azioni subite da cariche puntiformi.

In particolare, un ago magnetico si dispone, all'equilibrio, parallelamente al campo; cosicché con la sua direzione esso individua in ogni punto la tangente alle linee di forza del campo magnetico.

Un passo decisivo per la comprensione dei fenomeni magnetici è l'osservazione di Oersted (1820), secondo cui un filo percorso da corrente genera, su un ago magnetico esploratore, effetti orientanti analoghi a quelli esercitati da una calamita. In altri termini, *un filo percorso da corrente genera un campo magnetico.* Nell'ambito di uno studio sistematico (compiuto, fra gli altri, da C.A. Coulomb, J.B. Biot, F. Savart, M. Faraday, H.A. Lorentz, A.M. Ampere, C. Maxwell) fu evidenziata l'esistenza di mutue azioni meccaniche fra fili percorsi da corrente, e furono stabilite le relative leggi. Poiché le correnti elettriche sono definite in termini di cariche in movimento, tutti i fenomeni magnetici furono così ricondotti a una comune base secondo cui essi sono generati in relazione al movimento di cariche; anche le azioni fra materiali magnetici sono interpretabili in termini di movimento di cariche microscopiche (correnti atomiche).

Azioni magnetiche esercitate da fili percorsi da corrente

Nell'introdurre i fenomeni magnetici, noi non seguiremo l'approccio storico (azioni fra corpi magnetizzati); ma partiremo dallo studio delle interazioni fra correnti (o fra cariche in movimento) in assenza di materia, cominciando con l'analizzare il caso stazionario (*magnetostatica nel vuoto*). Le azioni magnetiche fra materiali magnetizzati (o in presenza di materiali) saranno riconducibili ai fenomeni di magnetostatica nel vuoto, tenendo in conto le correnti microscopiche presenti nei materiali; di ciò ci occuperemo nel capitolo VI. Mentre di fenomeni elettromagnetici in condizioni *non* stazionarie ci occuperemo a partire dal capitolo VII.

Magnetostatica nel vuoto

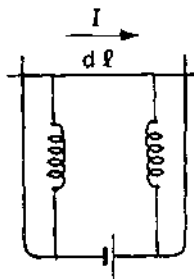
V.1. Forza di Lorentz e vettore induzione magnetica $\vec{B}$

In un sistema di riferimento (laboratorio), siano presenti uno o più circuiti elettrici, fermi, percorsi da corrente stazionaria. Dotiamoci inoltre di un circuito di prova, percorso dalla corrente stazionaria I; in esso, un piccolo tratto di circuito, indicato con $d\vec{l}$, rettilineo, è connesso al resto del circuito da connessioni flessibili, e mediante un dinamometro si può misurare la forza $d\vec{F}$ che $d\vec{l}$ subisce ad opera dei circuiti elettrici o dei materiali magnetici presenti nel laboratorio. Supponiamo inoltre che $d\vec{l}$ sia elettricamente neutro.

Si riscontra che l'elemento di filo $d\vec{l}$, quando posto in vicinanza dei circuiti percorsi da corrente, subisce una forza $d\vec{F}$ dipendente dalla posizione e avente le seguenti caratteristiche:

a) il modulo dF è proporzionale a $I\,dl$, dove I è la corrente che circola nel filo sonda e dl la sua lunghezza;

b) la direzione di $d\vec{F}$ è ortogonale a $d\vec{l}$;

c) in ogni posizione, la forza dipende dall'orientamento di $d\vec{l}$. In particolare, vi è sempre una direzione per $d\vec{l}$ tale che per essa la forza si annulla; e la direzione per cui la forza è massima risulta ortogonale alla direzione per cui la forza è nulla.

Questi risultati possono essere sintetizzati ipotizzando che i circuiti percorsi da corrente generino nel loro intorno un campo $\vec{B}$ (che chiameremo *induzione magnetica*) dipendente dalla posizione, il quale determina sul tratto $d\vec{l}$ percorso da corrente I (e orientato secondo il verso di circolazione di I) una forza $d\vec{F}$ espressa dalla legge:

Induzione magnetica

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B} \qquad \text{[V.1]}$$

La [V.1] (normalmente detta *seconda legge di Laplace*) costituisce la definizione operativa del campo *induzione magnetica* $\vec{B}$.

Seconda legge di Laplace

Osserviamo che usando la [IV.5] e la [IV.7], la quantità $I\,d\vec{l}$ può essere scritta come

$$I\,d\vec{l} = \vec{J}\,dS\,dl = n q\,\vec{v}_d\,dS\,dl = dN\,q\,\vec{v}_d$$

dove $dN = n\,dS\,dl$ rappresenta il numero di portatori contenuti nel tratto dl, q la carica di ciascuno di essi e $\vec{v}_d$ la loro velocità media (velocità di deriva). Sostituendo questa espressione nella [V.1], essa diviene

$$d\vec{F} = dN \cdot q\,\vec{v}_d \times \vec{B} \qquad \text{[V.2]}$$

In base a questa relazione ci aspettiamo che una singola carica puntiforme q, che si muova con velocità $\vec{v}$ nel campo di induzione magnetica $\vec{B}$, subisca una forza $\vec{F}$ data da

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{[V.3]}$$

Forza di Lorentz

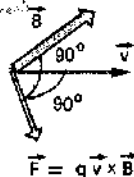
La espressione [V.3], che fornisce la forza subita da una carica in moto in un campo di induzione magnetica, è detta *forza di Lorentz*; essa costituisce un modo alternativo alla [V.1] per definire il vettore induzione magnetica $\vec{B}$, usando come sonda una carica in movimento anziché un circuito percorso da corrente.. Misurare $\vec{B}$ usando la [V.3], benché sperimentalmente più difficile, è concettualmente più corretto che non usando la [V.1]: infatti la [V.1] vale solo qualora $\vec{B}$ non subisca variazioni apprezzabili nel tratto $d\vec{l}$, mentre la [V.3] è una relazione locale. Notiamo che secondo la [V.3] una carica ferma non è soggetta ad alcuna forza ad opera di un campo magnetico; mentre quando si muove essa è sottoposta a una forza ortogonale alla velocità. Dunque la forza di Lorentz [V.3] non compie alcun lavoro: essa modifica la direzione di moto di una particella che si muove con una certa velocità, ma non la sua energia cinetica (né dunque il modulo della sua velocità).

Le dimensioni fisiche del vettore induzione magnetica $\vec{B}$, definito dalla [V.1] o dalla [V.3], sono:

$$[B] = \left[\frac{\text{forza}}{\text{carica} \cdot \text{velocità}}\right] = [m\,Q^{-1}\,t^{-1}] \qquad \text{[V.4]}$$

e l'unità di misura nel sistema S.I. è

$$\frac{N}{C} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}} = \frac{\text{Volt}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}} = \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} \equiv \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \equiv \text{Tesla} \equiv \text{T}$$

dove con Weber si indica il prodotto (Volt · sec).

Valori tipici di B	
Campo terrestre	$B = 0{,}5\ \text{G} = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{T}$
Elettromagneti a nucleo di ferro	$B_{max} \simeq 1{,}7\ \text{T}$
Magneti superconduttori	$B_{max} = 5 \div 10\ \text{T}$

Un'unità di misura frequentemente usata è il Gauss (G), che è legato al Tesla dalla relazione:

$$1\,\mathrm{T} = 1\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = 10^4\,\mathrm{Gauss} = 10\,kG$$

Dunque un Tesla (1 T) è un campo B tale che una carica di 1 C, in moto con velocità $v = 1$ m/s, è soggetta alla forza di 1 N se $\vec{v}$ è ortogonale a $\vec{B}$.

Qualora in una certa regione dello spazio agisca oltre al campo di induzione magnetica $\vec{B}$ (le cui sorgenti sono correnti elettriche) anche un campo elettrico $\vec{E}$ (le cui sorgenti sono cariche elettriche), una particella carica è sottoposta alla forza:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \qquad [V.5]$$

In condizioni stazionarie, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono funzioni della posizione costanti nel tempo; se le correnti e le distribuzioni di cariche non sono costanti nel tempo, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dipendono anche dal tempo. Con la carica q ferma in un punto, si misura il campo elettrico $\vec{E} = \vec{F}/q$ in quel punto. Con due ulteriori misure della forza $\vec{F}$, eseguite sulla carica in movimento per due diverse direzioni della sua velocità $\vec{v}$, si determina il valore di $\vec{B}$ in quel punto. Si riscontra in particolare che la direzione di $\vec{v}$ per cui non si misura alcuna forza magnetica ($\vec{v}$ parallela a $\vec{B}$), coincide con la direzione lungo cui si dispone un ago magnetico disposto col suo baricentro in quel punto del campo.

Osserviamo che nella [V.5] la velocità $\vec{v}$ è una quantità relativa, che cambia passando da un sistema di riferimento ad un altro. Affinché le leggi dell'elettromagnetismo siano relativisticamente covarianti, è necessario che anche $\vec{E}$ e $\vec{B}$ siano grandezze relative; vedremo anzi che essi devono essere espressioni di una stessa entità fisica (*il campo elettromagnetico*), e possono trasformarsi l'uno nell'altro passando da un sistema di riferimento ad un altro. Per contro l'evidenza sperimentale mostra che *la carica q è relativisticamente invariante*: contrariamente a quanto accade per la massa, essa non dipende dalla velocità della particella.

Invarianza relativistica della carica elettrica

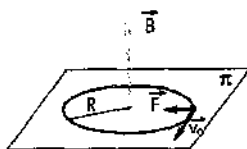
Esempi

E.V.1. *Studiare il moto di una particella puntiforme di massa m e carica q in un campo magnetico uniforme con induzione magnetica $\vec{B}$, nel caso in cui la velocità iniziale $\vec{v}_0$ giaccia su un piano π perpendicolare a $\vec{B}$.*

La forza agente sulla particella è la forza di Lorentz [V.3]:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Tale forza, come abbiamo visto, essendo ortogonale alla velocità $\vec{v}$, lascia invariato il modulo della velocità: $v(t) = v_0 = \mathrm{cost}$. Inoltre la forza $\vec{F}$ giace nel piano π ortogonale a $\vec{B}$, e dunque è sempre ortogonale a $\vec{B}$ *stesso*; il suo modulo vale dunque $F = qv_0B$ ed è costante nel tempo. Nel suo moto, la particella è sottoposta a una forza di modulo costante normale alla velocità; essa compie pertanto un moto circolare uniforme con accelerazione centripeta a_n data da:

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{qv_0B}{m}$$

D'altra parte sappiamo che in un moto circolare uniforme è $a_n = v_0^2/R$, dove R è il raggio della traiettoria; dunque

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{q v_0 B}{m}; \quad \text{da cui} \quad R = \frac{m v_0}{qB}$$

Il raggio di curvatura R è dunque proporzionale alla quantità di moto $m v_0$ della particella.

La velocità angolare ω è tale che $v_0 = \omega R$, da cui:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{m}$$

Poiché d'altra parte $\omega = \frac{2\pi}{T}$, il periodo di rivoluzione $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$ risulta indipendente dalla velocità v_0 della particella.

E.V.2. *Una particella di massa m e carica q entra in una zona di campo magnetico uniforme con velocità $\vec{v}_0$, che forma un angolo θ con le linee di forza del vettore induzione magnetica $\vec{B}$. Supponendo che la particella sia soggetta alla sola forza di Lorentz, determinarne il moto.*

Decomponiamo la velocità $\vec{v}_0$ nei componenti $\vec{v}_{0\perp}$ e $\vec{v}_{0\parallel}$, rispettivamente perpendicolare e parallelo alla direzione di $\vec{B}$. Si ha:

$$v_{0\perp} = v_0 \sin\theta \qquad v_{0\parallel} = v_0 \cos\theta$$

La forza di Lorentz [V.3], essendo ortogonale a $\vec{B}$, non ha componente parallela a $\vec{B}$; mentre la sua componente ortogonale a $\vec{B}$ vale

$$F_\perp = |\vec{F}| = |q\vec{v}_0 \times \vec{B}| = |q\vec{v}_{0\perp} \times \vec{B}| = q v_{0\perp} B = q v_0 B \sin\theta$$

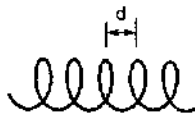
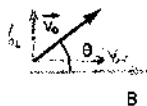
Dunque la velocità della particella parallelamente a $\vec{B}$ è costante pari a $v_{0\parallel} = v_0 \cos\theta$; mentre la proiezione del moto nel piano ortogonale a $\vec{B}$ è un moto circolare uniforme (vedi esempio E.V.1), con raggio R e periodo T dati rispettivamente da:

$$R = \frac{m v_0 \sin\theta}{qB} \qquad T = \frac{2\pi m}{qB}$$

La traiettoria della particella nello spazio è un'elica cilindrica, il cui passo p è dato da:

$$p = v_{0\parallel} \cdot T = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos\theta$$

Problemi di questo tipo possono essere ovviamente affrontati, in termini più sistematici, proiettando sugli assi coordinati l'equazione del moto

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Nel caso in esame ($\vec{E} = 0$; $\vec{B} = \text{cost}$), scegliendo un asse (ad esempio l'asse z) parallelo a $\vec{B}$, le proiezioni sugli assi dell'equazione del moto si esplicitano nel sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = q \cdot \frac{dy}{dt} \cdot B$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -q \cdot \frac{dx}{dt} \cdot B$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

che, date le condizioni iniziali, può essere risolto con relativa semplicità attraverso consolidate procedure matematiche.

E.V.3. *Acceleratori circolari di particelle.*

Esistono molti tipi di acceleratori di particelle, la maggior parte dei quali (e in particolare quelli circolari detti *sincrotroni*) sono basati sulla forza di Lorentz [V.3]. Le particelle vengono iniettate in una camera toroidale (ciambella) dove compiono una traiettoria approssimativamente circolare. La ciambella è mantenuta sotto vuoto spinto per evitare che le particelle urtino contro le molecole del gas, e vengano così diffuse lontano dalla traiettoria programmata. La forza centripeta necessaria a mantenere le particelle nella loro orbita è fornita da un campo magnetico ortogonale al disegno; campo prodotto da elettromagneti entro cui la ciambella è alloggiata. In uno o più punti della loro traiettoria, le particelle incontrano un campo elettrico che le accelera. Naturalmente il campo acceleratore non può essere un campo elettrostatico, che essendo conservativo non compie alcun lavoro lungo una traiettoria chiusa. Nei sincrotroni il campo acceleratore è un campo elettrico variabile nel tempo con opportuna frequenza, in modo che le particelle lo incontrino sempre in sincronismo quando passano nei punti prestabiliti della traiettoria.

Poiché il raggio di curvatura R della traiettoria delle particelle è costante, via via che aumenta la loro quantità di moto mv è necessario che il campo magnetico B aumenti di intensità in modo che resti sempre soddisfatta la relazione $(mv/qB) = R$; ciò viene fatto variando opportunamente, durante il ciclo di accelerazione, la corrente di eccitazione degli elettromagneti.

Le considerazioni di principio ora svolte sul funzionamento degli acceleratori restano valide anche quando le alte velocità raggiunte (che negli acceleratori di alta energia possono essere assai prossime alla velocità della luce), impongono il ricorso alle equazioni della dinamica relativistica.

V.2. Azioni meccaniche su circuiti percorsi da corrente stazionaria in un campo magnetico esterno

Circuito meccanicamente flessibile

Le azioni meccaniche cui è soggetto un circuito percorso da corrente I costante quando è immerso in un campo di induzione $\vec{B}$ costante nel tempo sono completamente descritte dalla [V.1]. Naturalmente, l'uso che di tale relazione deve essere fatto è diverso a seconda di quali siano le caratteristiche del sistema con cui si ha a che fare, e di quale sia il problema che deve essere risolto. Ad esempio se il circuito è costituito da un filo inestensibile perfettamente flessibile (per cui dunque ogni suo elemento è libero di muoversi, sottoposto all'unico vincolo che la lunghezza totale del filo

non cambi), per ogni elemento di circuito la forza [V.1] sommata ad altre eventuali forze agenti su quell'elemento deve essere uguagliata alla massa dell'elemento $dm = \lambda\, dl$ (λ densità lineare) per la sua accelerazione; ovvero deve essere uguagliata a zero quando si voglia trovare la configurazione di equilibrio del circuito. Va osservato che quando un circuito elettrico si muove in un campo magnetico, in generale – come discuteremo in dettaglio nel capitolo VII – si generano dei fenomeni che tendono a modificare la corrente che circola sia nel circuito stesso che nei circuiti che generano il campo magnetico esterno. Per cui se si suppone che la corrente I che circola nel circuito sia indipendente dal tempo (e che anche il campo esterno $\vec{B}$ sia costante) è necessario supporre implicitamente che in ogni circuito sia inserito un opportuno generatore di f.e.m. capace di mantenere costante la corrente; ovvero è necessario porsi in condizioni di equilibrio meccanico (così come noi faremo in questo capitolo), cioè in condizioni tali per cui ogni elemento dei circuiti elettrici (alimentati in corrente continua) sia immobile nello spazio.

Circuito meccanicamente rigido

Un altro caso notevole di grande interesse si ha quando il circuito considerato sia *rigido*, cioè di forma immutabile. In questo caso per descrivere la dinamica (e in particolare per descrivere la statica) del sistema è sufficiente calcolare il risultante $\vec{F}$ e il momento risultante $\vec{M}$ delle forze agenti sul sistema stesso:

$$\vec{F} = I \oint (d\vec{l} \times \vec{B}) \qquad [V.6]$$

$$\vec{M} = I \oint (\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})) \qquad [V.7]$$

dove con $\oint$ si intende l'integrale di linea eseguito su tutto il circuito; ed $\vec{r}$ rappresenta la distanza dell'elemento $d\vec{l}$ di circuito dal polo scelto per il calcolo dei momenti.

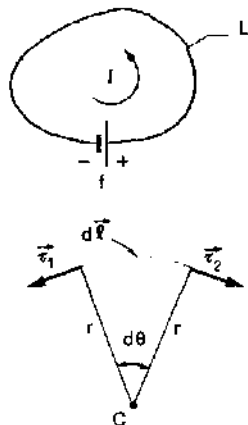
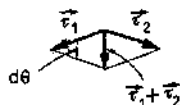
Esempi

E.V.1. *Un filo metallico perfettamente flessibile di lunghezza L (inestensibile) chiuso su se stesso è percorso da una corrente I costante; esso viene immerso in un campo di induzione magnetica uniforme $\vec{B}$. Determinare la configurazione di equilibrio assunta dal filo, supponendo che l'unica forza esterna su di esso agente sia la [V.1] e dunque trascurando in particolare l'effetto della forza peso.*

Poiché il filo costituisce una linea chiusa, la forza [V.1] non può essere nulla per tutti i suoi elementi $d\vec{l}$ (ciò accadrebbe solo qualora tutti i dl fossero paralleli a $\vec{B}$); dunque affinché il filo sia in equilibrio deve intervenire un'ulteriore forza oltre alla [V.1]. Poiché per ipotesi non agiscono altre forze esterne oltre alla [V.1], l'unica possibilità è che il filo *si tenda*: sia τ il modulo della sua tensione. Consideriamo un tratto elementare di filo di lunghezza $d\vec{l}$; sia r il suo raggio di curvatura locale.

In condizioni di equilibrio le tensioni $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_2$ tangenti ai suoi estremi hanno risultante centripeto (diretto verso il centro di curvatura C) di modulo pari a

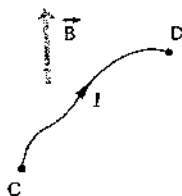
$$|\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2| = \tau\, d\theta = \tau \frac{dl}{r}$$

tale da equilibrare la forza magnetica $\vec{F}_m = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$. Poiché quest'ultima giace su un piano ortogonale a $\vec{B}$, anche la tensione, che giace nel piano in cui si sviluppa $d\vec{l}$,

deve essere ortogonale a $\bar{B}$. Dunque tutto il filo si dispone necessariamente su un piano ortogonale a $\bar{B}$. Per l'equilibrio la forza magnetica $\bar{F}_m$ deve essere centrifuga; e il suo modulo che vale $I\,dl\,B$ (poiché $d\bar{l}$ e $\bar{B}$ sono fra di loro ortogonali) deve essere pari al modulo $|\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2|$ del risultante delle forze di tensione. Dunque:

$$I\,dl\,B = \frac{\tau\,dl}{r}; \quad \text{cioè} \quad r = \frac{\tau}{IB}$$

Poiché τ, I, B sono uniformi lungo tutto il filo, tale deve essere r: il filo deve assumere la *configurazione circolare*. Ma per un cerchio $r = \dfrac{L}{2\pi}$; relazione che sostituita nella precedente espressione ci dà:

$$\tau = \frac{LIB}{2\pi}$$

Dunque riassumendo: il filo si dispone su un piano ortogonale a $\bar{B}$ e assume la configurazione circolare, in modo che la corrente circoli in verso antiorario intorno a $\bar{B}$ (condizione richiesta perché $\bar{F}_m$ sia centrifuga); la tensione τ del filo risulta essere proporzionale al prodotto LIB.

E.V.5. *Calcolare la forza risultante su un circuito chiuso percorso da corrente I, disposto in un campo di induzione magnetica uniforme $\bar{B}$.*

Si tratta di sviluppare la [V.6], inserendo in essa la condizione che $\bar{B}$ sia uniforme:

$$\bar{F} = I \oint (d\bar{l} \times \bar{B}) = I\left(\oint d\bar{l}\right) \times \bar{B} = 0$$

Infatti $\oint d\bar{l} = 0$. Osserviamo che mentre $\oint d\bar{l} = 0$, $\oint dl$ è pari alla lunghezza del circuito ed è dunque diverso da zero.

E.V.6. *Due punti C e D sono gli estremi di un tratto di circuito l percorso da corrente I, immerso in un campo di induzione magnetica $\bar{B}$ uniforme. Calcolare il risultante della forza magnetica $\bar{F}_m$ agente sul tratto di circuito l.*

Si ha:

$$\bar{F}_m = I\int_C^D (d\bar{l} \times \bar{B}) = I\left(\int_C^D d\bar{l}\right) \times \bar{B} = I\,\overrightarrow{CD} \times \bar{B}$$

dove $\overrightarrow{CD}$ è il segmento orientato che congiunge C con D. Osserviamo che purché $\bar{B}$ sia uniforme, la forza risultante dipende solo dagli estremi, e non dalla lunghezza e forma del filo.

Grande interesse teorico e pratico ha il calcolo delle sollecitazioni meccaniche che un campo di induzione magnetica esercita su una spira rigida percorsa da corrente costante I. Cominciamo col supporre che il campo $\bar{B}$ sia uniforme. In questo caso, poiché il risultante delle forze è nullo (vedi esempio E.V.5), la sollecitazione risultante è una coppia, di cui ci proponiamo di calcolare il momento. Consideriamo il caso che la spira sia piana, di forma rettangolare, e orientata rispetto al campo in modo che due suoi lati (lato 2 e lato 4, di lunghezza a) siano ortogonali a $\bar{B}$. I lati 1 e 3, di ugual lunghezza b e percorsi dalla corrente I in versi opposti, sono soggetti alle

forze $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_3$ che costituiscono una coppia di braccio nullo. I lati 2 e 4 sono soggetti a forze $\vec{F}_2$ ed $\vec{F}_4$ anch'esse uguali ed opposte, ma in questo caso il braccio vale $b \sin\theta$; poiché il modulo di $\vec{F}_2$ ed $\vec{F}_4$ vale $F_2 = F_4 = IaB$, il momento di questa coppia ha modulo M dato da:

$$M = (IaB)\, b \sin\theta = I(ab)\, B \sin\theta = ISB \sin\theta$$

dove $S = ab$ è l'area della spira. Vettorialmente, questo risultato può essere posto nella forma:

$$\vec{M} = IS\hat{n} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \qquad [V.8]$$

dove $\vec{m}$ è definito come

$$\vec{m} = IS\hat{n} \qquad [V.9]$$

I è la corrente che circola nella spira, S è l'area della spira stessa, e *$\hat{n}$ è il versore della normale alla spira orientato in verso tale che esso veda circolare la corrente in senso antiorario.* La [V.8] vale in realtà qualunque sia la forma della spira piana, e non solo nel caso da noi trattato di spira rettangolare; questa affermazione verrà da noi giustificata fra poco. Osservando l'analogia fra la [V.8] e la [I.62.b] ($\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0$) che forniva il momento esercitato dal campo elettrostatico su un dipolo elettrico di momento $\vec{p}$, viene naturale definire il vettore $\vec{m}$ dato dalla [V.9] come *momento magnetico della spira di area S percorsa da corrente I.* Questa definizione è giustificata dal fatto che l'analogia fra una piccola spira percorsa da corrente e un dipolo elettrico è completa: nel corso di questo stesso paragrafo estenderemo infatti tale analogia a tutte le sollecitazioni meccaniche subite da una spira immersa in campo magnetico (e non alla sola coppia esercitata da un campo di induzione magnetica uniforme cui abbiamo fin qui limitato la nostra attenzione); mentre nei paragrafi [V.3] e [V.5] la estenderemo al campo di induzione magnetica generato da una spira. *Il fatto che una spira percorsa da corrente si comporti come un dipolo magnetico* di momento $\vec{m} = IS\hat{n}$ va sotto il nome di *teorema di equivalenza di Ampere*, la cui dimostrazione verrà dunque da noi completata nel corso di questo e dei prossimi paragrafi.

Momento magnetico di una spira percorsa da corrente

Teorema di equivalenza di Ampere

Prima di proseguire, osserviamo che la [V.8] – secondo cui il momento meccanico subito da una spira immersa in campo magnetico è proporzionale alla corrente I che circola nella spira stessa – giustifica quanto avevamo anticipato nel par. IV.14 quando abbiamo descritto le modalità di funzionamento del galvanometro.

Esempio

E.V.7. *Un disco di materiale isolante di raggio R, caricato uniformemente con carica Q, ruota intorno al suo asse con velocità angolare ω. Qual'è l'espressione del momento magnetico del disco ruotante?*

Il momento magnetico di una spira piana è espresso, per definizione, dalla [V.9]. Il disco ruotante, carico con densità superficiale $\sigma = Q/\pi R^2$, può essere assimilato ad un insieme di spire circolari di raggio r ($0 < r < R$) e larghezza infinitesima dr, ciascuna percorsa da corrente di data da:

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{2\pi}\,\omega$$

con T periodo di rotazione del disco e $dq = \sigma\, dS$ ($dS = 2\pi r\, dr$). Dunque il momento magnetico dm della spira elementare vale:

$$d\vec{m} = di\, S\, \hat{n} = \frac{dq}{2\pi}\,\omega\pi r^2 \hat{n} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{2\pi}\,\omega\pi r^2 \hat{n} = \hat{n}\,\sigma\pi\omega r^3 dr$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale al disco. Il momento magnetico totale del disco si ottiene sommando i contributi delle singole spire elementari:

$$\vec{m} = \int d\vec{m} = \hat{n}\,\sigma\pi\omega \int_0^R r^3 dr = \hat{n}\,\sigma\pi\omega\,\frac{R^4}{4}$$

Sostituendo $\sigma = \dfrac{Q}{\pi R^2}$ si ottiene infine:

$$\vec{m} = \frac{Q\omega R^2}{4}\,\hat{n}$$

Il calcolo delle sollecitazioni meccaniche che in generale si esercitano su una spira percorsa da corrente costante I immersa in un campo di induzione magnetica costante (ma non necessariamente uniforme) $\vec{B}$, può essere effettuato con relativa semplicità ricorrendo a considerazioni energetiche, ed applicando poi il metodo dei lavori virtuali da noi introdotto nel par. II.5.

Consideriamo dunque una spira l percorsa da corrente I ed immersa nel campo magnetico $\vec{B}$, e supponiamo che ogni suo elemento $d\vec{l}$ compia uno spostamento elementare $d\vec{s}$ (in generale $d\vec{s}$ è diverso per ogni elemento $d\vec{l}$) cosicché la spira si porti nella configurazione l' Per far compiere alla spira questo spostamento (senza che la sua energia cinetica vari) è necessario applicare dall'esterno ad ogni elemento una forza $d\vec{f}$ uguale ed opposta alla forza $d\vec{F}$ che sull'elemento esercita il campo di induzione $\vec{B}$ (eq. [V.1]):

$$d\vec{f} = -\,d\vec{F} = -\,I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

Dunque per far compiere alla spira lo spostamento elementare che la porta da l ad l' è necessario compiere dall'esterno un lavoro dL (che rappresenta anche la variazione dU_m di energia potenziale meccanica subita dalla spira in conseguenza di tale spostamento elementare) dato da:

$$dU_m = dL = \oint d\vec{f}\cdot d\vec{s} = -\oint d\vec{F}\cdot d\vec{s} = -I\oint (d\vec{l}\times\vec{B})\cdot d\vec{s} \qquad [V.10]$$

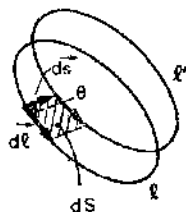
Ma per una nota proprietà del prodotto triplo misto tra vettori si ha:

$$d\vec{l}\times\vec{B}\cdot d\vec{s} = d\vec{s}\times d\vec{l}\cdot\vec{B} = -\,d\vec{l}\times d\vec{s}\cdot\vec{B}$$

che sostituita nella [V.10] ci dà:

$$dU_m = I\oint (d\vec{l}\times d\vec{s})\cdot\vec{B} \qquad [V.11]$$

D'altro lato il prodotto vettoriale $d\vec{l}\times d\vec{s} = dl\, ds \sin\theta\, \hat{n}$ (dove θ è l'angolo che $d\vec{l}$ forma con $d\vec{s}$, ed $\hat{n}$ è il versore normale al piano definito da $d\vec{l}$ e $d\vec{s}$) rappresenta l'elemento di superficie $d\vec{S}$ spazzato da $d\vec{l}$ (e indicato col tratteggio in figura); dun-

que l'integrale [V.11] può essere scritto nella forma

$$dU_m = I \int_{d\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{B} = I\,\Phi_{d\Sigma}(\vec{B}) \qquad \text{[V.12]}$$

dove

$$\Phi_{d\Sigma}(\vec{B}) = \int_{d\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

rappresenta il flusso di $\vec{B}$ attraverso tutta la superficie $d\Sigma$ (indicata col tratteggio in figura) che viene spazzata dalla spira per portarsi dalla configurazione l alla configurazione l'. Consideriamo ora una superficie chiusa, costituita da una superficie Σ avente come contorno l, dalla superficie $d\Sigma$, e da una superficie Σ' avente come contorno l'. Poiché il flusso totale di $\vec{B}$ uscente da ogni superficie chiusa deve essere nullo (per una proprietà generale di $\vec{B}$ enunciata all'inizio di questo capitolo e approfondita nel par. V.4) deve essere:

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{\Sigma'} + \Phi_{d\Sigma}$$

dove Φ_{Σ} è il flusso di $\vec{B}$ entrante da Σ, $\Phi_{\Sigma'}$ e $\Phi_{d\Sigma}$ i flussi di $\vec{B}$ uscenti rispettivamente da Σ' e da $d\Sigma$; per cui

$$d\Phi(\vec{B}) = \Phi_{\Sigma'}(\vec{B}) - \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = -\Phi_{d\Sigma}(\vec{B})$$

che sostituita nella [V.12] ci dà:

$$dU_m = -I\,d\Phi(\vec{B}) \qquad \text{[V.13]}$$

Da cui segue che l'energia potenziale meccanica della spira può essere scritta, a meno di una costante additiva arbitraria, nella forma

$$U_m = -I\,\Phi(\vec{B}) \qquad \text{[V.14]}$$

Energia potenziale meccanica di una spira immersa in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$

A proposito di questa espressione osserviamo quanto segue:

a) $\Phi(\vec{B})$ rappresenta il flusso di $\vec{B}$ attraverso una superficie Σ che abbia come contorno la spira l ed orientata in modo che dal *suo verso positivo si «veda»* circolare la corrente in senso antiorario. Questa espressione, benché non sia in essa specificata la particolare superficie Σ fra le infinite possibili, non è ambigua: infatti, considerate due diverse superfici Σ che abbiano l come contorno e che siano orientate concordemente, il flusso di $\vec{B}$ attraverso di esse deve essere uguale (come conseguenza della già citata proprietà di $\vec{B}$ per cui il suo flusso attraverso una superficie chiusa è nullo). Per questo motivo si usa parlare di *flusso di $\vec{B}$ concatenato con la spira* senza specificare la particolare superficie Σ, avente la spira come contorno, su cui il flusso stesso è stato calcolato.

Flusso di $\vec{B}$ concatenato con una spira

b) La [V.14] è stata da noi chiamata *energia potenziale meccanica*; essa infatti è stata calcolata ipotizzando che I e $\vec{B}$ siano costanti nel tempo, senza però tenere conto dell'energia che – affinché ciò accada – deve essere erogata dai generatori che alimentano i circuiti. La [V.14] è pertanto perfettamente adeguata al calcolo delle sollecitazioni meccaniche che si esercitano su un circuito percorso da corrente costante I immerso in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ costante nel tempo; ma non al calcolo dell'energia elettromagnetica complessiva. Questo punto verrà da noi ripreso nel capitolo VII.

Una volta noti il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ in funzione delle coordinate, della corrente I, della geometria e delle caratteristiche meccaniche della spira, l'energia [V.14] può essere espressa in funzione dei parametri geometrici che descrivono il sistema; e le sollecitazioni meccaniche possono essere a quel punto calcolate facilmente (almeno dal punto di vista concettuale) usando il metodo dei lavori virtuali. Noi ci limitiamo qui a considerare il caso di una piccola spira rigida; ma prima ancora osserviamo che la [V.14] ci consente di risolvere l'esempio E.V.4 in maniera estremamente semplice. Infatti la configurazione di equilibrio di una spira è quella che dovendo *minimizzare* l'energia U_m deve *massimizzare* il flusso $\Phi(\vec{B})$; e se si tratta di una spira flessibile in campo magnetico uniforme il massimo flusso si ha per la configurazione circolare disposta ortogonalmente al campo.

Consideriamo ora una spira rigida di area S sufficientemente piccola perché il campo $\vec{B}$ calcolato al suo centro rappresenti con approssimazione sufficientemente buona il valore assunto da $\vec{B}$ in ogni punto di S. Il flusso $\Phi(\vec{B})$ concatenato con la spira può allora essere scritto semplicemente nella forma:

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

e la [V.14] diviene:

$$U_m = -I\vec{B} \cdot \vec{S} = -I\vec{S} \cdot \vec{B} = -\vec{m} \cdot \vec{B} \qquad \text{[V.15]}$$

avendo definito, in analogia con la [V.9] che avevamo ricavato in un caso particolare notevole, il momento magnetico $\vec{m}$ di una spira come

$$\vec{m} = I\vec{S} \qquad \text{[V.16]}$$

Osserviamo che, essendo la spira rigida e piccola, la dipendenza della [V.15] dai parametri geometrici (rappresentati dalle coordinate x, y, z del punto in cui la spira è disposta, e dall'orientamento della normale alla spira rispetto alla direzione locale del campo) è contenuta solo nella espressione $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$ del campo come funzione delle coordinate e nel coseno dell'angolo che implicitamente compare nel prodotto scalare. Pertanto, con passaggi formalmente identici a quelli che dalla [I.59] ci hanno portato alle [I.62], otteniamo:

Sollecitazioni meccaniche su una piccola spira rigida

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{m} \cdot \vec{B}) \qquad (\vec{m} = \text{cost}) \\ \vec{M} &= \vec{m} \times \vec{B} \end{aligned} \qquad \text{[V.17]}$$

come espressioni del risultante e del momento risultante delle forze che si esercitano sulla spira. Le [V.17] (la prima delle quali può essere sviluppata in forma analoga alle [I.63] e alle [I.64]) ci dicono che *una piccola spira rigida* (indeformabile) immersa in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ *si comporta*, dal punto di vista delle sollecitazioni meccaniche che su di esse si esercitano, *come un dipolo magnetico con momento di dipolo magnetico* $\vec{m} = I\vec{S}$. In questa definizione, il verso positivo di $\vec{S}$ (e dunque anche di $\vec{m}$) è quello che vede circolare la corrente in senso antiorario. Questo enunciato rappresenta la prima parte del teorema di equivalenza di Ampere, che verrà da noi completato nei prossimi paragrafi.

V.3. Campo $\vec{B}_o$ generato da correnti stazionarie nel vuoto

Abbiamo già accennato all'esperienza di Oersted, che evidenziò come un filo percorso da corrente produca un campo magnetico nello spazio circostante. Tutta una serie di esperimenti porta a concludere che, fissato un sistema di riferimento, un circuito l' fermo in cui circoli corrente stazionaria I genera nello spazio vuoto circostante un campo di induzione magnetica $\vec{B}_o$ che può essere calcolato come somma di contributi elementari $d\vec{B}_o$ prodotti dai singoli elementi $d\vec{l}'$ del circuito, la cui espressione è:

$$d\vec{B}_o = \frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{d\vec{l}' \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \qquad [V.17]$$

dove $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$ è la differenza fra il vettore posizione $\vec{r}$ del punto P in cui si vuole calcolare il campo e il vettore posizione $\vec{r}'$ dell'elemento $d\vec{l}'$. La costante μ_o, detta *permeabilità magnetica del vuoto*, nel sistema S.I. vale:

$$\begin{aligned}\mu_o &= 12{,}56 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}}\right) = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Volt} \cdot \text{s}}{\text{m} \cdot \text{A}}\right) = \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Omega \cdot \text{s}}{\text{m}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Henry}}{\text{m}}\right) = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{N}}{\text{A}^2}\right)\end{aligned} \qquad [V.18]$$

dove si è indicato con Henry il prodotto Ohm per secondo. La [V.17] viene spesso indicata col nome di *prima formula di Laplace* o Legge di Biot e Savart. Evidentemente la [V.17] costituisce una estrapolazione teorica di situazioni sperimentali relative a circuiti finiti; la sua verifica discende dalla constatazione che il campo di induzione magnetica $\vec{B}_o$ generato da un circuito finito l' e misurato nello spazio circostante soddisfa la relazione

Prima formula di Laplace o Legge di Biot e Savart

$$\vec{B}_o(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{l'} I \frac{d\vec{l}' \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \qquad [V.19]$$

Le relazioni [V.17] e [V.19] si riferiscono a circuiti filiformi, tali cioè che la sezione S' del conduttore abbia dimensioni lineari trascurabili. Se questa condizione non è soddisfatta, la generalizzazione è immediatamente ottenuta ponendo in esse

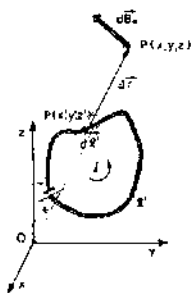
$$I = \int_{S'} \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'$$

($\vec{J}(\vec{r}')$ è la densità della corrente nella posizione $\vec{r}'$); la [V.19] diviene:

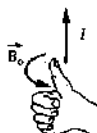
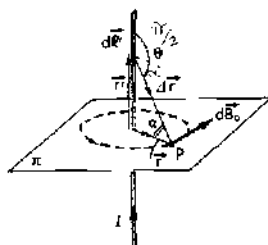
$$\begin{aligned}\vec{B}_o(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{l'} \left[\int_{S'} (\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}') \frac{d\vec{l}' \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}\right] = \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} d\tau'\end{aligned} \qquad [V.20]$$

Circuiti non filiformi

dove $d\tau'$ è l'elemento di volume del circuito percorso da corrente e τ' il volume complessivo da esso occupato. Nel ricavare la [V.20] abbiamo tenuto conto del parallelismo fra $\vec{J}(\vec{r}')$ e $d\vec{l}'$.

La [V.19] e la [V.20] rappresentano la *legge fondamentale della magnetostatica nel vuoto*; sviluppiamo ora alcuni casi particolari di interesse notevole.

Legge fondamentale della magnetostatica nel vuoto

Esempi

Campo $\vec{B}$ da filo rettilineo indefinito

E.V.8. *Calcolare il campo di induzione magnetica generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente stazionaria I in un punto P a distanza r dal filo.*

Il tratto rettilineo di filo è abbastanza lungo, rispetto alla distanza r, da poter essere considerato infinito nel calcolo esplicito della [V.19]

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\vec{l}'\times\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

Questa espressione implica che si consideri trascurabile il contributo a $\vec{B}_0$ da parte della porzione di filo che chiude il circuito (formalmente, il circuito si chiude all'infinito). Osserviamo che tutti gli elementi $d\vec{l}'$ del circuito forniscono, in un fissato punto P dello spazio, contributi $d\vec{B}_0$ fra di loro paralleli e concordi (normali al piano definito dal filo e da $\vec{r}$). Tenuto conto anche della simmetria cilindrica della configurazione della corrente, si vede che le linee di forza di $\vec{B}_0$ sono circonferenze disposte su piani π perpendicolari al filo e centrate sul filo stesso. Il verso del vettore $\vec{B}$ (antiorario rispetto alla corrente) può essere facilmente visualizzato in base alla *regola della mano destra* per cui se si dispone il pollice destro concordemente alla corrente, il senso di avvolgimento di $\vec{B}_0$ è concorde a quello delle altre dita piegate. Calcoliamo ora il modulo di $\vec{B}_0$ nel punto P a distanza r dal filo; si ha

MANO DESTRA

$$B_0(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dl'\,\Delta r}{|\Delta r|^3}\sin\theta$$

Introducendo la variabile angolare α si ha: $(\theta = \pi/2 + \alpha) \Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \sin\theta = \cos\alpha;\quad r' = r\,\mathrm{tg}\,\alpha;\quad dr' = dl' = \frac{r}{\cos^2\alpha}\,d\alpha;\quad \Delta r = \frac{r}{\cos\alpha}$$

Sostituendo queste espressioni nell'integrale si ha

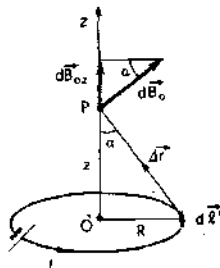
$$B_0(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{r\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\cos\alpha\,\frac{\cos^2\alpha}{r^2}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha$$

da cui

Formula di Biot e Savart:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B}_0(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{t} \qquad \text{[V.21]}$$

dove $\hat{t}$ è il versore della tangente alla circonferenza di raggio r giacente sul piano π. Questa espressione rappresenta la *formula di Biot e Savart* per un filo rettilineo.

E.V.9. *Calcolare il campo $\vec{B}_0$ generato nel vuoto, in un punto P del suo asse, da una spira circolare di raggio R percorsa da corrente stazionaria I.*

Fissiamo un sistema di riferimento con asse z coincidente con l'asse della spira circolare e con origine nel centro della spira stessa. Nel punto dell'asse a distanza z dall'origine, il contributo $d\vec{B}_0$ dell'elemento $d\vec{l}'$ della spira vale

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{d\vec{l}'\times\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \qquad \text{[V.17]}$$

Come si vede in figura, $d\vec{l}'$ è sempre ortogonale a $\Delta\vec{r}$; e per ogni elemento $d\vec{l}'$ ne esiste sempre un altro diametralmente opposto che dà un contributo $d\vec{B}_0$ uguale in

modulo al precedente, ma con componente ortogonale a z opposta. Pertanto, $\vec{B}_o$ sarà diretto secondo l'asse z, e il suo valore sarà dato dalla somma delle componenti dB_{oz} della [V.17] ($dB_{oz} = dB_o \sin\alpha$). Dunque:

$$\vec{B}_o = \oint d\vec{B}_o = \hat{n} \oint dB_{oz} = \hat{n} \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{dl'}{|\Delta\vec{r}|^2} \sin\alpha =$$

$$= \hat{n} \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\sin\alpha}{|\Delta\vec{r}|^2} \oint dl' = \hat{n} \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\sin\alpha}{|\Delta\vec{r}|^2} 2\pi R$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale alla spira (coincidente col versore $\hat{k}$ dell'asse z). Tenuto conto che:

$$\sin\alpha = \frac{R}{|\Delta\vec{r}|} \quad \text{e} \quad |\Delta\vec{r}| = \sqrt{R^2 + z^2},$$

l'espressione precedente diviene

$$\vec{B}_o(z) = \hat{n} \frac{\mu_o I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\vec{m}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \qquad [V.22]$$

Campo $\vec{B}_o$ sull'asse di una spira

con $\vec{m} = I\pi R^2 \hat{n} = I\vec{S}$ momento magnetico della spira.

Al centro della spira ($z = 0$) il campo $\vec{B}_o$ vale

$$\vec{B}_o = \hat{n} \frac{\mu_o I}{2R} = \frac{\mu_o \vec{m}}{2\pi R^3} \qquad [V.23]$$

Campo di induzione $\vec{B}_o$ al centro di una spira

Al di fuori dell'asse, le linee di forza di $\vec{B}_o$ hanno l'andamento qualitativo mostrato in figura. Si tratta di linee chiuse, del tipo delle linee di forza del campo elettrico generato da una distribuzione dipolare di cariche. Questa somiglianza qualitativa sarà posta in forma quantitativa più avanti (sia nel prossimo esempio che, in termini più generali, nel paragrafo V.5).

E.V.10. *Confrontare l'espressione del campo $\vec{B}_o$ prodotto a grande distanza, lungo il suo asse, da una spira circolare di raggio R percorsa da corrente I, con l'espressione del campo elettrico $\vec{E}_o$ generato lungo la direzione del suo momento da un dipolo elettrico.*

Lungo l'asse della spira, assunto come asse z con origine al centro della spira stessa, il campo $\vec{B}_o(z)$ è dato dalla [V.22]:

$$\vec{B}_o = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\vec{m}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

A grande distanza ($z >> R$) questa espressione diviene

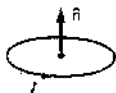
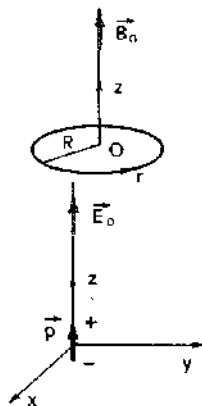
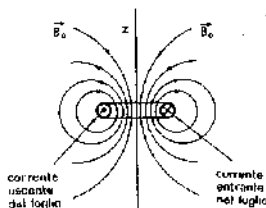
$$\vec{B}_o(z) = 2\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right) \frac{\vec{m}}{z^3}$$

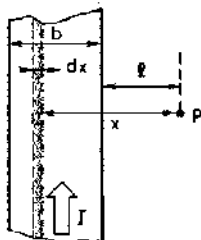
Per quanto riguarda il campo elettrico generato da un dipolo di momento $\vec{p}$, si ha

$$E_{ox} = E_{oy} = 0$$

$$E_{oz}(z) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)$$

Ponendo $r = z$, e tenendo conto che $\vec{p}$ è diretto come l'asse z, possiamo scrivere

$$\vec{E}_o(z) = \left(\frac{2}{4\pi\varepsilon_o}\right) \frac{\vec{p}}{z^3}$$

Il confronto fra $\vec{E}_0(z)$ e $\vec{B}_0(z)$ conferma, almeno per quanto riguarda il comportamento lungo l'asse, che a grande distanza una spira percorsa da corrente si comporta come un dipolo magnetico di momento magnetico $\vec{m} = I\vec{S}$ (non solo per quanto riguarda le azioni meccaniche subite, ma anche per quanto riguarda il campo $\vec{B}_0$ generato). Ciò è estendibile alle altre componenti

Campo $\vec{B}_0$ da nastro di corrente

E.V.11. *Un nastro conduttore rettilineo, di piccolo spessore e molto lungo, ha larghezza $b = 5$ cm ed è percorso da una corrente, costante ed uniformemente distribuita sulla sezione del nastro, la cui intensità è $I = 10$ A. Calcolare, nel vuoto, il valore di $\vec{B}_0$ in un punto del piano π individuato dal nastro (piano del disegno) a distanza $l = 10$ cm dal bordo più vicino del nastro.*

L'effetto complessivo del nastro percorso da corrente I può essere ottenuto sovrapponendo gli effetti elementari delle strisce parallele, di larghezza dx, in cui si può pensare decomposto il nastro. Ogni striscia elementare equivale ad un filo rettilineo indefinito, il cui contributo $d\vec{B}_0$ al campo prodotto dal nastro è dato dalla relazione di Biot e Savart [V.21]. La corrente dI che passa nella striscia elementare a causa della distribuzione uniforme della corrente I, vale

$$dI = I\frac{dx}{b}$$

per cui, usando i simboli definiti in figura, si ha:

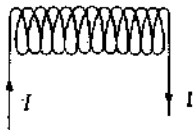
$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi x} I \frac{dx}{b}\,\hat{n}$$

dove $\hat{n}$ è il versore della normale al piano π orientato positivamente verso il basso. In ogni punto P, i contributi sono paralleli e concordi (osserviamo che se P fosse a sinistra del nastro, ogni $d\vec{B}_0$ sarebbe orientato verso l'alto); per cui l'integrale può essere eseguito semplicemente:

$$\vec{B}_0 = \int d\vec{B}_0 = \hat{n}\int_l^{l+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\frac{dx}{x} = \hat{n}\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\left(\frac{l+b}{l}\right)$$

Numericamente, il modulo B_0 vale:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\left(\frac{l+b}{l}\right) = \frac{4\pi\, 10^{-7}\cdot 10}{2\pi\, 5\cdot 10^{-2}}\ln\left(\frac{15}{10}\right)\mathrm{T} = 1{,}62\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

Il calcolo è stato effettuato nel sistema S.I., e dunque il risultato è espresso in tesla T.

E.V.12. *Un solenoide rettilineo è costituito da un'elica cilindrica di filo conduttore, come mostrato in figura. Supponiamo che l'avvolgimento sia geometricamente uniforme (passo dell'elica costante) e ci siano n spire per unità di lunghezza. Ciascuna spira può essere considerata come una spira circolare piana e quindi l'intero solenoide è, in sostanza, una successione compatta di spire uguali percorse dalla stessa corrente. Se il solenoide è percorso da corrente I ed ha lunghezza l, calcolare il campo $\vec{B}_0$ in un punto dell'asse del solenoide, supponendo che tutto sia nel vuoto.*

Il campo di induzione magnetica si calcola sommando i campi generati dalle singole spire che costituiscono il solenoide. Nel caso di questo esempio, in cui si chiede il campo $\vec{B}_0$ sull'asse del solenoide, i campi generati dalle singole spire sono quelli calcolati nell'esempio E.V.9.

Consideriamo un punto P sull'asse del solenoide (asse x), a distanza x dall'origine (vedi figura) e valutiamo il campo $d\vec{B}_0$ generato in P da una fettina di solenoide di spessore $d\xi$, situato a distanza ξ dall'origine. Se n è il numero di spire per unità di lunghezza, il numero di spire contenute nella fettina di spessore $d\xi$ sarà $n\, d\xi$ ed il campo nel punto P, che dista dalla fettina considerata di $(x-\xi)$, sarà, per la [V.22]:

$$d\vec{B}_0 = (n\, d\xi)\left(\frac{\mu_0 I R^2}{2\,[R^2+(x-\xi)^2]^{3/2}}\right)\hat{\imath}$$

dove $\hat{\imath}$ è il versore normale alle spire coincidente col versore dell'asse x.

Il campo $\vec{B}_0$ totale si ottiene integrando sulla variabile ξ, al suo variare tra il valore 0 ed il valore l. Per sviluppare questa integrazione è conveniente introdurre la variabile angolare θ mostrata in figura, per la quale valgono le relazioni:

$$R = (x-\xi)\,\mathrm{tg}\theta$$

$$(x-\xi) = \frac{R}{\mathrm{tg}\theta}$$

e, differenziando,

$$-\,d\xi = -\frac{R}{\mathrm{tg}^2\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\,,$$

da cui

$$d\xi = \frac{R\, d\theta}{\sin^2\theta}$$

In termini della variabile angolare θ, il contributo al campo $\vec{B}_0$ sull'asse da parte della fettina di solenoide di spessore $d\xi$ diventa:

$$d\vec{B}_0 = \frac{n\,\mu_0 I R^2 \hat{\imath}}{2\,[R^2/\sin^2\theta]^{3/2}}\,\frac{R\, d\theta}{\sin^2\theta} = \hat{\imath}\,\frac{n\,\mu_0 I}{2}\sin\theta\, d\theta$$

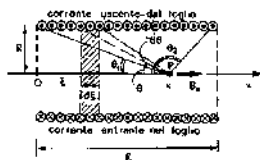
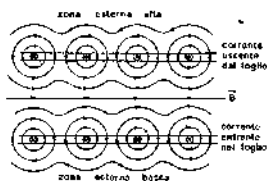
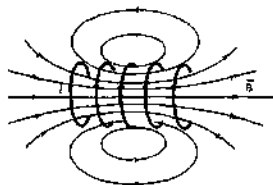
Il campo $\vec{B}_0$ risultante si ottiene integrando su tutto il solenoide, cioè tra i valori estremi θ_1 e θ_2 indicati in figura:

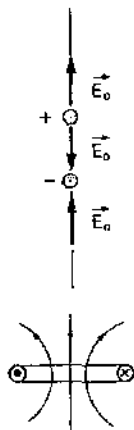
$$\vec{B}_0 = \hat{\imath}\,\frac{n\,\mu_0 I}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \hat{\imath}\,\frac{n\,\mu_0 I}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \qquad \text{[V.24]}$$

Solenoide «infinito»

Se il solenoide ha lunghezza molto maggiore del raggio ($l \gg R$), per punti non troppo prossimi alle estremità del solenoide, si ha $\theta_1 \to 0$, $\theta_2 \to \pi$ e quindi

$$\boxed{\vec{B}_0 = n\,\mu_0 I\,\hat{\imath}} \qquad \text{[V.25]}$$

Sull'asse $\hat{\imath}$ del solenoide il vettore induzione magnetica è parallelo all'asse stesso. Nella zona tra i fili, come si vede nel caso di solenoide ad avvolgimento non compatto mostrato in figura, i contributi di due fili vicini tendono ad elidersi. Per quanto riguarda la zona interna al solenoide, la sovrapposizione dei vari contributi produce ovunque un vettore $\vec{B}_0$ parallelo all'asse e praticamente uniforme, se il solenoide è molto più lungo del diametro delle spire e se l'avvolgimento è sufficientemente compatto. All'esterno del solenoide, invece, si capisce come il campo $\vec{B}$ sia piccolo rispetto alla zona interna, osservando nella figura che, per esempio nella parte alta, il contributo delle correnti uscenti ha verso opposto rispetto a quello che è generato nella stessa zona delle correnti entranti (disegnate nella parte bassa della figura). Ciò comporta una cancellazione degli effetti, per cui, all'esterno

di un solenoide lungo e ad avvolgimento compatto, il vettore $\vec{B}_0$ è praticamente trascurabile. L'andamento delle linee di forza di $\vec{B}_0$, che sono comunque delle linee chiuse, è mostrato schematicamente in figura. Si osserva la rarefazione delle linee di forza all'esterno del solenoide. Nel caso limite di solenoide infinitamente lungo, le linee di forza di $\vec{B}_0$ si chiudono all'infinito; e il modulo di $\vec{B}_0$ esternamente al solenoide è nullo.

V.4. Proprietà del vettore induzione magnetica $\vec{\mathbf{B}}_0$ nel caso stazionario

Abbiamo a più riprese osservato – e completeremo questa affermazione in termini generali nel prossimo paragrafo – che una piccola spira *rigida percorsa da corrente stazionaria si comporta come un dipolo magnetico*: in altri termini le sollecitazioni meccaniche da essa subite quando è immersa in un campo di induzione magnetica $\vec{B}_0$ costante, che non vari apprezzabilmente spostandosi sulla superficie della spira, sono formalmente identiche a quelle subite da *un dipolo elettrico immerso in un campo elettrostatico*; e analogamente il campo $\vec{B}_0$ da essa prodotto nel vuoto a distanza molto maggiore delle sue dimensioni geometriche ha lo stesso andamento del campo elettrostatico $\vec{E}_0$ prodotto nel vuoto da un dipolo elettrico. Tuttavia questa analogia vale solo da lontano: all'interno di un dipolo elettrico (cioè nello spazio che separa le due cariche puntiformi che lo costituiscono) il campo elettrostatico $\vec{E}_0$ ha direzione opposta rispetto all'esterno; mentre all'interno della spira, $\vec{B}_0$ ha la stessa direzione che esso ha esternamente. In altri termini, le linee di forza di $\vec{B}_0$ sono sempre linee chiuse: esse non possono uscire da un punto né convergere verso un punto, perché il campo magnetico non ammette né sorgenti né pozzi (non esistono monopoli magnetici). Mentre le linee di forza di $\vec{E}_0$ escono dai punti dove sono localizzate le cariche positive (sorgenti del campo) e convergono nei punti dove sono localizzate le cariche negative (pozzi del campo).

Per conseguenza, le *proprietà* di $\vec{B}_0$ sono profondamente diverse rispetto a quelle di $\vec{E}_0$: mentre $\vec{E}_0$ è conservativo ($\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$; ovvero in forma locale $\text{rot}\, \vec{E}_0 = 0$) e il suo flusso uscente da una superficie chiusa è in generale non nullo (teorema di Gauss $\int_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$; ovvero in forma locale $\text{div}\, \vec{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$), $\vec{B}_0$ ha da un lato flusso sempre nullo attraverso una superficie chiusa, ma non è d'altro lato conservativo; e ciò si traduce naturalmente anche in proprietà diverse dal punto di vista differenziale locale. Della discussione delle proprietà integrali e locali di $\vec{B}_0$ ci occuperemo appunto in questo paragrafo.

Già all'inizio di questo capitolo abbiamo affermato che il flusso di $\vec{B}_0$ attraverso una superficie chiusa è nullo; si trattava tuttavia di una conclusione meramente fenomenologica derivante dalla osservazione che le linee di forza di $\vec{B}_0$ sono linee chiuse. Avendo appurato, nel precedente paragrafo, che il vettore $\vec{B}_0$ è generato da cariche in movimento (ovvero da correnti elettriche), siamo ora in grado di dedurre tale proprietà in termini generali e rigorosi. Applichiamo l'operatore divergenza alla relazione generale [V.19] che esprime l'induzione magnetica $\vec{B}_0$ in funzione della configu-

razione geometrica dei circuiti sorgente (ma lo stesso risultato si otterrebbe partendo dalla più generale [V.20]); si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_o \equiv \operatorname{div} \vec{B}_o = \frac{\mu_o I}{4\pi} \operatorname{div} \oint_{l} \frac{d\vec{l}' \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_{l} \vec{\nabla} \cdot \left(d\vec{l}' \times \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right) \qquad [V.26]$$

(ricordiamo che $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$); ma in virtù di una proprietà generale dell'operatore nabla, si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{w}) \qquad [V.27]$$

dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono due qualunque vettori funzioni (derivabili) della posizione; ovvero

$$\operatorname{div} (\vec{v} \times \vec{w}) = (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{w} \qquad [V.27.a]$$

per cui la [V.26] diviene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_o = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_{l} \left[\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} (\vec{\nabla} \times d\vec{l}') - d\vec{l}' \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right) \right] \qquad [V.28]$$

Ma questa espressione è identicamente nulla, perché è nullo sia $\vec{\nabla} \times d\vec{l}'$ che $\vec{\nabla} \times \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \left(-\frac{1}{|\Delta\vec{r}|} \right)$ (vedi es. E.I.29). Osserviamo che nella [V.28] l'operatore $\vec{\nabla}$ si intende eseguito rispetto alle coordinate x, y, z, da cui $d\vec{l}'$ non dipende (per lo stesso motivo nella [V.26] $\vec{\nabla}$ può passare da fuori a dentro il segno di integrazione in $d\vec{l}'$); dunque in definitiva

Seconda equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_o = 0 \quad \text{ovvero} \quad \operatorname{div} \vec{B}_o = 0 \qquad [V.29]$$

La [V.29] rappresenta una proprietà del tutto generale del vettore $\vec{B}_o$; essa va sotto il nome di *seconda equazione di Maxwell* e si enuncia a parole dicendo che il vettore $\vec{B}_o$ è *solenoidale*. Come conseguenza della [V.29] e del teorema della divergenza [I.31], si ricava immediatamente la proprietà integrale di $\vec{B}_o$ che abbiamo più volte anticipato:

$\vec{B}_o$ è solenoidale

$$\Phi_S(\vec{B}_o) = \int_S \vec{B}_o \cdot d\vec{S} = \int_\tau \operatorname{div} \vec{B}_o \cdot d\tau = 0 \qquad [V.30]$$

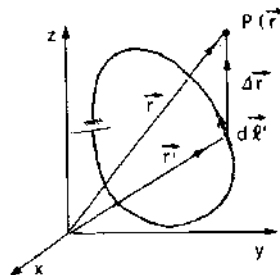
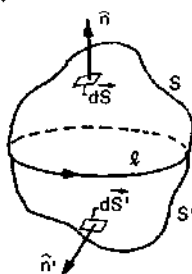
dove S è una qualunque superficie chiusa e τ il volume in essa racchiuso: **il flusso di $\vec{B}_o$ attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo**; ovvero anche: il flusso di $\vec{B}_o$ attraverso due superfici S ed S' aventi lo stesso contorno l e orientamento discorde è uguale e opposto. Da questa proprietà, tenendo conto che cambiando il verso di orientamento di una superficie il flusso cambia segno, si ha immediatamente l'altra proprietà spesso usata, che il flusso di $\vec{B}_o$ attraverso due superfici qualunque aventi lo stesso contorno e orientamento concorde è uguale, per cui si può parlare semplicemente di flusso di $\vec{B}_o$ concatenato con quel contorno.

Il flusso di $\vec{B}_o$ uscente da superficie chiusa è nullo

Tabella V.1

Alcune relazioni generali di analisi vettoriale

Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori funzioni derivabili della posizione ($\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$; $\vec{w} = \vec{w}(x, y, z)$) e $f = f(x, y, z)$ una funzione scalare derivabile della posizione. Valgono le seguenti relazioni generali:

RELAZIONI DIFFERENZIALI

d.1)	$\vec{\nabla} \cdot f\vec{v} = \vec{\nabla}f \cdot \vec{v} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$	ovvero	$\mathrm{div}(f\vec{v}) = \mathrm{grad}f \cdot \vec{v} + f\,\mathrm{div}\,\vec{v}$
d.2)	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{w})$	ovvero	$\mathrm{div}(\vec{v} \times \vec{w}) = \mathrm{rot}\,\vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{w}$
d.3)	$\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = f\vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla}f \times \vec{v}$	ovvero	$\mathrm{rot}(f\vec{v}) = f\,\mathrm{rot}\,\vec{v} + \mathrm{grad}\,f \times \vec{v}$
d.4)	$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{w})$		

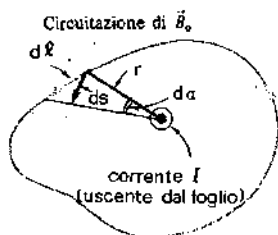
$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) + \underline{C} \wedge (\underline{A} \wedge \underline{B}) + \underline{B} \wedge (\underline{C} \wedge \underline{A}) = 0$

$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}(\underline{A} \cdot \underline{B})$ $\quad [\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E}) = -\nabla^2 \underline{E} + \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{E})]$

$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \sum_i A_i (\underline{B} \wedge \underline{C})_i =$

RELAZIONI INTEGRALI

I.1)	$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, d\tau = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$	Teorema della divergenza o di Gauss
I.2)	$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_l \vec{v} \cdot d\vec{l}$	Teorema del rotore o di Stokes
I.3)	$\int_S \vec{\nabla}f \times d\vec{S} = \int_l f\, d\vec{l}$	
I.4)	$\int_\tau \vec{\nabla} \times \vec{v}\, d\tau = -\int_S \vec{v} \times d\vec{S}$	Seconda identità di Green

Circuitazione di $\vec{B}_0$

Filo rettilineo indefinito

La seconda proprietà fondamentale di $\vec{B}_0$ riguarda la sua circuitazione (ovvero, in termini differenziali locali, il suo rotore). Cominciamo col considerare il campo di induzione magnetica $\vec{B}_0$ generato da un filo rettilineo indefinitamente lungo (eq. [V.21]), e calcoliamo la circuitazione lungo una linea chiusa orientata qualunque l;

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l \frac{\hat{t} \cdot d\vec{l}}{r}$$

Poiché $\hat{t}$ rappresenta il versore della tangente alla circonferenza di raggio r, il prodotto scalare $\hat{t} \cdot d\vec{l}$ rappresenta il tratto elementare ds di circonferenza; e dunque $\frac{\hat{t} \cdot d\vec{l}}{r} = \frac{ds}{r}$ è pari all'angolo al centro $d\alpha$ sotteso dall'elemento $d\vec{l}$

della linea chiusa l; si ha pertanto:

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l d\alpha \qquad [V.31]$$

Qualora la linea chiusa l giri intorno al filo percorso da corrente (o, come si usa dire, qualora la linea l *sia concatenata* col filo percorso da corrente), gli estremi di integrazione della [V.31] sono compresi fra un angolo qualunque di riferimento α_0 e $\alpha_0 + 2\pi$; si ha pertanto:

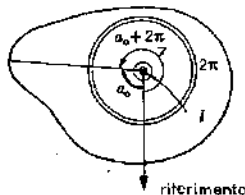
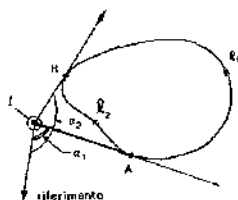
$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\alpha_0 + 2\pi - \alpha_0) = \mu_0 I \qquad [V.31.a]$$

Qualora la linea chiusa *non* sia concatenata col filo, si ha invece:

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{A, l_1}^{B} d\alpha + \int_{B, l_2}^{A} d\alpha \right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} [(\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2)] = 0 \qquad [V.31.b]$$

In termini più generali, i risultati ora ottenuti possono essere posti nella forma

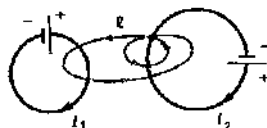
$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = n\, \mu_0 I \qquad [V.32]$$

dove n rappresenta il numero di volte per cui la linea l si concatena col filo percorso da corrente. Se la corrente non è concatenata ($n = 0$) la circuitazione di $\vec{B}_0$ è nulla; se la linea è concatenata una volta sola, allora si ha la [V.31.a]; se la linea è concatenata n volte (cioè gira n volte intorno al filo) allora nella [V.31] l'integrazione va eseguita non fra 0 e 2π, ma fra 0 e $n\,2\pi$, e il risultato diviene la [V.32] con n intero diverso da 0 e 1. Osserviamo che dalla [V.31] e [V.32] discende che il valore della circuitazione non dipende dalla forma della linea chiusa l, ma solo dal suo grado di concatenazione col filo; in particolare dunque si ottiene lo stesso risultato anche integrando su una linea chiusa che giri intorno al filo molto vicino ad esso. Poiché è chiaro che molto vicino al filo il contributo del campo $\vec{B}_0$ deriva principalmente da una porzione di filo molto breve e che questa può essere approssimata come rettilinea, ci aspettiamo che la [V.32], che è stata dedotta per un filo rettilineo, valga in realtà del tutto in generale, qualunque sia la forma del filo percorso da corrente stazionaria I. In realtà *è possibile dimostrare che la [V.32] è una proprietà generale del vettore $\vec{B}_0$ dato dalla [V.20]*, e ciò costituisce il cosiddetto *teorema della circuitazione di Ampere:* **la circuitazione di $\vec{B}_0$ lungo una qualunque linea chiusa orientata l è pari alla corrente I_c con cui la linea chiusa si concatena, moltiplicata per μ_0.** Qualora il campo $\vec{B}_0$ sia generato da più di un solo circuito, tenendo presente che per le sue proprietà [V.17] e [V.19] il campo di induzione $\vec{B}_0$ è additivo (il campo risultante generato da più circuiti è pari alla somma dei campi generati dai singoli circuiti), la [V.32] diviene

Teorema della circuitazione di $\vec{B}_0$ nel vuoto in condizioni stazionarie

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i n_i \qquad [V.33]$$

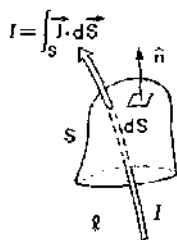
dove $\Sigma\, I_i\, n_i$ indica la somma delle correnti pesate ciascuna col suo grado di concatenazione. Ad esempio nel caso rappresentato in figura, le correnti I_1 e I_3 sono concatenate una sola volta (la linea l gira una sola volta intorno ad esse: $n_1 = n_3 = 1$), la corrente I_2 è concatenata due volte ($n_2 = 2$), e la corrente I_4 non è concatenata affatto ($n_4 = 0$). Nella sommatoria [V.33] *le correnti vanno prese col segno + o − a seconda che esse vedano circolare intorno a sé la linea orientata l in senso antiorario o, rispettivamente, orario* (nel caso del disegno le I_i sono positive se escono dal foglio). Un criterio equivalente per fissare il segno delle correnti consiste nell'orientare il pollice della mano destra come la corrente ed assumere per questa segno positivo se la linea è orientata concordemente alle dita della mano stessa; oppure negativo in caso contrario.

Segno delle correnti nel calcolo della circuitazione di $\vec{B}_0$

Esempio

E.V.13. *Due spire, mostrate in figura, sono percorse nel verso indicato da correnti rispettivamente $I_1 = 1$ A e $I_2 = 2$ A. Calcolare la circuitazione di $\vec{B}_0$ lungo la linea l.*

La linea l è concatenata una sola volta con la corrente I_1, che la vede girare intorno a sé in senso orario; dunque il suo contributo alla circuitazione è $\mu_0 n_1 I_1 = -\mu_0 I_1$. Il grado di concatenazione con I_2 è invece pari a 2 in senso antiorario; dunque da I_2 si ha un contributo pari a $+2\mu_0 I_2$. In totale

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 (-I_1 + 2\, I_2) = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mA}} \cdot (-1 + 4)\ \mathrm{A} = 37{,}7 \cdot 10^{-7}\, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$$

Espressione differenziale locale del teorema della circuitazione

Per esprimere in forma differenziale locale il teorema della circuitazione (la cui formulazione integrale più generale è la [V.33]), limitiamo ora la nostra attenzione a una linea chiusa l che si avvolga una sola volta su sé stessa: il secondo membro della [V.33] diviene allora $\mu_0 \Sigma_i I_i$, cioè è pari alla somma algebrica delle correnti concatenate col circuito moltiplicata per μ_0. Considerata una qualunque superficie aperta S che abbia come contorno la linea l, essa intercetta una e una sola volta tutte le correnti concatenate con l. Se l'orientamento positivo di S è scelto in modo che essa veda circolare l in senso antiorario, ricordando la definizione [IV.7] della densità di corrente $\vec{J}$, si ha

$$\sum I_i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

e dunque la [V.33] diviene

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}\,.$$

Applicando al primo membro di questa relazione il teorema del rotore

$$\left(\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} \right)$$

essa diviene

$$\int_S \mathrm{rot}\, \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Poiché questa relazione deve valere qualunque sia la linea l e qualunque sia la superficie aperta S avente l come contorno, l'uguaglianza degli integrali

implica l'uguaglianza degli integrandi

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}_o = \mu_o \vec{J} \quad \text{ovvero} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} \qquad [V.34]$$

Quarta equazione di Maxwell nel caso stazionario

equazione che va sotto il nome di *quarta equazione di Maxwell nel caso stazionario.*

Poiché per una proprietà matematica generale la divergenza di un rotore – se esiste – è nulla (vedi esempio E.V.14), applicando l'operatore divergenza alla [V.34] si ha:

$$\mu_o \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) = 0$$

Dunque la [V.34] implica che sia $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$: *affinché possa valere la [V.34] è necessario che la densità di corrente abbia divergenza nulla.* Questa condizione è in effetti soddisfatta nel caso stazionario, in cui l'equazione di continuità [IV.32] si riduce alla [IV.13]; ma la stessa equazione di continuità ci mostra che nel caso non stazionario la divergenza di $\vec{J}$ è diversa da zero

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\right).$$

Dunque la [V.34] vale *solo* nel caso stazionario: nel capitolo VII vedremo come essa deve essere modificata nel caso non stazionario.

Esempio

E.V.14. *Dato un campo vettoriale $\vec{v}$, le cui componenti ammettano derivate parziali seconde, mostrare che la divergenza del suo rotore è identicamente nulla.*

Per la definizione [I.79] si ha:

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \hat{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Applicando l'operatore divergenza abbiamo

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\, \partial z} + \\ &+ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z\, \partial y}\end{aligned}$$

Tenuto conto del teorema di Schwartz sulla invertibilità dell'ordine di derivazione, questa espressione risulta identicamente nulla.

È interessante confrontare le equazioni fondamentali della magnetostatica nel vuoto con quelle della elettrostatica nel vuoto

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_o = 0$	[V.29]	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$	[I.36]
$\vec{\nabla} \times \vec{B}_o = \mu_o \vec{J}$	[V.34]	$\vec{\nabla} \times \vec{E}_o = 0$	[I.83]

La [I.83] (irrotazionalità, o conservatività, del campo elettrostatico) ci ha portato a introdurre il potenziale elettrico V_o. Da sola, essa ovviamente non basta a determinare il potenziale stesso; ma insieme alla [I.36] essa dà luogo alla equazione fondamentale della elettrostatica (equazione di Poisson [II.46]), che fissate le condizioni al contorno ammette soluzione univoca.

Analogamente, la sola equazione [V.34] non determina univocamente il campo $\vec{B}_o$: è facile mostrare che se un campo $\vec{B}_o$ soddisfa la [V.34], anche il campo $\vec{B}'_o = \vec{B}_o + \nabla f$ (dove $f = f(x, y, z)$ è una qualunque funzione scalare della posizione che ammetta derivate seconde) la soddisfa; infatti $\vec{\nabla} \times \vec{B}'_o = \vec{\nabla} \times B_o + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f - \vec{\nabla} \times \vec{B}_o$ ($\nabla \times \vec{\nabla} f \equiv 0$, vedi eq. [I.80]). Tuttavia la condizione [V.29] completa la definizione di $\vec{B}_o$, rendendo univoca la soluzione, come vedremo nel prossimo paragrafo.

La [V.34] ci mostra che, a meno che sia $\vec{J} = 0$, il campo $\vec{B}_o$ *non* è conservativo; e dunque, in generale non è possibile introdurre, in analogia col potenziale elettrostatico, un potenziale scalare magnetostatico. Tuttavia, come vedremo fra breve, in virtù della solenoidalità di $\vec{B}_o$ (eq. [V.29]) è sempre possibile introdurre un *potenziale vettore* magnetostatico che consente di formulare in maniera compatta anche il problema della magnetostatica.

Prima di chiudere il paragrafo, osserviamo che la [I.36] e la [V.29] (rispettivamente prima e seconda equazione di Maxwell) hanno validità del tutto generale, non limitata cioè al solo caso stazionario; mentre la [I.83] e la [V.34] valgono solo nel caso stazionario, e devono essere generalizzate affinché la loro validità si estenda anche al caso non stazionario.

V.5. Potenziali magnetostatici

V.5.1. Potenziale scalare

Potenziale magnetostatico scalare

Poiché, in virtù della [I.80], il rotore del gradiente di una funzione scalare è identicamente nullo ($\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi \equiv 0$), condizione necessaria affinché un vettore $\vec{B}_o$ sia conservativo (cioè sia esprimibile come gradiente di un potenziale scalare φ: $\vec{B}_o = \vec{\nabla}\varphi$) è che il suo rotore *sia nullo* ($\vec{\nabla} \times \vec{B}_o = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$). Poiché il campo magnetostatico $\vec{B}_o$ non gode di questa proprietà (in virtù della [V.34] $\vec{\nabla} \times \vec{B}_o = \mu_o \vec{J}$ è in generale diverso da zero), esso non è dunque in generale conservativo.

Tuttavia, la densità di corrente $\vec{J}$ è di solito diversa da zero solo in porzioni assai limitate dello spazio (nelle porzioni di spazio occupate da conduttori, spesso rappresentati da semplici fili metallici). Ci chiediamo allora se in tutto lo spazio restante, in cui essendo nulla la densità $\vec{J}$ è $\vec{\nabla} \times \vec{B}_o = 0$, il campo $\vec{B}_o$ sia conservativo; cioè se sia esprimibile come gradiente di un potenziale scalare $\varphi = \varphi(x, y, z)$ (che nel sistema S.I. si misurerà in Tesla per metro). In termini matematici, ciò è come chiedersi se la condizione

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_o = 0 \qquad [V.35]$$

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un potenziale scalare monodromo

oltre che necessaria sia anche sufficiente per l'esistenza di una funzione *monodroma* (cioè definita a meno di una eventuale costante che abbia però lo stesso valore in ogni posizione) di cui $\vec{B}_o$ sia il gradiente (per omogeneità con il potenziale elettrostatico, si preferisce in realtà cambiare segno):

$$\vec{B}_o = -\vec{\nabla}\varphi \qquad [V.36]$$

A questa domanda dà risposta la matematica, la quale afferma che *condizione necessaria e sufficiente affinché un campo vettoriale $\vec{B}_o$ entro un certo dominio di definizione sia esprimibile*, secondo la [V.36], *come gradiente di un potenziale scalare monodromo φ è che il campo vettoriale soddisfi la [V.35] (cioè sia irrotazionale) e che il dominio sia semplicemente connesso*. Ricordiamo che un dominio spaziale si dice semplicemente connesso se ogni linea chiusa appartenente ad esso può essere ridotta a un punto continuando sempre ad appartenere completamente al dominio. Così ad esempio un dominio bidimensionale A che presenti un «buco», come quello mostrato in figura, non è semplicemente connesso, perché la linea chiusa l non può restringersi fino a diventare un punto continuando ad appartenere ad A. Ma se il dominio è tridimensionale, un buco in esso non disturba la semplice connessione, perché la linea chiusa può passare sopra o sotto al buco per restringersi fino a diventare un punto; mentre non è semplicemente connesso un dominio attraversato da un «tubo» non appartenente ad esso.

Campo vettoriale irrotazionale in un dominio semplicemente connesso

Consideriamo dunque una certa porzione di spazio D, in cui il campo di induzione magnetica $\vec{B}_o$ prodotto da un solo circuito l' percorso da corrente stazionaria I sia irrotazionale (le conclusioni che raggiungeremo sono tuttavia immediatamente estendibili, tenuto conto della additività di $\vec{B}_o$, al caso in cui i circuiti percorsi da corrente siano più di uno). Sia D semplicemente connesso: ciò significa che se esso comprendeva il circuito l' escludiamo da D un «buco» che contenga completamente il circuito l', in modo che ogni linea chiusa l appartenente a D non possa essere concatenata con l'.

Per quanto detto più sopra, essendo $\vec{\nabla} \times \vec{B}_o = 0$ su tutto il campo semplicemente connesso D, ci aspettiamo che $\vec{B}_o$ sia conservativo in D, e quindi che esista una funzione scalare φ definita in D tale che su tutto D valga la [V.36]. Ciò è confermato dal fatto che, non esistendo in D alcuna linea chiusa l concatenata con il filo l' percorso da corrente, per la [V.32] si ha su ogni linea chiusa appartenente a D

$$\oint \vec{B}_o \cdot d\vec{l} = 0$$

L'espressione esplicita della funzione potenziale magnetostatico scalare φ può essere ricavata con relativa semplicità a partire dalle proprietà di $\vec{B}_o$. A tal fine, moltiplicheremo la [V.36] per uno spostamento elementare $d\vec{l} \equiv (dx, dy, dz)$ spostandoci così nel campo dal punto P in posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ al punto P' in posizione $\vec{r} + d\vec{l} \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$:

$$\vec{B}_o \cdot d\vec{l} = -\vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{l}$$

Per la [I.48], il secondo membro di questa relazione ci dà il differenziale (cambiato di segno) $-d\varphi$ della funzione φ; mentre nel primo membro possiamo sostituire la [V.19] ottenendo:

$$-d\varphi = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left(\oint_{l'} \frac{d\vec{l}' \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right) \cdot d\vec{l} \qquad \text{[V.37]}$$

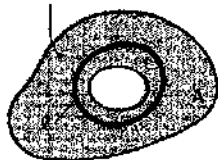
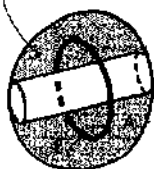
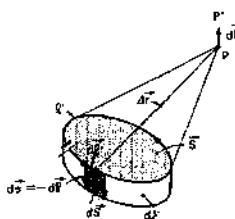
D'altra parte, spostarsi di un tratto $d\vec{l}$ nel campo $\vec{B}_o$ equivale a rimanere fissi in P e spostare il circuito l' di un tratto elementare $d\vec{s} = -d\vec{l}$ per cui la [V.37] diviene

$$d\varphi = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_{l'} d\vec{l}' \times \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \cdot d\vec{s} \qquad \text{[V.38]}$$

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte a sviluppo della [V.10] si ha

$$d\vec{l}' \times \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \cdot d\vec{s} = d\vec{s} \times d\vec{l}' \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} = d\vec{l}' \times d\vec{s} \cdot \frac{(-\Delta\vec{r})}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

$d\vec{l} \times d\vec{s}$ rappresenta l'elemento di superficie $d\vec{S}$ spazzato dall'elemento di circuito $d\vec{l}'$ spostandosi del tratto $d\vec{s}$; per cui

$$(d\vec{l}' \times d\vec{s}) \cdot \frac{(-\Delta\vec{r})}{|\Delta\vec{r}|^3} = d\vec{S} \cdot \frac{(-\Delta\vec{r})}{|\Delta\vec{r}|^3} = \frac{dS_n}{|\Delta\vec{r}|^2} \quad [V.39]$$

La faccia positiva di $\vec{S}$ è quella da cui si vede circolare la corrente in senso antiorario

dove dS_n è l'elemento di superficie $d\vec{S}$ proiettato su $(-\Delta\vec{r})$, cioè su $\Delta\vec{r}$ orientato da P verso l'elemento di superficie stesso; dunque la [V.39] non è altro che l'angolo solido elementare sotto cui da P viene visto l'elemento di superficie $d\vec{S}$. Pertanto l'integrale al secondo membro della [V.38], esteso a tutto il circuito, rappresenta l'angolo solido $d\Omega$ sotto cui da P è vista la superficie totale $d\Sigma$ spazzata dal circuito in conseguenza dello spostamento $d\vec{s}$; cioè la variazione (cambiata di segno: $-d\Omega = \Omega - \Omega'$) dell'angolo solido Ω sotto cui da P si vede il circuito. La [V.38] può dunque essere scritta come

Ω è l'angolo solido sotto cui da P è visto il circuito, positivo se P vede la faccia negativa di $\vec{S}$

$$d\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega \quad [V.40]$$

Potenziale magnetostatico nel vuoto monodromo in un campo di definizione semplicemente connesso

e integrando fra una qualunque posizione di riferimento e la posizione generica

$$\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega + c \quad [V.41]$$

dove c è una costante arbitraria che usualmente, per semplicità, viene presa pari a zero; ciò equivale a porre $\varphi = 0$ all'infinito. Per cui scriveremo

$$\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega \quad [V.42]$$

Concludendo: *nel vuoto, entro un dominio spaziale semplicemente connesso* in cui non siano presenti correnti, *il campo magnetostatico $\vec{B}_0$ è conservativo; esso è esprimibile in effetti come gradiente (cambiato di segno) di una funzione scalare φ che nel punto P è proporzionale, tramite il fattore $\frac{\mu_0 I}{4\pi}$, all'angolo solido Ω sotto cui da P è visto il circuito che genera il campo*

Ovvero:

$$\vec{B}_0 = +\frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{\nabla}\Omega \quad [V.43]$$

In particolare, se il punto P è molto lontano dal circuito che genera il campo (cioè se il campo è generato da una spira di area S le cui dimensioni lineari sono piccole rispetto alla distanza r a cui ci si pone dalla spira stessa), si ha

$$\Omega = -\frac{\vec{S}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

e la [V.42] diviene

$$\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \qquad [V.44]$$

Completamento del teorema di equivalenza di Ampere

dove $\vec{m} = I\vec{S}$. Osserviamo che il segno meno nella espressione $\Omega = -\frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3}$ deriva dal fatto che nella [V.44] abbiamo preferito orientare $\vec{r}$ dal circuito verso il punto P (in coerenza con la convenzione usata nella [I.54] per il dipolo elettrico), mentre nella [V.42] la distanza fra P e il circuito è orientata da P verso il circuito stesso. L'identità formale fra la [I.54] e la [V.44] completa la dimostrazione del teorema di equivalenza di Ampere, secondo quanto avevamo anticipato nei precedenti paragrafi.

Vediamo ora come le considerazioni fin qui svolte, che ci hanno portato a introdurre il potenziale magnetostatico monodromo [V.42], si modificano qualora il campo di definizione *non* sia semplicemente connesso. Dato dunque un circuito percorso da corrente stazionaria I consideriamo *tutto* lo spazio circostante D (escluso dunque solo il volume occupato fisicamente dal circuito). Tale spazio D non è semplicemente connesso, perché ogni linea concatenata al circuito non può restringersi a un punto senza attraversare il circuito (che non appartiene a D). Su tutto D continuano a valere la [V.35] e la [V.19], per cui possiamo ancora scrivere la [V.37] pervenendo alla [V.40]. Tuttavia nella [V.41] la costante c di integrazione *non è univocamente determinata*: stabilito cioè il suo valore in un punto P_0 del campo (ad esempio posto $c = 0$ all'infinito) non è detto che essa abbia lo stesso valore in un punto P generico del campo stesso. Infatti, se per andare da P_0 a P noi seguiamo una linea l_1 *non concatenata* al circuito l, allora la costante ha lo stesso valore sia in P che in P_0; ma se noi seguiamo una linea l_2 che si concateni n volte con il circuito ($n \neq 0$), allora al valore che φ assume in P dobbiamo aggiungere, coerentemente con la [V.32], la quantità $-n\,\mu_0 I$ (il segno meno deriva dal fatto che $\vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = -d\varphi$).

Una volta imposta la condizione $\varphi = 0$ in un punto all'infinito, al posto della [V.42] avremo

$$\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega - n\,\mu_0 I = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}(\Omega + n\,4\pi) \qquad [V.45]$$

Potenziale magnetostatico polidromo

dove n rappresenta il numero di volte per cui la linea che abbiamo seguito per andare dal punto di riferimento fino al punto generico P si è concatenato col circuito. La [V.45] è interpretabile anche dicendo che nella [V.42] l'angolo solido Ω è univocamente definito solo se il campo è semplicemente connesso; in caso contrario, per ogni giro che noi compiamo concatenandoci al circuito dobbiamo aggiungere a Ω l'angolo solido totale 4π. Una espressione come la [V.45] è detta un *potenziale polidromo*. Tuttavia, il gradiente della [V.45] ha lo stesso valore indipendentemente dal valore di n, per cui il campo $\vec{B}_0$ dato dalla [V.43] è univocamente definito: ciò si enuncia dicendo che il *potenziale magnetostatico*, benché sia polidromo, *ha differenziale monodromo*. Fisicamente, ciò corrisponde al fatto che, dato un circuito percorso da corrente stazionaria I, il campo $\vec{B}_0$ nello spazio circostante è univocamente definito; ma l'integrale di linea di $\vec{B}_0$ fra due punti qualunque non è indipendente dalla traiettoria, essendo necessario aggiungere una quantità pari a $\mu_0 I$ per ogni volta che la linea di integrazione si concatena col circuito.

Potenziale polidromo con differenziale monodromo

Finalmente, nella porzione di spazio occupata fisicamente dal circuito (più in generale, in tutta la porzione di spazio in cui è $\vec{J} \neq 0$), non valendo la condizione necessaria [V.35] ($\vec{\nabla} \times \vec{B}_o = \mu_o \vec{J} \neq 0$), non è definibile alcun potenziale scalare magnetostatico.

Vedremo tuttavia qui di seguito che è ovunque definibile un potenziale vettore.

V.5.2. Potenziale vettore

Il potenziale vettore, che ora andiamo a introdurre, ha un interesse più generale rispetto al potenziale scalare non solo perché esso può essere definito anche laddove $\vec{J} \neq 0$, ma anche perché il relativo formalismo è immediatamente generalizzabile, come a suo tempo vedremo, anche ai casi non stazionari.

Il potenziale vettore $\vec{A}_o = \vec{A}_o(x, y, z)$ nel vuoto è definito come quel campo vettoriale tale che

Potenziale vettore $\vec{A}_o$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}_o \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}_o = \vec{B}_o \qquad [V.46]$$

cioè, a parole, *il rotore del potenziale vettore $\vec{A}_o$* è pari al campo di induzione magnetica $\vec{B}_o$. L'unità di misura per $\vec{A}$ nel S.I. è il T · m. Poiché, come abbiamo mostrato nell'esempio E.V.14, la divergenza di un rotore è identicamente nulla, la [V.46] implica che sia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_o = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_o \equiv 0 \qquad [V.47]$$

ma questa condizione è sempre verificata in virtù della seconda equazione di Maxwell [V.29], che ha validità del tutto generale.

La [V.46] non definisce univocamente il potenziale vettore $\vec{A}_o$. Infatti, se $\vec{A}_o$ soddisfa la [V.46], anche $\vec{A}'_o$ legato ad $\vec{A}_o$ dalla relazione

Trasformazione di gauge

$$\vec{A}'_o = \vec{A}_o + \vec{\nabla} f \qquad [V.48]$$

dove f è una qualunque funzione scalare (che ammetta derivate parziali seconde) soddisfa la [V.46]; infatti per la [I.80] il rotore del gradiente di f è nullo ($\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$), e dunque:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}'_o = \vec{\nabla} \times \vec{A}_o + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \times \vec{A}_o = \vec{B}_o$$

La [V.48] è detta *trasformazione di gauge.* Usando la [V.48] il campo vettore, che ovviamente è definito anche a meno di una costante additiva, non solo può essere scelto in modo da avere un valore prefissato in una posizione di riferimento (ad esempio in modo da essere nullo all'infinito); ma anche in modo che sia nulla la sua divergenza. Applicando infatti l'operatore divergenza alla [V.48], vediamo immediatamente che affinché sia nulla la divergenza di $\vec{A}'_o$ ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'_o = 0$) basta che sia

$$\nabla^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_o \qquad [V.49]$$

Una volta dunque trovato un potenziale vettore $\vec{A}_o$, la cui divergenza $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_o$ è in generale non nulla, determinando una funzione f che soddisfi la [V.49] (equazione che ammette soluzione; soluzione che è anche unica se si fis-

sano le condizioni al contorno) si ottiene tramite la [V.48] un nuovo potenziale vettore (che soddisfa cioè la [V.46]) e che ha in più divergenza nulla. Noi ipotizzeremo di scegliere sempre un potenziale vettore a divergenza nulla:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_o = 0 \qquad [V.50]$$

In tale ipotesi, l'equazione generale cui soddisfa il campo vettore diviene formalmente assai semplice. Partiamo infatti dalla [V.34] ($\vec{\nabla} \times \vec{B}_o = \mu_o \vec{J}$), e sostituiamo in essa la [V.46]; si ottiene

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_o) = \mu_o \vec{J} \qquad [V.51]$$

Proprietà degli operatori: $\text{rot rot}\,\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} + \text{grad div}\,\vec{A}$

In virtù di una proprietà generale di analisi vettoriale, si ha però

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}_o = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_o) - \nabla^2\vec{A}_o = -\nabla^2\vec{A}_o \qquad [V.52]$$

Nell'ultimo passaggio di questa relazione abbiamo tenuto conto della [V.50]. Sostituendo la [V.52] nella [V.51] otteniamo infine

$$\nabla^2\vec{A}_o = -\mu_o \vec{J} \qquad [V.52]$$

Equazione generale del potenziale vettore

che nella rappresentazione cartesiana equivale alle tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_{ox} = -\mu_o J_x \\ \nabla^2 A_{oy} = -\mu_o J_y \\ \nabla^2 A_{oz} = -\mu_o J_z \end{cases} \qquad [V.52.a]$$

La [V.52] rappresenta l'equazione generale del potenziale vettore; come vediamo, essa equivale a tre equazioni scalari formalmente identiche alla equazione generale dell'elettrostatica [II.46] (equazione di Poisson). Per la soluzione delle tre equazioni [V.52.a] valgono dunque tutte le considerazioni che abbiamo fatto nel paragrafo [II.6]. In particolare, qualora – come spesso accade – la densità di corrente $\vec{J}(x, y, z)$ sorgente del campo sia esplicitamente nota a priori e sia localizzata al finito, la soluzione della [V.52] è data (in analogia con la [I.44]) dalla semplice espressione integrale:

$$\vec{A}_o(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dx'\, dy'\, dz' \qquad [V.53]$$

Espressione esplicita del potenziale vettore nota la sorgente $\vec{J}$ del campo

equivalente nella rappresentazione cartesiana alle tre relazioni scalari

$$A_{ox}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{J_x(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d\tau'$$

$$A_{oy}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{J_y(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d\tau' \qquad [V.53.a]$$

$$A_{oz}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{J_z(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d\tau'$$

dove $d\tau' \equiv (dx', dy', dz')$ è l'elemento di volume; l'integrale va eseguito su tutto lo spazio in cui è $\vec{J} \neq 0$. Qualora la densità di corrente sia localizzata

solo su conduttori filiformi, si ha $\vec{J}\,d\tau' = JS\,d\vec{l}' = I\,d\vec{l}'$ dove S è la sezione normale del conduttore, I la corrente e $d\vec{l}'$ l'elemento di circuito; la [V.53] diviene allora

Caso in cui il campo è generato da un circuito filiforme

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I\,d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad [V.54]$$

dove l'integrale di linea è esteso a tutto il circuito l' percorso da corrente. La [V.53] vale in tutto lo spazio, inclusa la regione in cui passa la corrente che genera il campo (cioè in cui è $\vec{J} \neq 0$); la [V.54] vale invece solo nello spazio che circonda il circuito. Una volta trovato il potenziale vettore tramite la [V.53] (o la [V.54]) il suo rotore ci fornisce il campo di induzione magnetica $\vec{B}_0$ (eq. [V.46]): il campo $\vec{B}_0$ così ricavato rappresenta la soluzione delle equazioni di Maxwell [V.29] e [V.34]. Nelle [V.53] e [V.54] la costante di integrazione è stata scelta in modo che il potenziale vettore si annulli all'infinito.

Esempi

E.V.15. ***Verificare che la prima formula di Laplace [V.17] è ottenibile come rotore del potenziale vettore $d\vec{A}_0$ generato dall'elemento $d\vec{l}'$ del circuito percorso da corrente I.***

Per semplicità, supponiamo che l'elemento di circuito $d\vec{l}'$ sia situato nell'origine ($\vec{r}' = 0$), cosicché nella [V.17] e nella [V.54] è $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}' = \vec{r}$. Dalla [V.54] abbiamo allora

$$d\vec{A}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}'}{r}$$

Applicando l'operatore di rotore, per la [V.46] abbiamo

$$d\vec{B}_0 = \vec{\nabla} \times d\vec{A}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{d\vec{l}'}{r}\right) \qquad [V.55]$$

Ma per una relazione generale di analisi vettoriale si ha

$\mathrm{rot}\,(f\,\vec{v}) = f\,\mathrm{rot}\,\vec{v} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \times \vec{v}$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{\nabla} f \times \vec{v}$$

dove f è una funzione scalare e $\vec{v}$ un vettore (funzioni derivabili della posizione). Applicando questa relazione alla [V.55] con $f = 1/r$ e $\vec{v} = d\vec{l}'$, si ha

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{r} (\vec{\nabla} \times d\vec{l}') + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \times d\vec{l}' \right)$$

Poiché $d\vec{l}'$ è costante (indipendente dalle coordinate x, y, z), si ha $\vec{\nabla} \times d\vec{l}' = 0$; e inoltre per la [I.57]:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \times d\vec{l}' = -\frac{1}{r^3}\,\vec{r} \times d\vec{l}' = \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$$

cosicché la relazione precedente diviene:

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$$

che è appunto la [V.17] (con $\vec{r}' = 0$).

E.V.16. *Calcolare il potenziale generato da una piccola spira piana di area S percorsa da corrente stazionaria I.*

Potenziale vettore prodotto da una piccola spira piana

Supponiamo, per semplicità, che la spira sia centrata nell'origine. Dire che la spira è piccola, equivale a dire che nella [V.54] è $r' \ll r$, per cui la [V.54] stessa diviene:

$$\vec{A}_o(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{I\, d\vec{l}'}{r}$$

Usando la terza delle relazioni integrali di tabella V.1, con $f = 1/r$, la precedente relazione può essere così sviluppata

$$\vec{A}_o(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}'}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \times d\vec{S} \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \times \vec{S}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che la spira è piccola, per cui l'integrale eseguito sulla superficie della spira può essere approssimato col valore della funzione moltiplicata per la superficie S. D'altro canto, per la [I.57] è

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

per cui la precedente relazione diviene

$$\vec{A}_o(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-\vec{r}) \times \vec{S}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{S} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \qquad \text{[V.56]}$$

dove $\vec{m} = I\vec{S}$ è il momento magnetico della spira.

Non è difficile verificare che il campo di induzione magnetica che si ottiene come rotore della [V.56] è lo stesso che si ottiene eseguendo il gradiente (cambiato di segno) della [V.44].

E.V.17. *Calcolare il potenziale vettore generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente stazionaria I.*

Potenziale vettore prodotto da un filo rettilineo indefinito

Osserviamo che in questo caso non è utilizzabile la [V.53] (né la [V.54]): queste infatti valgono a condizione che le distribuzioni di corrente siano localizzate al finito, mentre il filo rettilineo indefinito si estende fino all'infinito. È dunque necessario ricorrere a una generalizzazione di queste relazioni; generalizzazione del tutto analoga a quella discussa nel par. I.7 a proposito del potenziale elettrostatico, che ci ha portato a introdurre la [I.47].

Nel caso in esame, il potenziale vettore $\vec{A}_o(\vec{r})$ anziché dalla [V.54] sarà fornito dalla relazione:

$$\vec{A}_o(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell} d\vec{l}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|} \right) \qquad \text{[V.57]}$$

che può essere ricavata in maniera del tutto analoga alla [I.47] ($\vec{r}_0$ è la posizione di un punto qualunque di riferimento in cui imponiamo $\vec{A}_o(\vec{r}_0) = 0$).

Per calcolare esplicitamente la [V.57] nel caso di un filo rettilineo indefinito, scegliamo un sistema di riferimento cartesiano tale che un asse (ad esempio l'asse z) coincida con la direzione del filo. In tal caso si ha $d\vec{l}' = \hat{k}\, dz$ ($\hat{k}$ ≡ versore dell'asse z), e $\vec{r}' = \hat{k} z$, cosicché le proiezioni della [V.57] sugli assi sono

$$\begin{cases} A_{ox}(\vec{r}) = 0 \\ A_{oy}(\vec{r}) = 0 \\ A_{oz}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dz \left(\frac{1}{|\vec{r} - \hat{k}z|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \hat{k}z|} \right) \end{cases}$$

$A_{oz}(\vec{r})$ può essere calcolato in maniera del tutto analoga a come nell'esempio E.I.23 abbiamo calcolato $V_c(\vec{r})$; si ottiene in definitiva:

$$\begin{cases} A_{ox} = 0 \\ A_{oy} = 0 \qquad\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ A_{oz} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) \end{cases}$$

Applicando l'operatore rotore, è immediato verificare che si ottiene

$$B_{ox} = -\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)\left(\frac{y}{r^2}\right)$$
$$B_{oy} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)\left(\frac{x}{r^2}\right)$$
$$B_{oz} = 0$$

che non sono altro che la rappresentazione cartesiana della [V.21].

È da osservare che il fatto che $\vec{A}$ vada all'infinito logaritmicamente implica che le derivate che compaiono nelle componenti di $\vec{B}$ siano finite. Inoltre, in problemi di questo tipo, si può anche procedere calcolando come se il filo avesse lunghezza finita e poi facendo il limite per la lunghezza che va all'∞.

V.6. Interazioni fra circuiti percorsi da corrente stazionaria

Due circuiti l_1 ed l_2 percorsi da correnti I_1 e I_2 rispettivamente, esercitano l'uno sull'altro delle azioni meccaniche, dal momento che l'uno si trova nel campo magnetico generato dall'altro. L'applicazione delle formule di Laplace [V.1] e [V.19] porta ad esprimere la forza $d\vec{F}_{21}$ che si esercita sull'elemento $d\vec{l}_2$ di l_2 per effetto del campo $\vec{B}_{01}$ generato in P_2 dal circuito l_1, nella forma:

$$d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{01}(P_2) = I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{l_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \qquad [V.57]$$

dove per maggior chiarezza abbiamo indicato con $\vec{r}_{12}$ (anziché con $\Delta\vec{r}$ come nella [V.19]) la distanza P_1P_2, e con r_{12} il suo modulo.

Analogamente si ha che

$$d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_{02}(P_1) = I_1 d\vec{l}_1 \times \oint_{l_2} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \qquad [V.57.a]$$

(con $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$, e pertanto anche $r_{12} = r_{21}$).

Qualora i due circuiti siano rigidi, può interessare il calcolo della *forza risultante* agente sul circuito l_2 (e analogamente sul circuito l_1):

$$\vec{F}_{21} = \oint_{l_2}\left(I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{l_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{l_2}\oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \qquad [V.58]$$

L'integrale doppio di linea che compare in questa relazione può essere ridotto a forma più semplice usando l'identità vettoriale:

$$d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}) = (d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12})\, d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\, \vec{r}_{12}$$

Sostituendo questa relazione nella [V.58] si ha:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left[\oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12})\, d\vec{l}_1}{r_{12}^3} - \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\, \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right] \qquad \text{[V.59]}$$

Di questi integrali, il primo è nullo; infatti:

$$\oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \cdot d\vec{l}_1 = \oint_{l_1} d\vec{l}_1 \left(\oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$$

L'integrale fra parentesi è nullo perché rappresenta la circuitazione del campo vettoriale $\dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$ che, come mostrato dalla [I.57], è esprimibile come gradiente della funzione scalare $-1/r_{12}$ ed è dunque conservativo. La [V.59] si riduce pertanto a:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\, \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \qquad \text{[V.60]}$$

Nello scrivere questa relazione a partire dalla [V.59] abbiamo tenuto conto del fatto che $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$. La [V.60] mostra in particolare che scambiando gli indici 1 e 2 (cioè considerando la forza che il circuito l_2 esercita sul circuito l_1, anziché quella che l_1 esercita su l_2) la forza cambia semplicemente di segno, in accordo con quanto richiesto dal principio di azione e reazione.

In particolare, se consideriamo due fili rettilinei infinitamente lunghi e paralleli, posti a distanza r uno dall'altro, si trova immediatamente (integrando la [V.60] ovvero usando la [V.21]) che (se $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 > 0$):

$$\frac{d\vec{F}_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \hat{r}_{21} = -\frac{d\vec{F}_{12}}{dl_1} \qquad \text{[V.61]}$$

Questa forza è attrattiva (se $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 > 0$, cioè se le correnti sono concordi).

La [V.61] consente di dare una definizione operativa della unità di misura della corrente (Ampere): *si dice che due lunghi fili rettilinei e paralleli sono attraversati dalla corrente di un Ampere, quando, posti alla distanza di un metro, si scambiano una forza pari a* $\dfrac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7}$ *N per metro di filo*

Definizione operativa dell'Ampere

V.7. Trasformazioni relativistiche del campo elettrostatico e del campo magnetostatico

L'elettromagnetismo classico, le cui leggi stiamo via via introducendo in questo volume, è una teoria coerente coi principi della relatività ristretta: come abbiamo visto nel capitolo XI del testo di meccanica, ciò significa che le equazioni dell'elettromagnetismo sono covarianti per trasformazioni di Lorentz. Anzi, è stata

proprio l'esigenza di rendere relativisticamente covarianti le equazioni di Maxwell (che riassumono in sé le leggi dell'elettromagnetismo classico) la principale motivazione che ha spinto Einstein a sviluppare la sua teoria. La compatibilità fra elettromagnetismo classico e teoria della relatività ristretta verrà da noi discussa, in termini sistematici e completi, più avanti (vedi cap. IX); qui ci limitiamo ad anticipare le leggi di trasformazione di alcune delle grandezze fondamentali.

Invarianza relativistica della carica

Abbiamo già accennato che la carica elettrica è relativisticamente invariante: il suo valore (ad esempio il valore della carica elettrica di un elettrone) è lo stesso indipendentemente dalla velocità con cui essa si muove rispetto all'osservatore. Questa proprietà, richiesta per esigenze di generale coerenza interna della teoria, è confermata dall'evidenza sperimentale diretta e indiretta. È invece facile convincersi che non sono relativisticamente invarianti né la densità di carica ρ né la densità di corrente $\vec{J}$. Consideriamo infatti una certa distribuzione di carica. Per misurare la densità di carica, un osservatore fermo rispetto alla distribuzione di carica stessa prenderà un volumetto $d\tau_0 = dx_0\, dy_0\, dz_0$, e misurerà la carica dQ in esso contenuta; la densità di carica ρ_0 (*densità di carica a riposo*) è data da

Densità di carica a riposo

$$\rho_0 = \frac{dQ}{d\tau_0} = \frac{dQ}{dx_0\, dy_0\, dz_0}$$

Consideriamo invece ora un osservatore in movimento con velocità $\vec{V}$ rispetto al primo (e rispetto alla distribuzione di carica); per semplicità, supponiamo che si muova parallelamente all'asse x. La carica che egli misura internamente al volumetto considerato è sempre dQ (invarianza della carica); ma per il fenomeno di contrazione delle lunghezze, il lato dx che egli misura per l'elemento di volume è $dx = dx_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ (mentre $dy = dy_0$; $dz = dz_0$) dove c è la velocità della luce.

Legge di trasformazione della densità di carica

La densità di carica che egli misura vale dunque:

$$\begin{aligned}\rho = \frac{dQ}{d\tau} &= \frac{dQ}{dx\, dy\, dz} = \frac{dQ}{\sqrt{1 - V^2/c^2}\, dx_0\, dy_0\, dz_0} = \\ &= \frac{dQ}{d\tau_0}\,\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\end{aligned} \qquad [V.62]$$

Quanto alla densità di corrente $\vec{J}$, riferendoci per ora, per semplicità, al caso che essa sia dovuta a portatori di un sol segno, coerentemente con la definizione [IV.5] essa può essere scritta nella forma

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \qquad [V.63]$$

(infatti la quantità nq della [IV.5] rappresenta la carica posseduta dai portatori contenuti nell'unità di volume). Cambiando sistema di riferimento, $\vec{J}$ cambia dunque sia perché cambia la densità ρ, sia perché cambia la velocità di deriva $\vec{v}$.

È immediato verificare che $\vec{J}$ costituisce la parte spaziale di un quadrivettore la cui quarta componente è ρc; questo quadrivettore $\underline{J}$ è detto *quadrivettore densità di corrente*

Quadrivettore densità di corrente

$$\underline{J} \equiv (\vec{J}, \rho c) \qquad [V.64]$$

Tenuto conto della [V.62] e della [V.63], il quadrivettore densità di corrente $\underline{J}$ può essere esplicitato nella forma

$$\underline{J} = (\gamma\rho_0\vec{v}, \gamma\rho_0 c) \equiv (\vec{J}, \rho c) \qquad [V.65]$$

dove $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$; osserviamo che la velocità di deriva $\vec{v}$ è eguale e opposta alla velocità $\vec{V}$ (essendo pari alla velocità con cui nel sistema di riferimento conside-

rato si muove il sistema di riferimento in cui la distribuzione di carica dei portatori è mediamente ferma), e dunque

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Il fatto che la [V.65] costituisca un quadrivettore è dimostrato dalla sua analogia formale con il quadrivettore energia-impulso $\underline{P}$:

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \left(\frac{\rho_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \\ \underline{P} &= \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \end{aligned} \qquad [V.66]$$

Come per ogni altro quadrivettore il modulo quadro del quadrivettore densità di corrente è relativisticamente invariante:

$$J^2 = |\vec{J}|^2 - J_4^2 = \frac{\rho_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{\rho_0^2 c^2}{1 - v^2/c^2} = -\rho_0^2 c^2 \qquad [V.67]$$

Naturalmente, qualora nello spazio considerato siano presenti più tipi di portatori (ad esempio in un conduttore possono aversi portatori di carica positiva q_+ e portatori di carica negativa q_-) il quadrivettore densità di corrente totale $\underline{J}$ sarà pari alla somma delle densità di corrente relative ai vari tipi di portatori

$$\underline{J} = \underline{J}_+ + \underline{J}_- \qquad [V.68]$$

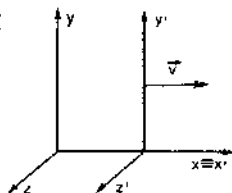
Ricordiamo ancora che il fatto che $\underline{J}$ si trasformi come un quadrivettore, significa che il suo valore $\underline{J}'$ in un sistema di riferimento $\Sigma' \equiv O'x'y'z'$ che si muova con velocità V (parallela all'asse $x \equiv x'$) rispetto al sistema $\Sigma \equiv Oxyz$, è legato al valore $\underline{J}$ che essa ha nel sistema Σ dalla trasformazione di Lorentz

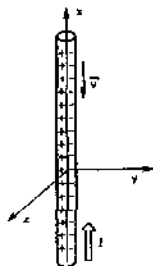
$$\underline{J}' = A\underline{J} \qquad [V.69]$$

dove A è la matrice di Lorentz

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \qquad [V.70]$$

con $\beta = \frac{V}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$; ovvero, esplicitamente:

$$\begin{aligned} J_1' &= \gamma J_1 - \beta\gamma J_4 \\ J_2' &= J_2 \\ J_3' &= J_3 \\ J_4' &= -\beta\gamma J_1 + \gamma J_4 \end{aligned} \qquad [V.71]$$

dove J_1, J_2, J_3 sono le componenti spaziali (secondo gli assi x, y, z rispettivamente) e J_4 la quarta componente (temporale); per cui tenendo conto della [V.65] le [V.71] possono essere poste anche nella forma

$$
\begin{aligned}
J'_x &= \frac{J_x - \rho V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma (J_x - \rho V) \\
J'_y &= J_y \\
J'_z &= J_z \\
\rho' &= \frac{\rho - (V/c^2) J_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma (\rho - (V/c^2) J_x)
\end{aligned}
\qquad [V.72]
$$

Vediamo ora le proprietà di trasformazione del campo elettrostatico E_0 e del campo magnetostatico B_0, cominciando con la discussione di un esempio semplice. In un certo sistema di riferimento inerziale, consideriamo un filo rettilineo indefinito percorso da corrente stazionaria I ($I = JS$, con S sezione del filo e J densità di corrente). Scegliamo un sistema di riferimento in modo che l'asse x sia parallelo al filo. Supponiamo che il filo sia elettricamente neutro: in ogni suo elementô di volume vi è cioè lo stesso numero di cariche positive e di cariche negative, ma mentre le cariche positive sono ferme quelle negative posseggono una velocità di deriva $\vec{v}$ in direzione opposta a quella della corrente.

Sappiamo allora che il filo non produce alcun campo elettrostatico mentre produce un campo magnetostatico $\vec{B}_0$ descritto dalla legge di Biot e Savart [V.21]. Una particella di carica q posta in sua vicinanza, se è ferma non subisce alcuna forza; mentre se si muove con velocità $\vec{V}$ è soggetta alla forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}_0$ (ad esempio, se la velocità $\vec{V}$ è parallela al filo, e dunque perpendicolare a $\vec{B}_0$, la particella subisce una forza radiale). Poniamoci ora in un sistema di riferimento $O'x'y'z'$ parallelo al precedente, ma dotato di velocità $\vec{V}$ pari a quella inizialmente posseduta dalla particella. La particella è inizialmente ferma. Se in questo sistema di riferimento fosse presente solo un campo magnetico $\vec{B}'_0$, la particella, non essendo sottoposta ad alcuna forza, continuerebbe a restare ferma; e ciò è contrario a quanto si osserva dal riferimento «fisso» $Oxyz$, e dunque viola il principio di relatività. Dunque ci aspettiamo che nel sistema di riferimento «mobile» $O'x'y'z'$ sia presente anche un campo elettrostatico $\vec{E}'_0$ (e precisamente un campo radiale). In base a questa semplice osservazione ci aspettiamo che passando da un sistema di riferimento all'altro un campo magnetico possa originare un campo elettrico e viceversa.

Questa conclusione è confermata da una analisi di come il filo, con le cariche che esso porta, appare quando esso viene osservato dai due diversi sistemi di riferimento. Essendo presenti sul filo sia cariche positive che cariche negative, il quadrivettore densità di corrente in esso presente può essere scritto nella forma

$$\underline{J} = \underline{J}_+ + \underline{J}_-$$

Nel sistema fisso, le cariche positive sono ferme (in media) e quelle negative si muovono con velocità media $\vec{v}$; per cui si ha

$$
\left.
\begin{aligned}
J_+ &\equiv (\vec{J}_+, c\rho_+) = (0,\ nqc) \\
J_- &\equiv (\vec{J}_-, c\rho_-) = (-nq\vec{v},\ -nqc)
\end{aligned}
\right|
\qquad [V.73]
$$

dove n è il numero di portatori per unità di volume (lo stesso per i portatori positivi e negativi, essendo il filo elettricamente neutro); $q_+ = q$ è la carica dei portatori positivi e $q_- = -q_+ = -q$ è quella dei portatori negativi. Il fatto che il filo sia elettricamente neutro è mostrato dal fatto che $\rho_- = -\rho_+$. Passando nel sistema

mobile, le due correnti si trasformano secondo la [V.72]; e tenuto conto che sono dirette secondo l'asse x (esse hanno nulle le componenti y e z) esse divengono rispettivamente

$$\begin{cases} J'_{+x} = -\rho V\gamma = -\gamma n q V \\ \rho'_{+} = \gamma\rho = \gamma n q \end{cases} \qquad \begin{cases} J'_{-x} = \gamma(-nqv + nqV) \\ \rho'_{-} = \gamma\left(-nq + nq\dfrac{vV}{c^2}\right) \end{cases}$$

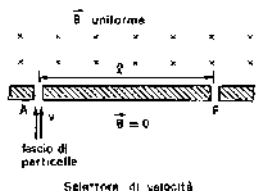
Poiché $\rho'_{-} \neq -\rho'_{+}$, visto dall'osservatore mobile il filo non è più elettricamente neutro; secondo quanto visto nell'esempio E.I.11 esso produce un campo elettrostatico radiale.

Le proprietà di trasformazione di $\vec{E}_0$ e $\vec{B}_0$ passando da un sistema di riferimento all'altro possono essere ricavate sia a partire dalle leggi di trasformazione delle sorgenti (così come noi abbiamo fatto nel semplice esempio testé discusso), sia a partire dalle leggi di trasformazione delle forze: considerato infatti che le leggi di trasformazione delle forze sono note (così come discusso nel capitolo XI del testo di meccanica, *dove nel paragrafo 8 abbiamo introdotto la forza di Minkowski*) così come è nota la legge di trasformazione delle velocità, confrontando l'espressione che la forza di Lorentz [V.5] assume in diversi sistemi di riferimento è possibile ricavare – in maniera concettualmente semplice e tutt'altro che laboriosa dal punto di vista algebrico – le leggi di trasformazione dei campi elettrostatico e magnetostatico. I risultati che si ottengono con questi due approcci sono fra di loro coincidenti, come è necessario affinché le leggi dell'elettromagnetismo siano covarianti per trasformazioni di Lorentz. Noi ci limitiamo qui a riassumere, nelle seguenti equazioni [V.74], i risultati che si ottengono; tanto più considerando che agli stessi risultati, espressi in forma più compatta e generale, arriveremo nel capitolo IX partendo dalle proprietà di trasformazione dei potenziali.

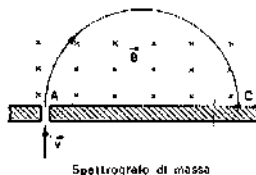
$$\begin{cases} E'_{0x} = E_{0x} \\ E'_{0y} = \gamma\,[E_{0y} - c\beta\,B_{0z}] \\ E'_{0z} = \gamma\,[E_{0z} + c\beta\,B_{0y}] \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_{0x} = B_{0x} \\ B'_{0y} = \gamma\,[B_{0y} + \beta\,E_{0z}/c] \\ B'_{0z} = \gamma\,[B_{0z} - \beta\,E_{0y}/c] \end{cases} \qquad [V.74]$$

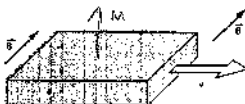
Ricordiamo che in queste relazioni $\beta = \dfrac{V}{c}$ e $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; il sistema $O'x'y'z'$ si muove con velocità V parallela all'asse x nel sistema $Oxyz$ orientato come il sistema $O'x'y'z'$.

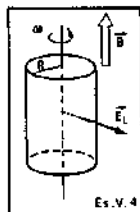
Esercizi del V capitolo

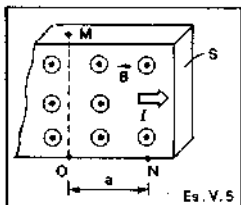
Selettore di velocità

V.1. Nel dispositivo schematizzato in figura un fascio monocromatico di particelle (cioè un insieme di particelle aventi la stessa velocità vettoriale $\vec{v}$) passa attraverso un forellino A praticato su uno schermo, incidendovi normalmente. La carica e la massa delle particelle costituenti il fascio siano q ed m rispettivamente. Dalla parte superiore rispetto allo schermo è presente un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ uniforme e perpendicolare alla direzione della velocità $\vec{v}$ delle particelle incidenti.
A che distanza l occorre praticare un foro F perché le particelle tornino nella zona inferiore dove il campo magnetico è nullo?

(Risposta: $l = 2\,m\,v/qB$)

Spettrografo di massa

V.2. Nel dispositivo mostrato in figura, un fascio è costituito da particelle aventi la stessa velocità $\vec{v}$ e la stessa carica q, ma aventi due possibili valori per la massa (per esempio un fascio monocromatico contenente due isotopi dello stesso elemento). Il fascio incide normalmente su uno schermo piano e passa attraverso un forellino A in esso praticato. Nel semispazio superiore allo schermo è presente un campo magnetico di vettore induzione magnetica $\vec{B}$ uniforme e perpendicolare alla direzione del fascio.
Se la specie più leggera incide sullo schermo in un punto C a distanza l dal forellino A, di quanto sarà spostato rispetto a C il punto D di incidenza della specie più pesante, se Δm è la differenza di massa?

(Risposta: $\Delta l = l\,\Delta m/m$)

V.3. In una zona di campo magnetico uniforme, con $B = 1{,}5$ T, si muove di moto traslatorio uniforme una lastra di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo. La velocità $\vec{v}$ della lastra ha modulo $v = 5$ m/s ed è diretta perpendicolarmente a $\vec{B}$. Se la costante dielettrica relativa della lastra è $\varepsilon_r = 4$, calcolare la densità delle cariche di polarizzazione che, per effetto del moto, si manifestano sulla lastra.

(Risposta: $\sigma_p = 6{,}65 \cdot 10^{-11}$ C/m²)

V.4. Un cilindro rigido di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa ε_r, ha raggio R e ruota con velocità angolare ω costante intorno al suo asse. Il cilindro è immerso in un campo magnetico uniforme di induzione magnetica $\vec{B}$ parallela all'asse di rotazione.
Ricavare l'espressione della densità superficiale σ_p delle cariche di polarizzazione sul mantello esterno del cilindro e l'espressione della densità di volume ρ_p delle cariche di polarizzazione all'interno del cilindro.

(Risposte: $\sigma_p = \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) \omega B R$; $\rho_p = -2\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) \omega B$)

V.5. Una corrente stazionaria I scorre con distribuzione uniforme in un conduttore omogeneo, di resistività ρ ed n portatori per unità di volume, sagomato a forma di nastro di larghezza h e sezione di area S uniformi.
È presente un campo magnetico di vettore induzione magnetica $\vec{B}$ uniforme e perpendicolare al piano del nastro.
Ricavare l'espressione della differenza di potenziale che si stabilisce tra i punti M ed N situati come mostrato in figura.

(Risposta: $V_M - V_N = \frac{I}{S}\left(\rho\,a - \frac{B\,h}{n\,q}\right)$)

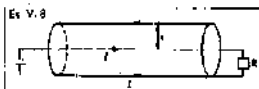
V.6. Una superficie sferica di raggio R porta una carica elettrica uniformemente distribuita con densità superficiale di carica σ.
La sfera ruota intorno ad un suo diametro con velocità angolare ω. Ricavare l'espressione del momento magnetico della sfera.

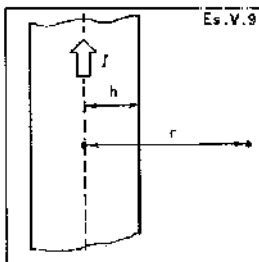
(Risposta: $m = \frac{4}{3}\pi R^4 \sigma\omega$)

V.7. Una sfera di raggio R ha una carica Q uniformemente distribuita sul suo volume e ruota intorno ad un suo diametro con velocità angolare ω.
Calcolare il momento magnetico della sfera.

(Risposta: $m = \frac{1}{5} Q\omega R^2$)

V.8. Un cavo coassiale nel vuoto è costituito schematicamente da un conduttore filiforme centrale e da un sottile tubo conduttore coassiale a tale filo. Quando il cavo è alimentato e chiuso su un carico R, una corrente I circola in un verso nel conduttore centrale e nel verso opposto nel conduttore cilindrico esterno.
Indicando con r il raggio del sottile conduttore cilindrico esterno, calcolare la forza per unità di superficie che si esercita su tale conduttore esterno per effetto del solo conduttore filiforme centrale.

(Risposta: $\frac{dF}{dS} = \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$)

V.9. Un nastro conduttore rettilineo, di piccolo spessore e molto lungo, di larghezza $(2h)$, è percorso da una corrente stazionaria I, uniformemente distribuita sulla sezione del nastro.
Ricavare l'espressione del campo $\vec{B}$, nel vuoto, in un punto del piano individuato dal nastro, a distanza r dalla retta di mezzeria del nastro, nel caso in cui la distanza r sia molto maggiore della larghezza del nastro. Calcolare l'errore percentuale che si commette assumendo valida l'espressione di Biot e Savart B_{BS}, relativa al caso di filo rettilineo [V.21], cioè calcolare il rapporto $(B - B_{BS})/B_{BS}$, nel caso in cui la distanza r sia il doppio della larghezza della striscia $(r = 4h)$.

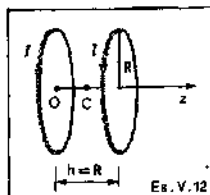
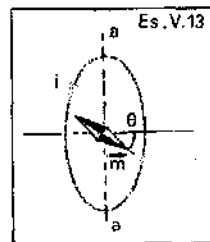
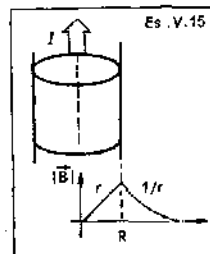
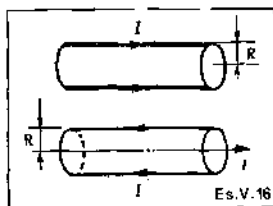
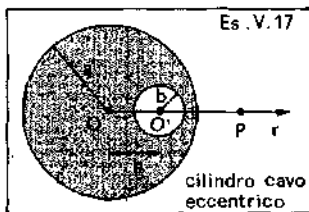
(Risposta: -2%)

V.10. Una superficie sferica di raggio R porta una carica elettrica uniformemente distribuita con densità superficiale σ.
La sfera ruota intorno ad un suo diametro con velocità angolare ω. Ricavare l'espressione del campo $\vec{B}$ al centro della sfera (nel vuoto).

(Risposta: $B = \frac{2}{3}\mu_0 R\sigma\omega$)

V.11. Una carica elettrica Q è distribuita uniformemente su un disco isolante di raggio R. Il disco ruota nel vuoto intorno al suo asse con velocità angolare ω.
Quanto vale il campo $\vec{B}$ al centro del disco?

(Risposta: $B = \frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi R}$)

Bobine di Helmoltz

V.12. Per produrre campi magnetici abbastanza uniformi in piccole regioni di spazio si può usare un dispositivo costituito da due spire circolari uguali, aventi raggio R, disposte coassialmente e distanti $h = R$, percorse entrambe da correnti I uguali e concordi. A tale dispositivo si dà il nome di *bobine di Helmoltz*.

Calcolare, nel vuoto, il valore del campo B_C nel punto centrale C del sistema.
Per valutare B in un punto dell'asse z (vedi figura) sviluppare B in serie e calcolare il contributo dei termini del primo (B_1) e secondo (B_2) ordine in z (sempre nell'ipotesi che sia $h = R$).

(Risposte: $B_C = 9 \cdot 10^{-7}\,(I/R)$; $B_1 = 0$; $B_2 = 0$)

V.13. Una spira circolare fissa, disposta nel vuoto su un piano verticale, ha raggio R ed è percorsa da una corrente i. Al centro della spira è disposto un piccolo ago magnetico libero di ruotare senza attrito su un piano orizzontale intorno ad un asse aa posto su un diametro della spira. Il momento magnetico dell'ago è $\vec{m}$ ed il suo momento d'inerzia rispetto all'asse aa vale I.
Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni dell'ago, assumendo che l'ago sia abbastanza piccolo da poter considerare uniforme il campo $\vec{B}$ nella zona in cui l'ago si muove.

(Risposta: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2IR}{\mu_0 m i}}$)

V.14. Un lungo filo rettilineo percorso da corrente I è disposto, nel vuoto, lungo l'asse z di un riferimento cartesiano.
Ricavare le espressioni esplicite delle componenti di $\vec{B}$ in un punto generico del piano (x, y), il cui vettore posizione sia $\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y$ e, ponendo $\vec{I} = I\hat{k}$ (con $\hat{k}$ versore dell'asse z), dimostrare che si può scrivere:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2}(\vec{I} \times \vec{r})$$

V.15. Una corrente stazionaria I scorre con densità uniforme in un cilindro conduttore molto lungo, avente raggio R, posto nel vuoto.
Ricavare l'espressione del campo $\vec{B}$ in funzione della distanza dall'asse del cilindro, assumendo che il conduttore, al suo interno, abbia praticamente la stessa permeabilità magnetica del vuoto (μ_0).

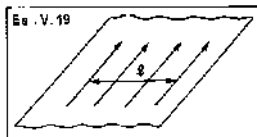
V.16. Una corrente I passa in un lungo conduttore rettilineo sagomato a forma di tubo sottile di raggio R (cilindro cavo). Il conduttore è posto nel vuoto. Calcolare il campo di induzione magnetica all'interno ed all'esterno del tubo conduttore. Ripetere il calcolo del caso di un cavo coassiale in cui la corrente I circoli in un verso nel conduttore filiforme centrale (di raggio a) e nel verso opposto nel conduttore cilindrico esterno.

V.17. La sezione di un conduttore cilindrico rettilineo, di grande lunghezza, ha l'aspetto mostrato in figura. Si tratta di sezione circolare di raggio a e centro O, alla quale manca un cerchio di raggio b e centro O'. Se I è la corrente stazionaria, a densità uniforme, che scorre nel cilindro, ed h la distanza OO', calcolare il campo di induzione magnetica B sull'asse r che congiunge O con O', nei punti P ($r_P > a$) ed O'.

V.18. Supponiamo di aver prodotto, nel vuoto, un certo tratto di fascio cilindrico, a densità uniforme, di elettroni animati da una comune velocità $\vec{v}$. Uno degli elettroni che sia in movimento lungo una generatrice del cilindro considerato (assimilabile ad una corrente continua in un conduttore cilindrico rettilineo) risulta così sottoposto ad una forza elettrostatica F_E repulsiva e ad una forza magnetica F_M attrattiva. Quale delle due forze è prevalente?

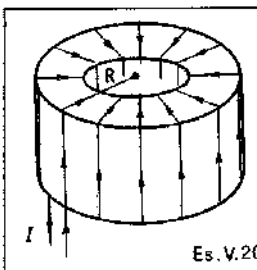
(Risposta: $|F_E|/|F_M| = [1/\varepsilon_0\mu_0 v^2] > 1$)

V.19. Una corrente stazionaria scorre uniformemente su una lastra conduttrice di piccolo spessore e molto estesa (*lamina piana indefinita*), con densità lineare di corrente J_L (espressa in A/m, nel senso che, in un tratto di lamina di larghezza l passa una corrente $i = J_L \cdot l$). Nell'ipotesi che la lamina sia nel vuoto, ricavare l'andamento nello spazio del campo di induzione magnetica $\vec{B}$.

(Risposta: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 J_L}{2}$)

V.20. Su una superficie torica a sezione rettangolare, di raggi interno R ed esterno $(R + \Delta R)$, sono avvolte uniformemente N spire percorse da corrente I (solenoide torico). Supponendo di essere nel vuoto, esprimere il campo $B(r)$ in un punto interno al toro, a distanza $r\,(R < r < R + \Delta R)$ dall'asse di simmetria e la massima differenza percentuale di B all'interno del solenoide torico considerato (valutare cioè la quantità:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B(R) - B(R + \Delta R)}{B(R)} \text{)}$$

Quanto vale il campo $\vec{B}$ all'esterno del solenoide torico?

(Risposta: $B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$; $\frac{\Delta B}{B} = 1 - \frac{R}{R + \Delta R}$)

Es. V.20

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del V capitolo

V.1. Le caratteristiche della traiettoria delle particelle sono state studiate nell'esempio E.V.1..

V.2. Procedere come nell'esercizio V.1 per ciascuna delle specie di particelle costituenti il fascio.

V.3. Sulle cariche del dielettrico si esercita un campo di Lorentz $\vec{E}_L = \vec{v} \times \vec{B}$. Nascono fenomeni di polarizzazione che producono un campo elettrostatico $\vec{E}_P$ che si somma ad $\vec{E}_L$ nel determinare l'assetto delle cariche elettriche del dielettrico.

V.4. La forza di Lorentz, che agisce sulle cariche del dielettrico in moto con velocità angolare ω su traiettorie circolari di raggio variabile tra O ed R, costituisce un campo $\vec{E}_L$ radiale che polarizza il dielettrico.

V.5. I portatori di carica si muovono per effetto di un campo elettrico esterno $\vec{E}$ (dovuto, per esempio, ad un generatore di f.e.m.) con velocità $\vec{v}$. La forza di Lorentz che agisce su di essi produce accumuli di carica di segno opposto sulle due facce alta e bassa del nastro e pertanto, all'equilibrio, genera un campo elettrico statico E_S trasversale al nastro uguale ed opposto al campo di Lorentz $E_L = vB$. Longitudinalmente al nastro è presente il campo elettrico E che sostiene il passaggio di corrente. La d.d.p. $(V_M - V_N)$ si calcola tenendo conto di entrambi i contributi E_S ed E.

V.6. Decomporre la sfera in strati di spessore infinitesimo perpendicolari all'asse di rotazione. Ciascuno di questi strati corrisponde ad una spira circolare percorsa da corrente infinitesima. Il momento magnetico elementare di questa spira è ricavabile tramite la relazione [V.9]. Il momento magnetico complessivo si ottiene integrando su tutta la sfera.

V.7. Considerare un elemento infinitesimo di volume $d\tau$ (per esempio in coordinate sferiche) e la corrente che esso genera nel suo moto circolare a velocità angolare ω. Calcolare il momento magnetico associato a tale corrente elementare ed integrare su tutto il volume della sfera.

V.8. Decomporre la corrente che passa nel cilindro esterno in elementi infinitesimi filiformi di corrente paralleli e discordi rispetto alla corrente I del conduttore centrale. Valutare le relative forze magnetiche e calcolare la forza per unità di superficie (direzione, verso e modulo).

V.9. Procedere come nell'esempio E.V.11 e poi sviluppare al primo ordine per $r \gg h$.

V.10. Decomporre la superficie sferica in strati di spessore infinitesimo, disposti su piani perpendicolari all'asse di rotazione. Ciascuno di questi strati corrisponde ad una spira circolare percorsa da corrente infinitesima il cui campo $d\vec{B}$ al centro della sfera può essere calcolato secondo la [V.22]. Il campo $\vec{B}$ si ottiene integrando tutti questi contributi infinitesimi.

V.11. Riferirsi all'esempio E.V.7 per la schematizzazione ed alla [V.23] per il campo $\vec{B}$ al centro di una spira circolare.

V.12. Calcolare il campo sull'asse z tenendo conto del principio di sovrapposizione e della relazione [V.22] per il campo $\vec{B}$ sull'asse di una spira circolare percorsa da corrente.

V.13. Esprimere il momento meccanico attivo sull'ago ed applicare la seconda equazione cardinale della meccanica dei corpi rigidi girevoli intorno ad asse fisso.

V.14. Utilizzando la legge di Biot e Savart ricavare le componenti B_x e B_y e confrontarle con l'espressione di $\vec{B}$ indicata nel testo.

V.15. Utilizzare il teorema della circuitazione di Ampere [V.33] traendo vantaggio dalla situazione di simmetria cilindrica del problema.

V.16. Utilizzare il teorema di Ampere tenendo conto della simmetria cilindrica.

V.17. La distribuzione di corrente data è equivalente alla sovrapposizione di una corrente *della stessa densità J della* corrente data I, passante per un cilindro pieno a sezione di centro O e raggio a, e di una corrente di densità $(-J)$, scorrente in verso opposto rispetto ad I in un cilindro di sezione circolare di centro O' e raggio b. Applicare il principio di sovrapposizione.

V.18. Assimilare il fascio ad una corrente cilindrica e calcolare il campo elettrico e quello magnetico in un punto della superficie del cilindro stesso.

V.19. La simmetria piana della configurazione di corrente implica che il campo $\vec{B}$ abbia direzione parallela alla lamina e versi opposti nei due semispazi in cui la lamina suddivide lo spazio. Inoltre $\vec{B}$ deve assumere lo stesso valore in punti equidistanti dalla lamina.

V.20. Applicare il teorema della circuitazione di Ampere tenendo conto delle caratteristiche di simmetria cilindrica del sistema.

Capitolo sesto

Magnetismo nella materia

VI.1. Considerazioni introduttive generali

Quando della materia viene posta in una regione di spazio in cui sia presente un campo magnetico, essa ne subisce un'azione meccanica e contemporaneamente modifica il campo stesso. Sotto questo profilo generale, la situazione non è dissimile dal caso che si presenta quando un dielettrico viene posto in un campo elettrostatico.

Sostanze ferromagnetiche, paramagnetiche e diamagnetiche

Quando si analizza il comportamento di materia in campo magnetico, emergono immediatamente delle differenziazioni che permettono di individuare tre famiglie di sostanze. Supponiamo, per esempio, di inserire parzialmente in un solenoide percorso da corrente dei campioni cilindrici di materiali diversi. Alcune sostanze (come ferro, cobalto, nichel, ecc.) vengono attratte con una forza molto intensa (dell'ordine della forza peso o più) verso l'interno del solenoide: queste sostanze vengono dette *ferromagnetiche*. Altre sostanze, risucchiate anch'esse verso l'interno del solenoide, sono però attratte da una forza di molti ordini di grandezza inferiore rispetto al caso di sostanze ferromagnetiche: queste sostanze sono dette *paramagnetiche* (alluminio, platino, cromo, ecc.). Altre sostanze infine (cloruro di sodio, rame, piombo, zolfo, carbonio, argento, ecc.), soggette a forze dello stesso ordine di grandezza rispetto alle sostanze paramagnetiche, sono però respinte anziché attratte: queste sostanze sono dette *diamagnetiche*.

Analogia fra polarizzazione magnetica e polarizzazione elettrica

L'interpretazione teorica dei fenomeni di magnetismo nella materia si basa sul più volte citato *teorema di equivalenza di Ampere* (1820) secondo cui, a grande distanza, una spira percorsa da corrente si comporta come un dipolo magnetico. Gli elettroni, che nel modello planetario dell'atomo orbitano intorno al nucleo, sono assimilabili in sostanza a spire microscopiche percorse da corrente (correnti microscopiche); e dunque ognuno di essi equivale a un dipolo magnetico. In assenza di campo magnetico locale internamente alla materia, tutti questi dipoli microscopici sono orientati casualmente: il loro risultante, eseguito su un volumetto qualunque di materiale, è pertanto nullo, e il materiale non genera alcun effetto magnetico macroscopico. In presenza però di un campo magnetico locale nella

materia, si generano dei fenomeni di polarizzazione: innanzitutto per orientamento, ma, come vedremo, anche a causa di fenomeni diversi. Il momento magnetico risultante di ogni porzione di materiale allora non è più nullo, e si presentano pertanto sia delle alterazioni del campo magnetico esterno che delle azioni meccaniche sul materiale da parte del campo esterno stesso.

Correnti microscopiche

Formalmente, la presenza della materia introduce nelle equazioni della magnetostatica solo una modifica assai semplice rispetto al caso del vuoto: nella equazione [V.34] tutto va come se si trattasse ancora di spazio vuoto con correnti di conduzione e con tanti circuiti microscopici di natura atomica, cioè accanto alla densità di corrente macroscopica $\vec{J}$ compare anche la densità $\vec{J}_m$ delle correnti microscopiche atomiche. In presenza di materia, le equazioni della magnetostatica divengono pertanto:

Equazioni fondamentali della magnetostatica in presenza di materia

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_m) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_m) \end{cases} \qquad \text{[VI.1]}$$

La difficoltà sta nel fatto che mentre la *densità* $\vec{J}$ *delle correnti macroscopiche* è di solito nota, lo stesso non si può dire della corrente microscopica $\vec{J}_m$; cosicché le [VI.1] non sono di grande utilità pratica.

Per poter risolvere tali equazioni, è dunque necessario trovare una relazione che leghi $\vec{J}_m$ (opportunamente mediata, nel tempo e nello spazio, in modo da renderla congruente con la risoluzione temporale e spaziale degli strumenti di misura impiegati) a una grandezza macroscopica misurabile e dunque direttamente o indirettamente nota.

A tale scopo, introdurremo nel par. VI.3 il vettore polarizzazione magnetica $\vec{M}$ (analogo al vettore polarizzazione elettrica $\vec{P}$ introdotto nel caso dei dielettrici) e determineremo la relazione che lega $\vec{M}$ a $\vec{J}_m$. Usando tale relazione, le [VI.1] si trasformano in equazioni differenziali che esprimono $\vec{B}$ in funzione delle grandezze macroscopiche $\vec{J}$ ed $\vec{M}$. Qualora la polarizzazione magnetica $\vec{M}$ (oltre alla corrente macroscopica $\vec{J}$) sia esplicitamente nota, tali equazioni consentono – date le condizioni al contorno – di determinare il *campo di* induzione magnetica $\vec{B}$. Questa situazione si presenta però solo piuttosto raramente. In realtà la polarizzazione magnetica $\vec{M}$ dipende dal campo di induzione magnetica $\vec{B}$ in cui il materiale considerato è immerso. Determineremo pertanto la dipendenza di $\vec{M}$ dal campo di induzione magnetica $\vec{B}$. Prima, con considerazioni microscopiche, vedremo come $\vec{M}$ dipende dal campo locale $\vec{B}_l$ presente internamente al materiale; e poi troveremo la relazione fra il campo locale $\vec{B}_l$ e il campo $\vec{B}$ misurabile macroscopicamente internamente al materiale stesso. Una volta nota la relazione $\vec{M} = \vec{M}(\vec{B})$, le [VI.1] si trasformano in equazioni differenziali che legano $\vec{B}$ alla sola corrente macroscopica $\vec{J}$. A parte le difficoltà matematiche, tali equazioni consentono allora di determinare $\vec{B}$ internamente ad ogni zona di materiale omogeneo; ciò a patto che siano note le condizioni al contorno. Come nel caso dei dielettrici, quando lo spazio interessato al problema comprenda più materiali diversi (escludendo cioè solo il caso che un unico materiale riempia uniformemente tutto lo spazio) nelle superfici di separazione fra materiali diversi le condizioni al contorno si esprimono nella forma di *condizioni di raccordo*, che ci dicono come il campo magnetico varia passando da un materiale all'altro.

È questa, sostanzialmente, la traccia che si segue per sviluppare la teoria della magnetostatica nei mezzi materiali; ed è anche la traccia dei ragionamenti che noi svilupperemo nel presente capitolo.

Come nel caso dei dielettrici, la nostra trattazione si limiterà sostanzialmente ai materiali omogenei e isotropi, salvo un breve cenno – attraverso alcuni specifici esempi – ai circuiti magnetici. Una trattazione sistematica dei mezzi anisotropi e/o non omogenei comporterebbe infatti difficoltà non commisurate agli obiettivi di un corso di natura generale come quello sviluppato nel presente testo.

VI.2. Generalità sugli aspetti atomici del magnetismo

Prima di iniziare la trattazione del magnetismo nella materia in condizioni stazionarie, secondo la traccia delineata nel precedente paragrafo, introduciamo alcune semplici nozioni relative al comportamento, in campo magnetico esterno, di un atomo. Ci rifaremo, come abbiamo già accennato, al modello planetario alla Rutherford, secondo cui l'atomo consta di un nucleo massivo dotato di carica positiva Ze^+ (Z: numero atomico; e^+: carica del protone, uguale al modulo di quella e^- dell'elettrone; indicheremo semplicemente con e il modulo comune di e^+ ed e^-) intorno a cui, attratti dalla forza coulombiana, orbitano su orbite ellittiche, in condizioni stazionarie, Z elettroni. Tenuto conto della analogia formale fra la forza di Coulomb e quella gravitazionale, l'atomo di Rutherford è dunque assimilabile a un sistema solare in miniatura. È noto, e noi torneremo su questo punto nel capitolo XII, che sistemi di dimensioni geometriche così piccole come i sistemi atomici (dell'ordine di 10^{-10} metri) non possono essere trattati con la meccanica classica, ma è necessario ricorrere alla meccanica quantistica. Dunque il modello di Rutherford è drasticamente approssimato: tuttavia esso riesce a dar conto di diversi aspetti rilevanti della fenomenologia.

Consideriamo, per semplicità, un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale, e supponiamo che l'orbita dell'elettrone sia circolare. Indicando con r_0 il raggio dell'orbita, con $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg la massa dell'elettrone, con $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C la carica dell'elettrone, con ω_0 la velocità angolare e con $T_0 = 2\pi/\omega_0$ il periodo di rivoluzione, tenuto conto dell'espressione della forza di Coulomb $F_c = e^2/4\pi\varepsilon_0 r_0^2$, l'equazione del moto dell'elettrone si scrive classicamente (considerato che la sua massa è molto minore di quella del protone):

$$\vec{F}_c = m_e \vec{a} \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} = m_e \omega_0^2 r_0 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} m_e r_0 \qquad \text{[VI.2]}$$

Periodo T_0 dell'elettrone nell'atomo di idrogeno

da cui

$$T_0 = \frac{4\pi}{e}\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r_0^3} \qquad \text{[VI.3]}$$

Il raggio r_0 dell'orbita può essere valutato a partire da una misura del lavoro di ionizzazione dell'atomo di idrogeno, cioè dell'energia che deve essere fornita all'elettrone per strapparlo dall'orbita e portarlo all'infinito. Tenuto conto infatti che all'infinito l'elettrone ha, da fermo, energia nulla, il lavoro di ionizzazione L_i deve essere uguale in modulo all'energia totale E_T (negativa) che l'elettrone ha quando è legato all'atomo, in modo che sia $L_i + E_T = 0$. Dunque:

$$L_i = -E_T = -\left(\frac{1}{2} m_e v_0^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\right)$$

Tenuto conto della [VI.2], si ha

$$\frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 r_0^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_0};$$

Lavoro di ionizzazione dell'atomo di idrogeno

per cui l'espressione precedente diviene

$$L_i = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_0} \qquad [VI.4]$$

Sperimentalmente, il lavoro di ionizzazione L_i risulta essere

$$L_i = 13{,}5 \text{ eV (elettronvolt)} = 13{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

da cui si ricava

Raggio dell'orbita elettronica nell'atomo di idrogeno

$$r_0 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L_i} = 0{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0{,}5 \text{ Å}$$

Con tale valore di r_0, il periodo T_0 dalla [VI.3] risulta pari a

$$T_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-16} \text{ sec}$$

Un elettrone orbitante con periodo T_0, comporta che attraverso ogni punto dell'orbita passi una *carica* e^- $(1/T_0)$ volte al secondo; e ciò equivale a una corrente atomica I_a pari a:

Corrente equivalente sull'orbita atomica

$$I_a = \frac{e}{T_0} \approx 1 \text{ mA}$$

Il momento magnetico associato alla spira atomica, alla quale un atomo di idrogeno può essere assimilato, vale dunque:

$$m = I_a S = I_a \pi r_0^2 = \frac{e}{T_0}\pi r_0^2 = 9{,}35 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2 \qquad [VI.5]$$

Questo valore del momento magnetico, benché ricavato con considerazioni classiche, è in buon accordo con le misure sperimentali.

Osserviamo che il momento magnetico $\vec{m}$ dovuto al moto orbitale dell'elettrone è proporzionale al momento angolare $\vec{L}$ che esso ha rispetto al nucleo. Si ha infatti:

$$\vec{L} = \vec{r}_0 \times m_e \vec{v}_0$$

$\vec{L}$, così come $\vec{m}$, è ortogonale all'orbita; considerato però che la carica e^- dell'elettrone è negativa, la corrente orbitale ha verso opposto rispetto alla velocità $\vec{v}_0$ dell'elettrone, $\vec{m}$ ed $\vec{L}$ *risultano* pertanto fra di loro *antiparalleli*. Quanto al modulo L di $\vec{L}$ si ha:

$$L = m_e v_0 r_0 = m_e\left(\frac{2\pi r_0}{T_0}\right) r_0 = 2\pi m_e \frac{r_0^2}{T_0}$$

Per confronto con la [VI.5], vediamo che $m/L = e/2m_e$; ovvero anche, vettorialmente:

Rapporto fra momento magnetico e momento angolare orbitali dell'elettrone

$$\vec{m} = \frac{(e^-)}{2m_e}\vec{L} \qquad [VI.6]$$

Nella [VI.6], il fatto che $\vec{m}$ è antiparallelo a $\vec{L}$ è contenuto nel fatto che la carica e^- dell'elettrone è negativa. Osserviamo che il rapporto fra $\vec{m}$ ed $\vec{L}$ dipende solo da proprietà intrinseche dell'elettrone (carica e massa). In generale, il rapporto fra momento magnetico m e momento angolare L per un sistema qualunque è detto *fattore giromagnetico* g:

Fattore giromagnetico g

$$g = \frac{m}{L} \qquad [VI.7]$$

Il fatto che il *fattore giromagnetico* di un elettrone orbitale valga

$$g_0 = \frac{(e^-)}{2\,m_e} \qquad \text{[VI.8]}$$

da noi ricavato con considerazioni classiche per l'atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale, è in realtà una conclusione di validità generale in meccanica quantistica, applicabile al momento orbitale di elettroni appartenenti a qualunque sistema atomico.

Inoltre, come vedremo meglio nel cap. XII, in meccanica quantistica il momento angolare orbitale di un elettrone in qualunque sistema atomico può assumere solo valori che siano multipli interi di una costante universale $\hbar$:

Costante di Planck
$h = 6{,}62617 \cdot 10^{-34}$ J · s

$$L = l\hbar = l\left(\frac{h}{2\pi}\right) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{[VI.9]}$$

La costante h vale 6,62617 · 10^{-34} Joule · secondo; essa è detta *costante di Planck*. Il numero intero l è detto *numero quantico orbitale*. Tenendo conto della [VI.6], in meccanica quantistica il momento magnetico orbitale di un elettrone può assumere solo valori che siano multipli interi della quantità $m_B = \dfrac{(e^-)}{2\,m_e}\hbar$ detta *magnetone di Bohr*

Numero quantico orbitale

Magnetone di Bohr
$m_B = (e/2\,m_e)\,\hbar$

$m_B = 0.9274078 \cdot 10^{-23}$ A m^2

$$m = l\,m_B = \frac{l\,(e^-)\,\hbar}{2\,m_e} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{[VI.10]}$$

Il momento magnetico dei sistemi atomici non è però dovuto solo al momento orbitale degli elettroni nel loro moto di rivoluzione intorno al nucleo. I costituenti dell'atomo (protone, neutrone ed elettrone) sono infatti dotati anche di un *momento proprio* (sia di un momento magnetico che di un momento angolare) come se si trattasse di sferette, aventi una distribuzione spaziale di carica e di massa, ruotanti intorno ad un asse baricentrale. Al momento proprio o intrinseco (sia esso il momento angolare, o il momento di dipolo magnetico) si dà il nome di *momento di spin* (dall'inglese «spin» = trottola). È un fatto sperimentale che il momento angolare di spin $\vec{s}$ sia lo stesso per elettrone, protone e neutrone, e valga $\hbar/2$:

Momento angolare di spin

$$\textit{per elettrone, protone e neutrone:} \quad |\vec{s}| = \frac{\hbar}{2} \qquad \text{[VI.11]}$$

Benché il momento angolare di spin sia lo stesso per queste tre particelle, il loro momento magnetico intrinseco non è lo stesso, perché è diverso il loro fattore giromagnetico intrinseco che, sperimentalmente, risulta essere rispettivamente

Fattore giromagnetico intrinseco di elettrone protone e neutrone

elettrone $\quad g_e = 2\left(\dfrac{e^-}{2\,m_e}\right) \quad$ (negativo)

protone $\quad g_p = 2{,}79\left(\dfrac{e^+}{2\,m_p}\right) \quad$ (positivo) $\qquad \vec{m} = g\,\vec{s}$

neutrone $\quad g_n = 1{,}91\left(\dfrac{e^-}{2\,m_p}\right) \quad$ (negativo)

dove m_e è la massa dell'elettrone e m_p la massa del protone.

Pertanto, tenendo conto della [VI.11], il rispettivo momento magnetico intrinseco vale:

Momento magnetico intrinseco

$$\text{elettrone} \quad \mu_e = \frac{(e^-)\hbar}{2m_e} \qquad \text{antiparallelo allo spin}$$

$$\text{protone} \quad \mu_p = \frac{(e^+)\hbar}{2m_p}\left(\frac{2{,}79}{2}\right) \qquad \text{parallelo allo spin}$$

$$\text{neutrone} \quad \mu_n = \frac{(e^-)\hbar}{2m_p}\left(\frac{1{,}91}{2}\right) \qquad \text{antiparallelo allo spin}$$

Osserviamo che il momento magnetico intrinseco dell'elettrone è pari a un magnetone di Bohr; è cioè pari al momento magnetico orbitale dell'elettrone nello stato fondamentale dell'idrogeno. Considerato che la massa del protone è quasi 2000 volte più grande di quella dell'elettrone, il momento magnetico intrinseco dei nucleoni (protone e neutrone) è di circa tre ordini di grandezza più piccolo rispetto a quello dell'elettrone, e il suo contributo può essere di solito trascurato nella maggior parte delle considerazioni sugli effetti magnetici nella materia.

Il momento magnetico di ogni atomo si ottiene come somma vettoriale dei momenti orbitali e dei momenti di spin. Nel fare ciò, vanno peraltro tenute in conto precise regole stabilite dalla meccanica quantistica, e in particolare le seguenti:

Principio di esclusione di Pauli

Principio di esclusione di Pauli. In un sistema atomico, non possono coesistere più di due elettroni nello stesso stato orbitale; e in questo caso, i loro spin devono essere antiparalleli.

Quantizzazione della proiezione del momento angolare

Quantizzazione della proiezione del momento angolare: la proiezione lungo un asse (e in particolare lungo la direzione di un eventuale campo magnetico esterno) del momento angolare orbitale può assumere solo i valori multipli interi di $\hbar$ compresi fra $-l\hbar$ e $+l\hbar$; mentre lo spin degli elettroni e dei nucleoni può disporsi solo parallelamente o antiparallelamente a tale direzione.

Dalla combinazione, con queste regole, dei momenti magnetici orbitali e di spin, molti atomi – dotati di una distribuzione spaziale simmetrica – risultano avere momento di dipolo magnetico nullo; e questa conclusione è confermata dalle misure sperimentali. Anche quando il momento magnetico atomico è diverso da zero, di regola in assenza di campo magnetico esterno l'orientamento del momento dei vari atomi è del tutto casuale, cosicché ogni porzione macroscopica di materia ha momento magnetico risultante nullo. Come vedremo meglio in seguito, questa regola ammette eccezione nel caso di alcuni materiali (ferromagnetici), per i quali una volta indotto, ad opera di un campo magnetico esterno, un orientamento privilegiato dei momenti magnetici elementari, tale orientamento permane in certa misura anche togliendo il campo esterno; e allora il materiale mantiene un momento magnetico non nullo anche senza bisogno di un campo magnetico esterno orientante (*magneti permanenti*).

In ogni caso, pur con forti differenziazioni – che approfondiremo più avanti – per i vari tipi di materiali (dia-, para-, o ferro-magnetici), un campo magnetico esterno ha l'effetto di indurre un momento magnetico risultante non nullo nel materiale.

VI.3. Polarizzazione magnetica e sue relazioni con le correnti microscopiche

La materia in campo magnetico può essere pensata come un insieme di atomi o molecole dotati di momento magnetico complessivo non nullo. Ciò equivale a pensare all'esistenza, nella materia, di correnti atomiche microscopiche.

Seguendo la traccia delineata nel par. VI.1, introdurremo ora il vettore *intensità di magnetizzazione* o *di polarizzazione magnetica* $\vec{M}$, e determineremo le relazioni che legano tale grandezza macroscopica alle correnti atomiche microscopiche $\vec{J}_m$. Il vettore $\vec{M}$ (analogamente alla polarizzazione elettrica $\vec{P}$ definita dalla [III.9]) è definito dalla relazione:

Intensità di polarizzazione magnetica $\vec{M}$

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{\Delta N} \vec{m}_i}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta\tau} \bar{\vec{m}} \qquad \text{[VI.12]}$$

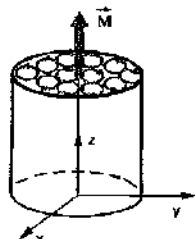
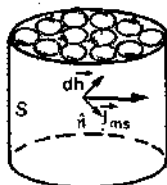
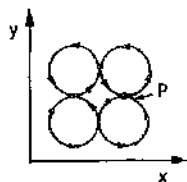
$$[M] = \frac{[A]}{[m]}$$

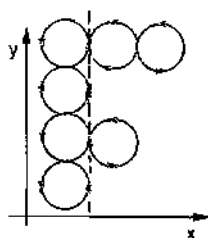
dove $\Delta\tau$ è un volumetto di materiale, ΔN il numero di dipoli magnetici microscopici in esso contenuti, $\vec{m}_i$ il valore (vettoriale) di tali momenti microscopici, e $\bar{\vec{m}}$ il loro valor medio (vettoriale). $\vec{M}$ rappresenta, come si vede dalla sua definizione, il momento di dipolo magnetico posseduto dal materiale per unità di volume. *Nel sistema S.I., $\vec{M}$ si misura in Ampere su metro (A/m).* Come già precisato nel caso della polarizzazione elettrica, la definizione [VI.12] va intesa al limite per $\Delta\tau$ tendente a zero (in termini macroscopici), col vincolo che $\Delta\tau$ sia comunque sempre abbastanza grande da contenere un numero statisticamente significativo di molecole: considerata la densità di atomi nella materia condensata (dell'ordine di 10^{20} atomi per mm^3) questa duplice condizione può essere facilmente soddisfatta. L'intensità di polarizzazione $\vec{M}$ va dunque considerata come una funzione vettoriale della posizione $\vec{M} = \vec{M}(x, y, z)$.

Per vedere come $\vec{M}$ è legato alle correnti atomiche microscopiche (dette anche *correnti amperiane*, in onore di Ampere che per primo ne sviluppò la teoria), cominciamo col fare alcuni ragionamenti qualitativi riferendoci per semplicità al caso in cui il materiale in esame abbia forma cilindrica, e sia polarizzato lungo l'asse del cilindro stesso ($\vec{M}$ parallelo all'asse $\hat{a}$ del cilindro coincidente con l'asse z). Ricordiamo che $\vec{M}$ rappresenta il momento di dipolo magnetico per unità di volume posseduto dal materiale; e che tale momento è il risultante del momento di dipoli atomici, assimilabili a microscopiche spire percorse da corrente cui si aggiungono i momenti di spin. In assenza di magnetizzazione, tali spire sono orientate in maniera del tutto casuale; ma quando $\vec{M}$ è diverso da zero, esse sono prevalentemente orientate col loro piano nella *giacitura ortogonale* ad $\vec{M}$ (nell'esempio in esame, nella giacitura del piano xy).

Correnti amperiane

Supponiamo prima che $\vec{M}$ sia indipendente dalla posizione. Ci si rende conto immediatamente, allora, che internamente al materiale il valor medio delle correnti microscopiche è nullo: per esempio, su ogni piano ortogonale all'asse z, in ogni punto P si ha infatti, in media, perfetta compensazione fra le correnti dei dipoli che si trovano disposti simmetricamente rispetto a P. Si ha una corrente macroscopica media diversa da zero solo sulla superficie laterale del cilindro, dove la magnetizzazione subisce una discontinuità passando bruscamente dal valore $\vec{M}$ che essa ha internamente al materiale, al valore zero che essa ha esternamente. Tale corrente (attiva su una superficie, anziché su un volume) è convenientemente descritta da un vettore densità $\vec{J}_{ms}$ (col pedice s a indicare che si tratta di corrente di superficie). $\vec{J}_{ms}$ è definita dalla condizione che la carica microscopica media dQ_m che fluisce nel tempo dt attraverso un trattino di lunghezza $d\vec{h}$ (macroscopicamente significativo) disposto sulla superficie S del materiale è data da:

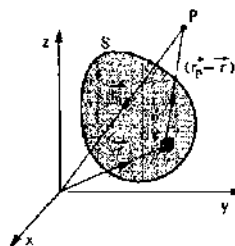
$$\frac{dQ_m}{dt} = \vec{J}_{ms} \cdot dh\,\hat{n} \qquad \text{[VI.13]}$$

Densità di corrente amperiana superficiale $\vec{J}_{ms}$

dove $\hat{n}$ è il versore normale a $d\vec{h}$.

Densità di corrente amperiana volumica $\vec{J}_{mv}$

Se invece $\vec{M}$ non è uniforme internamente al materiale (cosicché la densità dei dipoli microscopici orientati vari lungo una direzione; ad esempio decresca lungo l'asse x come indicato in figura) allora anche internamente al materiale non vi è più compensazione fra le correnti fornite dai diversi dipoli (vedi, ad esempio, ciò che accade lungo la linea tratteggiata indicata in figura). Internamente al materiale si ha una corrente microscopica $\vec{J}_{mv}$ mediamente diversa da zero, che somma il suo contributo a quello della densità di corrente superficiale $\vec{J}_{ms}$. Ricordiamo che $\vec{J}_{mv}$ (il cui pedice v sta a indicare che si tratta di una densità di corrente di volume) è definita dalla condizione che se internamente al materiale si considera un elemento di superficie (macroscopicamente significativo) $d\vec{S}$ comunque orientato, la carica microscopica dQ_m che fluisce mediamente attraverso di essa nel tempo dt è data da

$$\frac{dQ_m}{dt} = \vec{J}_{mv} \cdot d\vec{S} \qquad \text{[VI.14]}$$

Osserviamo, per confronto fra la [VI.13] e la [VI.14], che $\vec{J}_{mv}$ e $\vec{J}_{ms}$ non hanno le stesse dimensioni fisiche: mentre $\vec{J}_{mv}$ si misura in $\dfrac{\text{Coulomb}}{\text{m}^2 \cdot \text{sec}} = \dfrac{\text{A}}{\text{m}^2}$, $\vec{J}_{ms}$ si misura in $\dfrac{\text{Coulomb}}{\text{m} \cdot \text{sec}} = \dfrac{\text{A}}{\text{m}}$.

Per trovare le relazioni quantitative che legano $\vec{M}$ (e le sue derivate spaziali) a $\vec{J}_{mv}$ e $\vec{J}_{ms}$ procediamo in maniera del tutto analoga a quanto abbiamo fatto per trovare le relazioni [III.12] e [III.13] relative alla polarizzazione elettrica $\vec{P}$.

Consideriamo dunque un certo materiale di forma qualunque, il quale occupi il volume τ delimitato dalla superficie chiusa S; sia $\vec{M}(\vec{r}) \equiv \vec{M}(x, y, z)$ la sua polarizzazione magnetica in funzione della posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$. Usando i simboli definiti in figura, e tenendo conto della relazione [V.56], il potenziale vettore $\vec{A}$ generato da tale materiale nel punto P di posizione $\vec{r}_P \equiv (x_P, y_P, z_P)$ è dato da:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\tau \frac{d\vec{m} \times (\vec{r}_P - \vec{r})}{|\vec{r}_P - \vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\tau \frac{\vec{M}(\vec{r}) \times (\vec{r}_P - \vec{r})}{|\vec{r}_P - \vec{r}|^3}\, d\tau \qquad \text{[VI.15]}$$

Infatti, secondo la definizione di $\vec{M}$, l'elemento di volume $d\tau$ possiede momento di dipolo magnetico $d\vec{m} = \vec{M}\, d\tau$.

Ma considerato che per la [I.58] si ha

$$\frac{\vec{r}_P - \vec{r}}{|\vec{r}_P - \vec{r}|^3} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^3} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_P|}\right),$$

la precedente espressione diviene:

$$\vec{A}(\vec{r}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\tau \vec{M} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_P|}\right) d\tau$$

Tenendo conto ora della identità d.3) di tabella V.1 (ponendo in essa $\vec{v} = \vec{M}$; $f = \dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_P|}$), la precedente relazione può essere posta nella forma ($\vec{v} \times \vec{\nabla} f = f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{\nabla} \times (f\vec{v})$; ovvero $\vec{v} \times \overrightarrow{\text{grad}} f = f(\text{rot}\, \vec{v}) - \text{rot}\,(f\vec{v})$):

$d_3)\ \nabla \times (f\vec{v}) = f(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \times \vec{\nabla} f$

$$\vec{A}(\vec{r}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{M})}{|\vec{r}-\vec{r}_P|}\,d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}_P|}\right) d\tau$$

e trasformando il secondo di questi integrali mediante la relazione integrale I.4) di tabella V.1:

$$\vec{A}(\vec{r}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}_P|}\,d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}_P|}\,dS$$

dove dS è l'elemento di superficie e $\hat{n}$ il versore ad esso normale.

D'altra parte, lo stesso potenziale vettore può essere espresso in termini delle correnti mediante la [V.53]; tenuto conto che nel caso in esame è presente una densità volumica di corrente $\vec{J}_{mv}$ e una densità superficiale $\vec{J}_{ms}$, il potenziale può essere posto nella forma:

$$\vec{A}(\vec{r}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{J}_{mv}\,d\tau}{|\vec{r}-\vec{r}_P|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{J}_{ms}\,dS}{|\vec{r}-\vec{r}_P|}$$

Dal confronto fra questa relazione e la precedente si trae:

$$\begin{cases} \vec{J}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \equiv \operatorname{rot}\vec{M} \\ \vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} \end{cases} \qquad \text{[VI.16]}$$

Relazioni fondamentali fra magnetizzazione $\vec{M}$ e correnti microscopiche

che rappresentano le relazioni cercate.

La prima delle relazioni [VI.16] può essere facilmente visualizzata, per esempio, nel caso in cui si ipotizzi, per semplicità, che il materiale sia magnetizzato non uniformemente in modo che il vettore $\vec{M}$ abbia solo componente M_z e che essa dipenda soltanto dalla coordinata x cioè $\vec{M} \equiv (0, 0, M_z)$ $M_z = M_z(x)$, con M_z crescente con x, come mostrato in figura.

Consideriamo una serie di volumetti elementari $d\tau_1$, $d\tau_2$, ..., di lati dx, dy e dz, allineati con l'asse x, i quali corrispondono a dei momenti magnetici $M_{z1}\,d\tau_1$, $M_{z2}\,d\tau_2$, ... rispettivamente. Tali momenti corrispondono a delle correnti atomiche elementari dI_1, dI_2, ..., fluenti con intensità diverse, su circuiti rettangolari di lati dx e dy, perpendicolari all'asse z ed adiacenti l'uno all'altro. Le correnti che scorrono lungo la faccia (colorata in figura) comune ai due volumetti elementari contigui, in figura indicati con (1) e (2), non sono uguali, hanno segni opposti ($dI_1 > 0$, $dI_2 < 0$) ed equivalgono ad una corrente $dI_y = dI_1 - dI_2$ nella direzione dell'asse y. Le correnti dI_1 e dI_2 sono esprimibili in funzione di $\vec{M}$, mediante l'uguaglianza delle diverse espressioni che si possono dare ai momenti magnetici elementari dei volumetti $d\tau_1$ e $d\tau_2$:

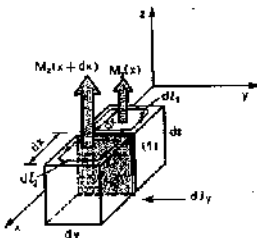
$$(1): \quad dI_1\,dx\,dy = M_z(x)\,dx\,dy\,dz$$

$$(2): \quad dI_2\,dx\,dy = M_z(x+dx)\,dx\,dy\,dz = \left[M_z(x) + \frac{dM_z}{dx}\,dx\right] dx\,dy\,dz$$

Dunque:

$$dI_y = dI_1 - dI_2 = -\frac{dM_z}{dx}\,dx\,dz = (J_{mv})_y\,dx\,dz\,,$$

da cui:

$$(J_{mv})_y = -\frac{dM_z}{dx} = (\operatorname{rot}\vec{M})_y$$

Usando le relazioni [VI.16], che esprimono le correnti microscopiche in termini della intensità di magnetizzazione, il campo di induzione magnetica in presenza di materia può essere espresso in funzione delle correnti macroscopiche e della magnetizzazione stessa; anziché, come accadeva nelle [VI.1], in funzione delle correnti macroscopiche e di quelle microscopiche.

L'utilità di ciò è evidente non tanto nel caso dei magneti permanenti, in cui la magnetizzazione può essere considerata, entro ampi limiti, nota a priori: in questo caso infatti il campo di induzione magnetica può essere calcolato direttamente attraverso il calcolo del potenziale scalare (integrando l'eq. [V.44] su tutto lo spazio occupato dal materiale). Quanto nel caso generale in cui la magnetizzazione $\vec{M}$ sia funzione del campo di induzione $\vec{B}$ presente punto per punto internamente al materiale: la conoscenza della relazione $\vec{M} = \vec{M}(\vec{B})$ consente infatti, a partire dalle [VI.1] e dalla prima delle [VI.16], di impostare in termini del tutto generali le equazioni che consentono di determinare il campo magnetico in tutto lo spazio.

Di ciò ci occuperemo nel prossimo paragrafo e nel successivo, in cui assumeremo che la funzione $\vec{M} = \vec{M}(\vec{B})$, per i vari tipi di materiale, sia nota su basi empiriche. L'interpretazione microscopica di tale funzione sarà poi discussa nel paragrafo VI.6.

VI.4. Le equazioni fondamentali della magnetostatica in presenza di materia e le condizioni di raccordo per $\vec{B}$ ed $\vec{H}$

Il nostro punto di partenza saranno le equazioni generali [VI.1], che qui ripetiamo per comodità

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) \end{cases} \qquad \text{[VI.1]}$$

Si tratta di equazioni differenziali alle derivate parziali, valide dovunque $\vec{B}$ sia definito e derivabile (e dunque, in particolare, continuo). Benché le proprietà integrali da cui esse derivano (che sono rispettivamente il fatto che *le linee di forza di $\vec{B}$ sono linee chiuse*; e il *teorema della circuitazione di Ampere*) valgono su una linea chiusa qualunque – in particolare su una linea che attraversi la superficie di separazione fra materiali diversi – le [VI.1] non sono definite sulle superfici di separazione, in cui in generale $\vec{B}$ subisce una discontinuità. Esse vanno pertanto scritte, e risolte, internamente a ogni materiale; imponendo poi alle diverse soluzioni (ciascuna per ogni materiale) di raccordarsi sulle superfici di separazione secondo le condizioni di raccordo che determineremo più avanti in questo stesso paragrafo.

Considerato dunque che la [VI.1] può essere scritta solo internamente a ogni materiale, la densità di corrente microscopica $\vec{J}_m$ al suo secondo membro è la sola corrente di volume $\vec{J}_{mv}$. Dunque, in base alla prima delle [VI.16], possiamo sostituire ad essa $\vec{\nabla} \times \vec{M}$; col che le [VI.1] stesse divengono

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} \end{cases} \qquad \text{[VI.17]}$$

Poiché μ_0 è costante, la seconda di queste equazioni può essere trasformata – dividendo per μ_0 e portando al primo membro il secondo termine presente al secondo membro – ad assumere la forma:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

Le [VI.17] assumono così la forma

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{H} = \vec{J} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases} \qquad \text{[VI.18]}$$

equazioni fondamentali della magnetostatica in presenza di materia

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

avendo *definito il vettore campo magnetico* $\vec{H}$ *mediante la relazione*

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \qquad \text{[VI.19]}$$

campo magnetico

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}$$

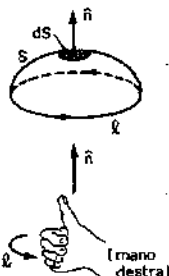
Osserviamo che al secondo membro delle [VI.18] compaiono le sole correnti macroscopiche $\vec{J}$, come volevamo. Notiamo anche l'analogia con le equazioni della elettrostatica in presenza di materia (eq. [III.23]) che riscriviamo per memoria

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases} \qquad \text{[III.23]}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Le [VI.18] pongono le equazioni della magnetostatica in presenza di materia in forma elegante e compatta, del tutto analoga a quella delle equazioni nel vuoto [V.34]. Tuttavia queste ultime ammettono soluzione univoca – fissate le condizioni al contorno – solo perché in entrambe compare lo stesso campo vettoriale incognito $\vec{B}$. Affinché anche le [VI.18] ammettano soluzione univoca è necessario trovare quale relazione intercorre fra $\vec{H}$ e $\vec{B}$; ovvero, considerata la [VI.19], fra $\vec{M}$ e $\vec{B}$. Di ciò ci occuperemo, per i diversi tipi di materiale, nel prossimo paragrafo (in termini fenomenologici) e nel paragrafo VI.6 (dal punto di vista microscopico).

È bene osservare che i campi fondamentali dell'elettromagnetismo sono $\vec{E}$ e $\vec{B}$, che in condizioni stazionarie soddisfano le equazioni differenziali omogenee $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. I campi vettoriali $\vec{D}$ ed $\vec{H}$ sono opportunamente introdotti per descrivere gli effetti medi delle cariche e delle correnti di origine atomica, in sovrapposizione agli effetti delle cariche localizzate e delle correnti macroscopiche di conduzione. *Essi sono descritti da equazioni differenziali* (la prima delle [III.23], e la seconda delle [VI.18]) *in cui non compaiono le cariche e le correnti atomiche; la loro configurazione,* pertanto, *dipende dai materiali presenti solo attraverso le condizioni al contorno* che questi impongono. In particolare $\vec{H}$, di cui ci stiamo qui occupando, soddisfa la relazione differenziale locale $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$. È immediato dedurre, da questa, la corrispondente relazione integrale. Consideriamo una linea chiusa l orientata; e una superficie S che abbia l come contorno e orientata in modo che la sua normale $\hat{n}$ «veda» circolare l in senso antiorario (oppure, con la regola della mano destra, $\hat{n}$ sia diretto come il pollice ed l come le altre dita). Calcolando il flusso di $\vec{J}$ attraverso S, e applicando il teorema di Stokes e la seconda delle [VI.18] si ha:

Le equazioni per $\vec{D}$ e $\vec{H}$ sono indipendenti dalle cariche di polarizzazione e dalle correnti atomiche

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

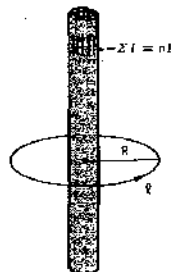
da cui (essendo $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \Sigma I_i$):

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma I_i \qquad \text{[VI.20]}$$

Teorema della circuitazione di Ampere per $\vec{H}$

dove, come al solito, ΣI_i indica la somma algebrica delle correnti (macroscopiche) concatenate con la linea chiusa l. È questo il **teorema della circuitazione di Ampere relativo al campo magnetico $\vec{H}$**. La [VI.20] mostra chiaramente che *le dimensioni di $\vec{H}$ sono quelle di una corrente divisa per una lunghezza.*

Nei problemi dotati di particolare simmetria, la [VI.20] consente facilmente di calcolare il campo magnetico $\vec{H}$ generato dalle correnti sorgenti.

Esempi

E.VI.1. *Una guaina cilindrica rigida, rettilinea, molto lunga rispetto al suo diametro $d = 3$ cm, contiene al suo interno $n = 15$ fili rettilinei, fra di loro elettricamente isolati, ciascuno percorso da corrente continua $I = 1$ A che si chiudono su di loro molto lontano (all'infinito). Determinare il campo magnetico generato ad una distanza $R = 30$ cm normalmente al centro del cilindro.*

Poiché $d \ll R \ll h$ (h = lunghezza della guaina), la guaina può essere considerata come un segmento (di sezione trascurabile) infinitamente lungo. Il problema ha pertanto simmetria cilindrica, e H deve avere modulo uniforme lungo un percorso circolare l di raggio R normale alla guaina e centrato con essa. Sempre per ragioni di simmetria, le linee di forza del campo possono essere solamente o rettilinee e parallele al filo, o circolari ortogonali al filo e concentriche ad esso, o rettilinee e dirette radialmente: in ogni caso H può essere solo o ortogonale o tangente a l. Ma se fosse ortogonale, la sua circuitazione su l sarebbe nulla, e ciò non può essere perché la somma delle correnti concatenate $\Sigma I_i = nI$ è diversa da zero. Dunque H è tangente ad l; e precisamente, affinché la [VI.20] sia soddisfatta in segno, si avvolge in senso antiorario intorno al verso delle correnti. La [VI.20] diviene dunque:

$$H\, 2\pi R = nI \Rightarrow H = \frac{n \cdot I}{2\pi R}$$

Numericamente, $H = \dfrac{15 \cdot 1\ \text{A}}{0{,}840\ \text{m}} = 16\ \dfrac{\text{As}}{\text{m}}$

Unità di misura di H nel sistema S.I.:

Amperspire su metro (As/m)

Nel sistema SI, l'unità di misura di H è convenzionalmente detta «Amperspire su metro» $\equiv$ As/m (s numero adimensionale), per indicare che H non varia mantenendo costante il prodotto fra numero di spire e corrente circolante in ciascuna spira del circuito sorgente (di fissata geometria). Osserviamo che il valore di H è indipendente dal fatto che la guaina sia immersa nel vuoto o in un eventuale mezzo omogeneo che riempia uniformemente lo spazio circostante.

E.VI.2. *Riprendiamo il solenoide introdotto nell'esempio E.V.12. Consideriamo il caso che esso sia molto lungo rispetto al suo diametro (solenoide infinitamente lungo), ma non facciamo alcuna ipotesi sul materiale che eventualmente lo riempia. Usando il teorema della circuitazione di Ampere (eq. [VI.20]), determinare il campo magnetico $\vec{H}$ presente internamente ed esternamente al solenoide.*

Il sistema ha simmetria cilindrica, e dunque anche il campo da esso prodotto deve avere simmetria cilindrica; le sue linee di forza potranno pertanto essere o circolari, ortogonalmente all'asse del cilindro (preso come asse x) e centrate in esso;

o radiali (ortogonali all'asse x e indipendenti dalla coordinata x); o rettilinee e parallele all'asse x. Nel primo caso e nel secondo caso, la circuitazione di $\vec{H}$ lungo una linea chiusa come la linea l_1 sarebbe nulla; e ciò non può essere perché l_1 è concatenata con una corrente diversa da zero. L'unica possibilità è pertanto che il campo sia diretto longitudinalmente. Sulle linee chiuse l_2 ed l_3 – che non sono concatenate con alcuna corrente – la circuitazione deve essere nulla: ciò può essere solo se $\vec{H}$ (che abbiamo già appurato essere longitudinale) è indipendente dalla distanza dall'asse x: ciò è possibile, con valore uniforme di H diverso da zero, solo internamente al solenoide; esternamente, poiché non può essere il campo uniforme diverso da zero ovunque, l'unica possibilità è che il campo sia nullo. Dunque riassumendo il risultato dei ragionamenti fin qui fatti: il campo $\vec{H}$ deve essere nullo esternamente al solenoide, mentre internamente esso è uniforme e diretto secondo l'asse del cilindro. Osserviamo che ciò vale nell'ipotesi che il sistema abbia simmetria cilindrica, e ciò è vero solo se l'avvolgimento è sufficientemente fitto perché siano trascurabili i relativi effetti di struttura in vicinanza dei fili (vedi esempio E.V.12).

Non ci resta che determinare quanto vale il modulo del campo – longitudinale e uniforme – internamente al solenoide. A tale scopo applichiamo la [VI.20] alla linea l_1. L'unico contributo alla circuitazione viene dal tratto Δl lungo l'asse x, dove $\vec{H}$ è parallelo a $\Delta\vec{l}$; la [VI.20] diviene pertanto:

$$H\,\Delta l = \Delta N\, i$$

dove ΔN è il numero di spire concatenate con l_1; dunque in definitiva:

$$\vec{H} = \frac{\Delta N}{\Delta l} \cdot I\hat{i} = nI\hat{i} \qquad \text{[VI.21]}$$

Campo magnetico internamente a un solenoide indefinito

dove I è la corrente; $n = \dfrac{\Delta N}{\Delta l}$ il numero di spire per unità di lunghezza; $\hat{i}$ il versore dell'asse x. Osserviamo che se internamente al solenoide vi è il vuoto, allora ponendo nella [VI.19] $\vec{M} = 0$ si ha $\vec{H}_0 = \dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0}$; ovvero anche $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$ (avendo indicato col pedice $_0$ le grandezze nel vuoto). Riotteniamo così immediatamente dalla [VI.21], per $\vec{B}_0$, il risultato [V.25]. Notiamo anche che la [VI.21] ci dà immediata ragione del nome di Amperspire su metro che viene dato alle unità di misura per $\vec{H}$.

Le *condizioni di raccordo per i campi vettoriali* $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ al passaggio da un mezzo materiale ad un altro, possono essere facilmente ricavate considerando che il flusso di $\vec{B}$ uscente da qualunque superficie chiusa è nullo, e che la circuitazione di $\vec{H}$ lungo una linea chiusa che non si concateni con correnti macroscopiche è anch'essa nulla (e dunque in particolare lungo una linea chiusa che attraversi l'interfaccia fra due mezzi materiali diversi, interfaccia che è sede solo di correnti microscopiche).

Condizioni di raccordo per $\vec{B}$ ed $\vec{H}$

Considerato allora un cilindretto C come quello mostrato in figura e un piccolo percorso rettangolare l (anch'esso mostrato in figura) e imponendo le condizioni che il flusso di $\vec{B}$ uscente da C, e la circuitazione di $\vec{H}$ su l, siano nulli, in maniera del tutto analoga a come abbiamo ricavato le condizioni [III.31] e [III.32] per $\vec{E}$ e $\vec{D}$, otteniamo ora le condizioni di raccordo per $\vec{B}$ ed $\vec{H}$

$$B_{n1} = B_{n2} \qquad \text{[VI.22]}$$

$$H_{t1} = H_{t2} \qquad \text{[VI.23]}$$

$B_{n1} = B_{n2}$

$H_{t1} = H_{t2}$

Passando da un mezzo materiale all'altro, *la componente normale di $\vec{B}$ non subisce alcuna discontinuità* (mentre è in generale discontinua la sua com-

ponente tangenziale); al contrario, *per $\bar{H}$ la componente tangenziale non subisce alcuna discontinuità* (mentre è in generale discontinua la componente normale).

La [VI.22] e la [VI.23] costituiscono anche la base per la *definizione operativa di $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ nella materia.* Per misurare il valore di $\bar{B}$ presente internamente a un certo materiale, basta effettuare nel materiale un sottile taglio ortogonale alle linee di forza del campo e misurare il valore di $\bar{B}_0$ presente dentro il taglio; il valore di $\bar{B}_0$ così misurato coincide, per la [VI.22], col valore di $\bar{B}$ attivo internamente al materiale. Quale tecnica sperimentale possa essere nella pratica impiegata per misurare $\bar{B}_0$, verrà da noi discusso nel prossimo capitolo. Naturalmente, qualora la direzione di $\bar{B}$ non sia nota a priori da considerazioni relative alla geometria del sistema, si procederà per tentativi, effettuando tagli con diversa orientazione fino a individuare l'orientazione per cui la componente tangenziale di $\bar{B}_0$ è nulla. Analogamente, per misurare $\bar{H}$ basta misurare $\bar{H}_0$ dentro un taglio effettuato nel materiale parallelamente alle linee di forza del campo. Osserviamo che nel vuoto – e praticamente anche in aria – essendo $\bar{M} = 0$, dalla [VI.19] si ha $\bar{H}_0 = \dfrac{\bar{B}_0}{\mu_0}$; per cui una misura di $\bar{B}_0$ fornisce anche una misura di $\bar{H}_0$.

Nel vuoto $\bar{H}_0 = \dfrac{\bar{B}_0}{\mu_0}$

Nei mezzi materiali *isotropi* ed *omogenei* – (e dunque escludendo in particolare i magneti permanenti, di cui ci occuperemo nel paragrafo VI.7, il cui momento magnetico proprio $\bar{M}$ costituisce un elemento di evidente anisotropia) – i campi vettoriali $\bar{H}$ e $\bar{B}$ sperimentalmente risultano essere fra di loro paralleli; ciò significa, come discende dalla [VI.19], che $\bar{M}$ è parallelo (o antiparallelo) a $\bar{B}$. In tali mezzi si può scrivere

Permeabilità magnetica μ

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \qquad \text{[VI.24]}$$

La quantità scalare μ, che costituisce una proprietà di ogni materiale, è detta *permeabilità magnetica.* Per i corpi anisotropi la costante scalare μ è sostituita da un tensore. La permeabilità magnetica viene scritta spesso, per comodità, nella forma

$$\mu = \mu_0 \mu_r \qquad \text{[VI.25]}$$

Permeabilità relativa $\mu_r = \mu/\mu_0$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto. La quantità adimensionale $\mu_r = \mu/\mu_0$ viene detta *permeabilità relativa* del materiale in esame. Come discuteremo in dettaglio nei prossimi due paragrafi, μ (e dunque anche μ_r) è indipendente da $\bar{B}$ nei materiali paramagnetici e diamagnetici; mentre nei materiali ferromagnetici μ è funzione di B ($\mu = \mu(B)$). Nel vuoto (e praticamente anche in aria) è $\mu = \mu_0$, e dunque anche $\mu_r = 1$.

Usando la [VI.24], la [VI.22] può essere scritta in funzione delle componenti normali di $\bar{H}$, H_{n1} e H_{n2}; si ottiene $\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$. Dunque le condizioni complessive di raccordo per $\bar{H}$ risultano

Condizioni di raccordo per $\bar{H}$

$$\begin{cases} H_{t1} = H_{t2} & \text{[VI.23]} \\ \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} & \text{[VI.23a]} \end{cases}$$

dove come al solito i pedici 1 e 2 indicano le grandezze relative al mezzo 1 e 2 rispettivamente. Analogamente, sostituendo la [VI.24] nella [VI.23] ricaviamo le condizioni di raccordo relative al vettore $\bar{B}$; si ottiene

Condizioni di raccordo per $\bar{B}$

$$\begin{cases} B_{t1}/\mu_1 = B_{t2}/\mu_2 & \text{[VI.22a]} \\ B_{n1} = B_{n2} & \text{[VI.22]} \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro fra la [VI.23] e la [VI.23a] (e analogamente fra la [VI.22a] e la [VI.22]) otteniamo:

$$\frac{(H_{t1}/H_{n1})}{(H_{t2}/H_{n2})} = \frac{(B_{t1}/B_{n1})}{(B_{t2}/B_{n2})} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad \text{[VI.26]}$$

dove θ_1 e θ_2 sono gli angoli definiti in figura. La [VI.26] rappresenta la cosiddetta *legge di rifrazione* delle linee di forza di $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ passando da un mezzo materiale a un altro.

Esempi

E.VI.3. *Una lastra di materiale omogeneo ed isotropo, molto estesa rispetto al suo spessore, è disposta ortogonalmente alle linee di forza di un campo di induzione magnetica uniforme $\vec{B}_0$ (nel vuoto). Sapendo che la permeabilità magnetica relativa del materiale è $\mu_r = 2$, discutere la configurazione assunta nel materiale dai campi vettoriali $\vec{B}$, $\vec{H}$ e $\vec{M}$.*

Poiché il campo $\vec{B}_0$ è ortogonale alla superficie della lastra ($B_{0t} = 0$), le [VI.22] e [VI.22a] equivalgono nel nostro caso a

$$\left.\begin{aligned} B_n &= B_{0n} \\ \frac{B_t}{\mu} &= \frac{B_{0t}}{\mu_0} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0$$

Internamente al materiale, il campo $\vec{B}$ ha lo stesso valore che esternamente (in modulo e direzione).

Il campo $\vec{H}$, essendo parallelo a $\vec{B}$, è anch'esso ortogonale alla piastra ($H_t = H_{0t} = 0$); le [VI.23] ci danno dunque

$$\left.\begin{aligned} H_t &= H_{0t} = 0 \\ \mu H_n &= \mu_0 H_{0n} \end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{H} = \frac{\mu_0 \vec{H}_0}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\vec{H}_0}{\mu_r} = \frac{\vec{H}_0}{2}$$

D'altra parte, esternamente è $\vec{H}_0 = \dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0}$.

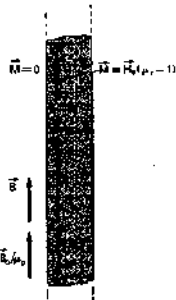
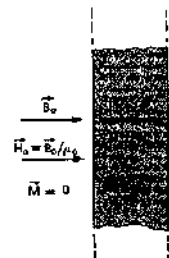
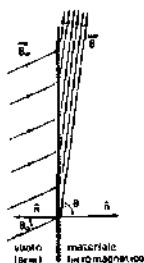
Quanto al campo vettoriale $\vec{M}$, esternamente è $\vec{M} = 0$; mentre internamente si ha dalla [VI.19]

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{\vec{H}_0}{2} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{\vec{B}_0}{\mu_0 2} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0 2} = \frac{\vec{H}_0}{2}$$

E.VI.4. *Un cilindro di materiale omogeneo ed isotropo, di diametro molto piccolo rispetto alla sua altezza, è disposto parallelamente alle linee di forza di un campo di induzione magnetica uniforme $\vec{B}_0$ (nel vuoto). Se $\mu_r = 2$, discutere la configurazione assunta nel materiale dai campi vettoriali $\vec{B}$, $\vec{H}$ e $\vec{M}$.*

Esternamente al materiale, è $\vec{H}_0 = \vec{B}_0/\mu_0$ e $\vec{M} = 0$.

$\vec{H}_0$ e $\vec{B}_0$ sono paralleli alla superficie laterale del materiale ($H_{0n} = B_{0n} = 0$); per cui dalla [VI.22] e dalla [VI.23] segue:

$$\left\{\begin{aligned} H_t &= H_{0t} = H_0 \\ H_n &= \frac{\mu_0}{\mu} H_{0n} = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \vec{H} = \vec{H}_0 \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{B_t}{\mu} &= \frac{B_{0t}}{\mu_0} = \frac{B_0}{\mu_0} \\ B_n &= B_{0n} = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \vec{B} = \mu_r \vec{B}_0$$

Dalla [VI.19] segue infine il valore di $\vec{M}$:

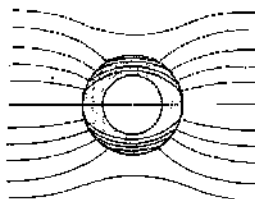
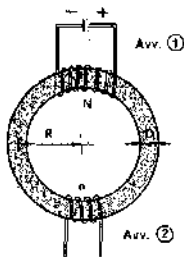
$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \mu_r \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - H_0 = \mu_r \frac{B_0}{\mu_0} - \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B_0}{\mu_0}(\mu_r - 1)$$

E.VI.5. *La permeabilità magnetica relativa dei materiali ferromagnetici è spesso assai alta (dell'ordine delle migliaia; per alcune leghe speciali addirittura di molte decine di migliaia). Analizzare qualitativamente l'andamento delle linee di forza di $\vec{B}$ al passaggio della superficie di separazione fra il vuoto (o l'aria) e un materiale di tale natura.*

Supponiamo che le linee di forza di $\vec{B}_0$ (esternamente al materiale) incidano formando con la normale $\hat{n}$ un angolo θ_0 piccolo ma non nullo (cioè quasi ortogonalmente alla superficie di separazione). Per la [VI.26] si ha:

$$\operatorname{tg}\theta / \operatorname{tg}\theta_0 = \mu/\mu_0 = \mu_r \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \mu_r \operatorname{tg}\theta_0$$

dove θ è l'angolo che $\vec{B}$ forma con la normale $\hat{n}$ internamente al materiale. Essendo μ_r molto grande, $\operatorname{tg}\theta$ è anch'esso grande (ad esempio molte decine); e θ è prossimo a $90°$.

Dunque internamente al materiale $\vec{B}$ tende ad essere parallelo alla superficie di separazione, e le sue linee di forza sono molto più dense che esternamente ($\vec{B}$ è molto più intenso di $\vec{B}_0$). Nel disegno, questo effetto è stato mostrato, per motivi di chiarezza grafica, in misura molto meno pronunciata di quanto spesso si presenti nella pratica. Su questo effetto è basata la progettazione e la trattazione dei cosiddetti «circuiti magnetici», di cui ci occuperemo nel paragrafo VI.7. Anche i cosiddetti «schermi magnetici» funzionano sullo stesso principio: come si vede in figura, se si dispone un tubo di materiale ferromagnetico con l'asse ortogonale a un campo magnetico, le linee di forza si addensano nel materiale lasciando nella zona interna al tubo un campo molto debole.

E.VI.6. *Un anello di materiale ferromagnetico, la cui sezione ha diametro D molto minore del raggio R dell'anello stesso, porta due avvolgimenti di filo conduttore. Il primo avvolgimento, di N = 100 spire, è percorso da una corrente continua di I = 2 Ampere; il secondo avvolgimento è costituito da n = 10 spire. Se, nelle condizioni considerate, la permeabilità magnetica relativa del materiale è $\mu_r = 3000$, calcolare il flusso di $\vec{B}$ attraverso il secondo avvolgimento. (D = 1 cm; R = 10 cm).*

Per l'effetto discusso nel precedente esempio, internamente al materiale le linee di forza di $\vec{H}$ e di $\vec{B}$ possono essere considerate, in ottima approssimazione, come circolari; i campi corrono cioè parallelamente all'anello. Fuori dall'anello, i campi hanno inoltre intensità trascurabile; dunque il flusso di $\vec{B}$ e di $\vec{H}$ (pari rispettivamente a BS e HS, dove S è l'area della sezione normale) è praticamente lo stesso su ogni sezione, ed essendo S costante i campi hanno valore costante su ogni circonferenza concentrica all'anello e interna ad esso. Ciò premesso, il valore di H internamente all'anello può essere facilmente valutato usando il teorema della circuitazione [VI.20]:

$$H\,2\pi r = NI \quad \left(R - \frac{D}{2} < r < R + \frac{D}{2}\right)$$

Il valor medio di H (per $r = R$) risulta dunque

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = \frac{100 \cdot 2\ \text{A}}{6{,}28 \cdot 0{,}1\ \text{m}} = 318{,}5\ \frac{\text{As}}{\text{m}}$$

Considerato che μ_r è noto, il valore di $\vec{B}$ può ora essere calcolato tramite la [VI.24]:

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = 12{,}56 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{A}} 5000 \cdot 318.5 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 2 \text{ Tesla}$$

Il flusso di $\vec{B}$ vale infine:

$$\Phi(\vec{B}) = nBS = 10\, B \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 2 \text{ Tesla} \cdot 10 \cdot 3{,}14\, (5 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^2 = 1{,}57 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Un semplice dispositivo come quello descritto nel presente esempio viene usato nella pratica per misurare le proprietà dei materiali ferromagnetici. Controllando la corrente I nel primo avvolgimento, si può produrre un desiderato valore di H, o una variazione ΔH, nel materiale

$$\left(H = \frac{NI}{2\pi R};\ \Delta H = \frac{N\Delta I}{2\pi R}\right)$$

Poiché, come vedremo nel prossimo capitolo, il flusso di B e le sue variazioni possono essere misurati con relativa facilità mediante fenomeni di induzione, si possono così misurare le relazioni $B = B(H)$ e $\Delta B = \Delta B(\Delta H)$ caratteristiche del materiale in esame.

VI.5. Proprietà macroscopiche dei materiali dia-, para- e ferro-magnetici

Nei materiali diamagnetici e paramagnetici, la permeabilità magnetica relativa μ_r oltre ad essere – come abbiamo accennato – costante (cioè indipendente dal campo magnetico applicato al materiale) è anche, come vedremo meglio fra poco, assai prossima a 1. Per descrivere le proprietà magnetiche del materiale, è conveniente introdurre il parametro

$$\boxed{\chi_m = \mu_r - 1} \qquad \text{[VI.27]}$$

Suscettività magnetica

detto *suscettività magnetica* del materiale. Introducendo la [VI.24] nella [VI.19], si ricava immediatamente – per materiali isotropi –:

$$\boxed{\vec{M} = (\mu_r - 1)\,\vec{H} = \chi_m \vec{H}} \qquad \text{[VI.28]}$$

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

ovvero anche

$$\mu \vec{M} = \chi_m \vec{B} \qquad \text{[VI.29]}$$

$\mu \vec{M} = \chi_m \vec{B}$

La suscettività magnetica χ_m rappresenta dunque il fattore di proporzionalità fra il campo magnetico $\vec{H}$ presente nel materiale e il momento magnetico indotto per unità di volume $\vec{M}$; ovvero anche il fattore di proporzionalità fra $\vec{B}$ e la quantità $\mu\vec{M}$.

VI.5.1. Sostanze diamagnetiche

Nelle sostanze diamagnetiche, χ_m è negativo ($\mu_r < 1$): ciò significa che il momento magnetico indotto nel materiale è diretto in verso opposto rispetto al campo inducente (vedi eq. [VI.28] o [VI.29]): vedremo nel prossimo paragrafo attraverso quale meccanismo fisico ciò possa accadere.

Sostanze diamagnetiche

Sostanza	χ_m
Ag	$-26{,}4 \cdot 10^{-6}$
Au	$-36{,}3 \cdot 10^{-6}$
Bi	$-166 \cdot 10^{-6}$
C (grafite)	$-99 \cdot 10^{-6}$
Cu	$-9{,}6 \cdot 10^{-6}$
H_2	$-2{,}1 \cdot 10^{-9}$
He	$-1{,}0 \cdot 10^{-9}$
Hg	$-32{,}0 \cdot 10^{-6}$

Il valore di χ_m per alcune sostanze è mostrato nella tabella a lato. Per rendersi conto degli ordini di grandezza osserviamo che ad esempio un pezzo di grafite immerso in un campo $\vec{B}$ di 5 Tesla (che è fra i più intensi che possano essere realizzati nella pratica) acquista una intensità di magnetizzazione $M = \dfrac{\chi_m B}{\mu} \simeq 400 \dfrac{A\,m^2}{m^3}$. Tenuto conto del numero di atomi contenuti in un m^3 di grafite, si calcola facilmente che ogni atomo contribuisce al momento magnetico risultante con un apporto dell'ordine di $5 \cdot 10^{-27}\,A\,m^2$, cioè per una frazione $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ di un magnetone di Bohr.

Salvo che per alcune sostanze (ad esempio il Bi e l'H_2O), che presentano anomalie di comportamento di varia natura, la suscettività magnetica delle sostanze diamagnetiche appare essere indipendente dalla temperatura T.

Sostanze a magnetizzazione lineare

Le sostanze diamagnetiche non presentano alcun tipo di saturazione: in altri termini le relazioni che legano i vettori $\vec{B}$, $\vec{H}$ ed $\vec{M}$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

restano relazioni di pura proporzionalità (χ_m indipendente dai campi) anche ai campi più elevati che si riescono a realizzare in pratica. Considerato che $|\chi_m| \leq 10^{-4}$, nelle sostanze diamagnetiche la relazione che intercorre fra $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ si discosta per meno di una parte su diecimila rispetto al caso del vuoto. La perturbazione portata alla configurazione dei campi dalla presenza di questi materiali può pertanto essere, di norma, trascurata.

Sostanze paramagnetiche

VI.5.2. Sostanze paramagnetiche

Sostanza	χ_m
Al	$22 \cdot 10^{-6}$
Cr	$312 \cdot 10^{-6}$
$FeCl_2$	$3020 \cdot 10^{-6}$
Gd_2O_3	$12.080 \cdot 10^{-6}$
O_2	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$
Pd	$820 \cdot 10^{-6}$
Pt	$295 \cdot 10^{-6}$

Nelle sostanze paramagnetiche, si ha $\mu_r > 1$, cioè $\chi_m > 0$: il momento magnetico $\vec{M}$ indotto dalla presenza di un campo esterno $\vec{B}$ è parallelo e concorde rispetto a $\vec{B}$, ed è dovuto sostanzialmente all'orientamento dei momenti magnetici propri degli atomi o delle molecole del materiale. La suscettività magnetica di alcune sostanze paramagnetiche è riportata nella tabella a fianco (i dati si riferiscono a condizioni standard di temperatura e di pressione).

Con la temperatura, la suscettività magnetica χ_m dei materiali paramagnetici varia secondo la *legge di Curie* (stabilita sperimentalmente da P. Curie nel 1895):

Legge di Curie

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T} \qquad [VI.30]$$

dove T è la temperatura, ρ la densità del materiale, e C è una costante la cui espressione in funzione delle grandezze atomiche (secondo la teoria del fenomeno stabilita da P. Langevin all'inizio di questo secolo) vedremo nel prossimo paragrafo. Al discendere della temperatura, con l'avvicinarsi allo zero assoluto la suscettività magnetica dei materiali paramagnetici aumenta rapidamente.

A bassa temperatura (dell'ordine del grado K), per campi molto intensi (B di alcuni Tesla) è stata osservata una pressoché completa saturazione di $\vec{M}$ in funzione di $\vec{B}$ (o di $\vec{H}$): il valore di M misurato corrispondeva all'orientamento secondo il campo di oltre il 99% dei dipoli magnetici elementari.

In queste condizioni, la relazione fra i campi $\vec{B}$, $\vec{M}$ ed $\vec{H}$ (relazione non più lineare) si discosta di molto rispetto al caso del vuoto; ma in condizioni standard, vale di norma l'osservazione (già fatta per i materiali diamagnetici) che i materiali paramagnetici perturbano in misura di solito trascurabile la configurazione del campo magnetico.

VI.5.3. Sostanze ferromagnetiche

Sostanze ferromagnetiche

La fenomenologia dei processi di magnetizzazione dei materiali ferromagnetici è estremamente complessa e varia. Le relazioni che intercorrono fra $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ e fra $\vec{M}$ ed $\vec{H}$ ($\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$; $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$) non solo non sono lineari (come accade nei materiali dia- e paramagnetici); ma, come vedremo fra poco, non sono nemmeno univoche.

Per conseguenza, la relativa trattazione teorica è piuttosto complicata: nella pratica, si è spesso costretti a ricorrere a metodi approssimati la cui validità e i cui limiti di applicabilità sono talvolta dubbi, tanto che è sempre consigliabile ricorrere alla verifica sperimentale a posteriori. Le proprietà magnetiche dei materiali ferromagnetici sono inoltre dipendenti in misura critica dalle caratteristiche chimico-fisiche dei materiali: basta spesso variare di alcune parti per cento il contenuto di particolari impurità per cambiare radicalmente le proprietà di un materiale. Per conseguenza, è enorme la varietà dei materiali ferromagnetici; e ciò, mentre da un lato rende la fenomenologia assai varia, consente d'altro lato di produrre materiali con le proprietà più adatte ad ogni singola applicazione.

Sperimentalmente, la curva $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ di un materiale viene di norma misurata usando la tecnica brevemente descritta nell'esempio E.VI.6. Una volta misurato il valore di $\vec{B}$ corrispondente a un determinato valore di $\vec{H}$, il corrispondente valore di $\vec{M}$ può essere calcolato tramite la [VI.19] ($\mu_0\vec{M} = \vec{B} - \mu_0\vec{H}$). Nella maggior parte dei materiali ferromagnetici, di solito il termine $\mu_0\vec{H}$ è più piccolo di $\vec{B}$, e $\mu_0\vec{M}$ ha un andamento assai simile all'andamento di $\vec{B}$.

Effettuando misure su un materiale isotropo per il quale sia inizialmente $\vec{M} = 0$ (e dunque per il quale $\vec{B} = 0$ se $\vec{H} = 0$) si riscontra che $\vec{B}$ ed $\vec{M}$ assumono la stessa direzione (anche se non sempre lo stesso verso, come vedremo fra poco) rispetto ad $\vec{H}$; cosicchè le relazioni $\vec{B}(\vec{H})$ e $\vec{M}(\vec{H})$ possono essere espresse in forma scalare, $B(H)$ ed $M(H)$, dove B, M ed H rappresentano le proiezioni di $\vec{B}$, $\vec{M}$ ed $\vec{H}$ nella direzione di $\vec{H}$, positivo nel verso inizialmente assunto da $\vec{H}$ stesso.

Qualitativamente, i risultati che si ottengono per la curva $B = B(H)$ hanno le seguenti caratteristiche. Inizialmente, B aumenta all'aumentare di H, seguendo un andamento del tipo della curva I mostrata in figura (*curva di prima magnetizzazione*).

Curva di prima magnetizzazione

Saturazione di M

Da un certo valore massimo H_m in poi, B prende ad aumentare solo proporzionalmente a $\mu_0 H$: ciò significa (ricordando la relazione $\vec{B} = \mu_0\vec{M} + \mu_0\vec{H}$) che per $H = H_m$ la intensità di magnetizzazione M raggiunge praticamente il suo valore massimo asintotico (*valore di saturazione M_s*). Per i vari tipi di materiali, H_m è dell'ordine di 10^5 As/m, e $\mu_0 M_s$ dell'ordine di $1 \div 2$ Tesla. Facendo ora diminuire H, fino a che H si mantiene superiore a un certo valore H_s la curva $B(H)$ segue la stessa curva I che aveva seguito all'andata; ma per $H < H_s$, B si mantiene sempre al di sopra di tale curva. Per $H = 0$, si ha $B = B_r > 0$; tale valore è detto *induzione magnetica residua*. In corrispondenza, essendo $H = 0$, si ha $B = \mu_0 M$; il valore M_r corrispondente ($M_r = B_r/\mu_0$) è detto *magnetizzazione residua*.

Induzione magnetica residua

Magnetizzazione residua

Campo magnetico di coercizione

Curva e ciclo di isteresi

Smagnetizzazione

Invertendo ora il segno di H, all'aumentare del suo valore assoluto, B (e dunque anche M) comincia a decrescere; per $H = -H_c$ si ha $B = 0$. *H_c è detto campo magnetico di coercizione.* Osserviamo che in corrispondenza di H_c è $M \neq 0$ ($M = H_c$) e positivo. Per $H < -H_c$, anche B diventa negativo. La curva completa è detta *curva di isteresi*; facendo variare, con regolarità e continuità, H fra $-H_m$ e $+H_m$, la curva di isteresi si assesta su una forma ciclica piuttosto ben riproducibile detta *ciclo di isteresi*. Le considerazioni che faremo nel prossimo capitolo a proposito dell'energia del campo magnetico (in base a cui saremo in grado di interpretare anche i fenomeni di attrazione e repulsione dei diversi tipi di materiale ad opera del campo magnetico cui abbiamo accennato all'inizio di questo capitolo) ci mostreranno che per produrre una variazione dH del campo è necessario compiere un *lavoro* $dL = B\,dH$; cosicché l'energia dissipata per far compiere all'unità di volume del materiale l'intero ciclo di isteresi è pari all'area compresa entro il ciclo nel piano H, B. Osserviamo che nel II e IV quadrante di tale piano, i campi B ed H hanno segno fra di loro opposto.

È evidente che per un materiale ferromagnetico, la permeabilità magnetica $\mu = B/H$ non solo non è costante (non è indipendente da H); ma non è nemmeno univocamente definita. Fissato H, μ dipende infatti anche dalla «storia» del materiale, e ciò toglie a tale parametro gran parte del suo significato. Se anziché far variare H fra $\pm H_m$ lo si fa variare entro un intervallo più ristretto (e sempre simmetrico rispetto a zero: $-\bar{H} < H < +\bar{H}$, con $\bar{H} < H_c$), si ottengono dei cicli più piccoli, sempre simmetrici rispetto all'origine, i cui vertici giacciono su una curva che ha un andamento prossimo alla curva di prima magnetizzazione. Se si compiono con continuità dei cicli di ampiezza via via decrescente, la funzione $B(H)$ ha un andamento del tipo mostrato nella seconda delle figure a lato; essa va così convergendo progressivamente verso l'origine. È questo un artificio spesso usato nella pratica per «smagnetizzare» un materiale: per riportarlo cioè, dopo averlo magnetizzato, nelle condizioni iniziali in cui era $B = 0$ ed $M = 0$ in corrispondenza di $H = 0$.

Naturalmente, è anche possibile far compiere al materiale dei *cicli non simmetrici*: una volta portato il materiale, attraverso i processi fin qui descritti, in una certa posizione $\bar{H}, \bar{B}$ nel piano H, B, facendo compiere ad H una piccola oscillazione di ampiezza ΔH si ottiene un piccolo ciclo come quello mostrato in figura. Se ΔH è molto piccolo, praticamente il ciclo si riduce a un segmento: in questo caso il lavoro dissipato per compiere il ciclo è praticamente trascurabile e si parla di ciclo elementare reversibile.

Da tutto quanto fin qui detto risulta chiaramente che fissato un certo valore di H applicato al materiale, il corrispondente valore di B non è determinato. Esso dipende infatti dalla «storia magnetica» del materiale: dal fatto che ci troviamo lungo la curva di prima magnetizzazione, o sul ciclo di isteresi (e in questo caso, va specificato su quale «ramo»), o su un ciclo di ampiezza minore (simmetrico o no). Pertanto il parametro permeabilità magnetica

$$\mu = \frac{B}{H}$$

come già detto perde praticamente di significato. Per descrivere le proprietà del materiale occorre fornire l'intera curva $B = B(H)$ (ed anzi tutte le varie curve summenzionate). In pratica, ci si limita spesso a fornire il grafico del ciclo di isteresi principale (cioè relativo a $-H_m < H < +H_m$).

Ad esempio, nella figura a fianco vengono riportati i cicli di isteresi di tre materiali ferromagnetici adatti ad applicazioni diverse:

Permeabilità differenziale

La curva 1 si riferisce al cosiddetto «*permalloy*» (Ni 78,5%; Fe 21,5%) con ciclo molto stretto (bassa isteresi), il quale raggiunge il valore di saturazione della magnetizzazione e dell'induzione ($\mu_0 M_s = B_s \simeq 1,1$ Tesla) già per valori di H assai bassi ($H_s \simeq 200$ As/m). Quando il ciclo di isteresi è così stretto un parametro significativo per la descrizione delle proprietà del materiale è la cosiddetta *permeabilità magnetica differenziale*

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} \qquad \text{permeabilità differenziale assoluta} \qquad [VI.31]$$

$$\mu_{dr} = \frac{1}{\mu_0}\frac{dB}{dH} \qquad \text{permeabilità differenziale relativa} \qquad [VI.31a]$$

che rappresenta la pendenza della curva $B = B(H)$. Naturalmente anche la permeabilità differenziale è in generale funzione di H; per il permalloy la *permeabilità differenziale* relativa *iniziale* (cioè calcolata lungo la curva di prima magnetizzazione in corrispondenza di $H = 0$) è dell'ordine di 10^5 (e dello stesso ordine è anche il suo valor medio lungo tutto il tratto crescente del ciclo di isteresi).

Permeabilità differenziale iniziale

La curva 2 della figura è caratterizzata da un ciclo di isteresi molto largo, per cui il valore residuo di B, B_r, è di poco inferiore al valore di saturazione B_s: si tratta di un materiale particolarmente adatto alla realizzazione di magneti permanenti.

La curva 3 si riferisce al cosiddetto «*isoperm*», il cui ciclo molto stretto è praticamente lineare: la permeabilità differenziale relativa (praticamente coincidente in questo caso con la permeabilità relativa: $\frac{1}{\mu_0}\frac{dB}{dH} \simeq \frac{1}{\mu_0}\frac{B}{H}$) si mantiene costante, pari circa a 60, per $0 < H < 10^5$ As/m.

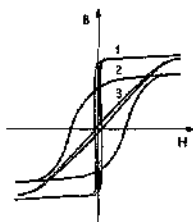
In molte applicazioni, la scelta dei materiali può essere fatta – almeno in prima istanza – in base alla conoscenza di un numero limitato di parametri: sono reperibili in letteratura delle tabelle che forniscono i parametri fondamentali per molti materiali. A titolo di esempio, nella tabella che segue riportiamo per alcuni materiali speciali, oltre alla composizione, i seguenti dati: *permeabilità differenziale relativa iniziale* μ_{di}; *permeabilità differenziale relativa massima* (cioè nel punto di massima pendenza della curva $B = B(H)$) μ_{dm}; il *campo magnetico di coercizione* H_c; la *magnetizzazione di saturazione* (moltiplicata per μ_0) $\mu_0 M_s$; l'area del ciclo di isteresi, w_h, corrispondente al *lavoro necessario per far compiere all'unità di volume del materiale l'intero ciclo*, e la *temperatura di Curie* T_c che definiremo qui di seguito.

È dovuta a P. Curie la scoperta del fatto che per ogni materiale ferromagnetico esiste una *temperatura critica* T_c, detta *temperatura di Curie, al di sopra della quale il materiale si comporta come un materiale paramagnetico* con suscettività variabile secondo la cosiddetta *legge di Curie-Weiss*

Temperatura di Curie T_c

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_c} \qquad [VI.32]$$

Legge di Curie-Weiss

dove C è una costante caratteristica del materiale; ρ è la densità e T la temperatura espressa (così come la temperatura di Curie T_c) in gradi Kelvin K.

Materiale	Composizione (%)	μ_{ri}	μ_{rm}	H_c (As/m)	$\mu_0 M_s$ (Tesla)	w_h (Joule/m^3)	T_c K
Fe (commerciale)	Fe (99,8%)	200	$5 \cdot 10^3$	80	2,16	250	1040
Fe (purificato)	Fe (99,95%)	$10 \cdot 10^3$	$200 \cdot 10^3$	4,0	2,16	30	1040
FeSi	0,5 Si	280	$3 \cdot 10^3$	72	2,14	230	1035
FeSi	3,25 Si	290	$8 \cdot 10^3$	56	2,02	160	1010
FeSi	6,5 Si	1390	$67 \cdot 10^3$	16	1,81	–	960
Mumetal	77 Ni; 5 Cu; 2 Cr; 16 Fe	$25 \cdot 10^3$	$150 \cdot 10^3$	1,2	0,75	200	670
Permalloy 45	45 Ni; 55 Fe	$3,5 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^3$	5,6	1,60	120	710
Permalloy 65	65 Ni; 35 Fe	$30 \cdot 10^3$	10^6	0,8	1,40	–	880
Permalloy 78	78 Ni; 22 Fe	$8 \cdot 10^3$	10^5	4,0	1,08	20	850
Supermalloy	79 Ni; 5 Mo; 16 Fe	$100 \cdot 10^5$	10^6	0,3	0,79	2	670

VI.6. Interpretazione microscopica dei fenomeni di magnetizzazione della materia

L'interpretazione microscopica dei fenomeni di magnetizzazione della materia è tutt'altro che semplice, né può essere considerata completamente consolidata a livello teorico. Mentre infatti è possibile trattare in termini rigorosi il comportamento di un atomo immerso in un campo di induzione magnetica noto (e per ottenere correttamente la maggior parte dei risultati di nostro presente interesse non è nemmeno necessario ricorrere alla meccanica quantistica); né è particolarmente complesso il calcolo delle medie statistiche necessarie per tradurre in termini macroscopicamente significativi le conseguenze del comportamento dei singoli costituenti microscopici; non è per contro affatto semplice il calcolo della relazione esistente fra i campi macroscopici (misurabili sperimentalmente così come indicato alla fine del par. VI.4) e il campo locale che agisce sui singoli costituenti microscopici della materia. Quest'ultimo è infatti il risultante dei campi macroscopici applicati dall'esterno al materiale, e dei campi generati da tutti i costituenti microscopici escluso quello che si sta di volta in volta considerando. Il calcolo del campo locale richiede non solo il ricorso alla meccanica quantistica; ma richiede anche una conoscenza della struttura del materiale ad un livello di dettaglio quale, di solito, non è disponibile nella pratica.

La trattazione di questi aspetti non va a tutt'oggi molto al di là della prima elaborazione semi-fenomenologica con cui Weiss interpretò i risultati di Curie; anche se molti tasselli di tale elaborazione sono stati successivamente confortati da puntuale verifica sia teorica che sperimentale.

VI.6.1. Relazione fra campo microscopico locale e campi macroscopici

Quando una particella, di carica q e velocità $\vec{v}$, si muove nel vuoto in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$, subisce la forza di Lorentz [V.3]: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Naturalmente, poiché nel vuoto la relazione fra B ed H è una relazione di semplice proporzionalità ($\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$) la stessa forza può essere espressa, dalla stessa relazione [V.3], in funzione di $\vec{H}$ ($\vec{F} = q\vec{v} \times \mu_0 \vec{H}$).

Nella materia, e in particolare nei materiali ferromagnetici, la relazione fra $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ è assai più complessa, e non sono rare le situazioni in cui tali vettori hanno addirittura verso opposto. *Ricordiamo che i campi vettoriali macroscopici $\vec{B}$ ed $\vec{H}$* sono definiti operativamente, secondo quanto abbiamo visto alla fine del par. VI.4, come i campi che si misurano eseguendo nel materiale un taglio che sia rispettivamente ortogonale ($\vec{B}$) e parallelo ($\vec{H}$) alle linee di forza.

È allora legittima la domanda su quale sia il vettore fondamentale atto a descrivere le interazioni magnetiche subite da una particella in moto nella materia. Più precisamente, se una particella si muove nella materia, ammesso che essa subisca una forza esprimibile nella forma $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{X}$ (dove $\vec{X}$ è un vettore che descrive il campo), ci poniamo la domanda: quale vettore va usato per $\vec{X}$ ($\vec{B}$, $\mu_0\vec{H}$, o una combinazione dei due) affinché la precedente relazione descriva correttamente il comportamento della particella?

È $\vec{B}$ o $\vec{H}$ il vettore fondamentale?

Dal punto di vista teorico, ciò equivale a porsi il problema se le spire di correnti atomiche siano penetrabili dalla particella sonda (nel qual caso il vettore fondamentale sarebbe $\vec{B}$) ovvero si comportino come dipoli elementari impenetrabili (nel qual caso il campo fondamentale sarebbe $\mu_0\vec{H}$). Questa questione è stata affrontata per la prima volta sperimentalmente da Rasetti intorno alla metà degli anni '40, misurando la deflessione di raggi cosmici in materiale magnetizzato. La risposta relativa a *particelle sonda di alta energia*, od a *particelle neutre* (*esperimenti con neutroni*) è che il vettore fondamentale tende ad essere $\vec{B}$ e tale diviene rigorosamente al limite per la velocità v della particella sonda tendente alla velocità della luce *c*.

Per il nostro presente scopo di interpretare i meccanismi di polarizzazione magnetica della materia, il problema non è tuttavia quello di analizzare il comportamento di una particella carica in moto nella materia, ma quello di determinare le sollecitazioni agenti su ogni singolo atomo (o molecola); e dunque ci interessa determinare il campo locale generato, nella posizione occupata da tale atomo, da tutti gli altri atomi oltre che dalle sorgenti esterne. Come vedremo fra breve, tale campo risulta essere esprimibile come combinazione lineare dei vettori macroscopici $\vec{M}$ ed $\vec{H}$ con coefficienti determinati sostanzialmente in base a considerazioni fenomenologiche. Considerato che anche tra i vettori $\vec{B}$, $\vec{M}$ ed $\vec{H}$ intercorre una relazione lineare, è in linea di principio indifferente esprimere la forza in funzione di $\vec{B}$ o di $\vec{H}$ osservando che l'unica conseguenza della scelta dell'uno o dell'altro come vettore fondamentale sarebbe quella di modificare il valore numerico dei coefficienti. Noi ci adegueremo all'uso pressoché generale, originato da motivi storici, che è quello di esprimere la forza agente sul singolo atomo in termini del campo locale $H_l = B_l/\mu_0$; e di *esprimere $\vec{H}_l$ in funzione dei vettori macroscopici $\vec{H}$ ed $\vec{M}$.*

La procedura solitamente impiegata per il calcolo della relazione che lega $\vec{H}_l$ ad $\vec{H}$ ed $\vec{M}$ è la seguente. Si immagina di ricavare, intorno all'atomo considerato, una piccola cavità sferica. La relazione che intercorre fra il campo $\vec{H}_{sf}$ presente al centro di tale cavità e i vettori macroscopici $\vec{H}$ ed $\vec{M}$ può essere ricavata con relativa semplicità mediante le stesse considerazioni che, nel caso della polarizzazione elettrica, ci hanno portato a ricavare la relazione [III.19] a partire dalla eq. [III.16]; si ottiene così:

$$\vec{H}_{sf} = \vec{H} + \frac{1}{3}\vec{M}$$

Il campo locale $\vec{H}_l$ sarà poi dato da

$$\vec{H}_l = \vec{H}_{sf} + \Sigma\vec{H}_i$$

dove con $\Sigma\vec{H}_i$ si indica la somma dei campi prodotti da tutte le altre molecole contenute nella sferetta. Se, a livello locale, il materiale ha una struttura regolare, allora *il risultante di tali campi* è nullo ($\Sigma\vec{H}_i = 0$); e la relazione cercata si riduce semplicemente a

$$\vec{H}_l = \vec{H}_{sf} = \vec{H} + \frac{1}{3}\vec{M} \qquad [VI.33]$$

che è l'esatto analogo della eq. [III.19] da noi usata per trattare la polarizzazione elettrica.

Nel caso di materiali paramagnetici e diamagnetici, la magnetizzazione $\vec{M}$ (che come vedremo è proporzionale ad $\vec{H}_l$ e dunque anche ad $\vec{H}$) è in modulo sempre molto minore di $\vec{H}$ ($M \ll H$). Il coefficiente 1/3 che compare a fattore di $\vec{M}$ nella [VI.33] (coefficiente che dipende dal modello schematico utilizzato per il calcolo della [VI.33] stessa) non gioca dunque un ruolo critico. La [VI.33] risulta infatti perfettamente adeguata alla interpretazione della fenomenologia relativa a questi materiali; ed anzi di norma il termine (1/3) $\vec{M}$ risulta trascurabile e si può porre semplicemente $\vec{H}_l \simeq \vec{H}$.

Nel caso dei materiali ferromagnetici, la magnetizzazione $\vec{M}$ è di solito molto maggiore, in modulo, rispetto ad $\vec{H}$; ed è pertanto determinante, ai fini di una corretta interpretazione dei risultati, la scelta del coefficiente che lega $\vec{H}_l$ ad $\vec{M}$. L'analisi dei dati mostra chiaramente che per questi materiali il coefficiente 1/3 nella [VI.33] non descrive correttamente la realtà; ma è necessario utilizzare un coefficiente molto più grande, dell'ordine di 10^3-10^4. In accordo con Weiss, porremo pertanto

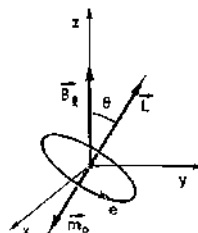
Costante di Weiss

$$\vec{H}_l = \vec{H} + \gamma \vec{M} \qquad \text{[VI.34]}$$

dove γ, detto *costante di Weiss*, ha un valore (compreso di solito per i materiali ferromagnetici fra 10^3 e 10^4) che può essere determinato sperimentalmente – come vedremo più avanti – attraverso una misura della temperatura di Curie T_c.

Domini di Weiss

Dal punto di vista fisico, Weiss giustificò i valori elevati di γ presentati dai materiali ferromagnetici ipotizzando che internamente a questi materiali esistano dei domini (detti *domini di Weiss*) ognuno dei quali è spontaneamente magnetizzato con intensità di magnetizzazione prossima al valore di saturazione; e che questi domini, per i quali l'orientazione di $\vec{M}$ è casuale in un materiale non magnetizzato, possano orientarsi con facilità in presenza di un campo anche debole. In realtà si trova che se si applica un campo $\vec{H}$ esterno, i domini magnetizzati parallelamente ad $\vec{H}$ crescono, mentre quelli magnetizzati in direzioni diverse diminuiscono di volume. Alla fine tutti i domini possono ruotare ed allinearsi con $\vec{H}$. L'esistenza dei domini di Weiss, con dimensioni lineari comprese fra una frazione di μm e alcune centinaia di μm, è stata rivelata sperimentalmente; ma il loro meccanismo di formazione non è interpretabile in base a considerazioni classiche, e fu chiarito da Heisenberg, in base a considerazioni quantistiche, oltre 20 anni dopo che Weiss aveva avanzato la sua ipotesi.

Precessione di Larmor

VI.6.2. Precessione di Larmor

Consideriamo un elettrone orbitante intorno a un atomo; e supponiamo che su di esso agisca un campo magnetico locale costante $\vec{B}_l = \mu_0 \vec{H}_l$. Sappiamo, da quanto abbiamo visto nel par. VI.1, che l'elettrone possiede un momento angolare $\vec{L}$ e un momento magnetico $\vec{m}_0 = -(e/2\,m_e)\,\vec{L}$. Nell'ipotesi, che fra poco giustificheremo, che il campo magnetico induca nel moto dell'elettrone solo una perturbazione piccola, è immediato mostrare, in base a considerazioni classiche, che il suo momento angolare $\vec{L}$ compie un moto di precessione intorno alla direzione del campo (parallelamente al quale scegliamo, per comodità, la direzione dell'asse z). L'equazione del moto (II equazione cardinale della dinamica dei sistemi) è infatti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{m}_0 \times \vec{B}_l = -\frac{e}{2\,m_e}\,\vec{L} \times \vec{B}_l \qquad \text{[VI.35]}$$

dove $\vec{M}$ è il momento della forza nella cui espressione, in base all'ipotesi sopra fatta, abbiamo posto le grandezze imperturbate $\vec{m}_0$ ed $\vec{L} = -(2\,m_e/e)\,\vec{m}_0$. Poiché, come risulta dalla [VI.35], $d\vec{L}/dt$ è ortogonale a $\vec{L}$, cambia nel tempo la direzione di $\vec{L}$ ma non il suo modulo; e poiché $d\vec{L}/dt$ è ortogonale a $\vec{B}_l$ (ovvero $dL_z/dt = 0$), la componente L_z di $\vec{L}$ parallela a $\vec{B}_l$ resta costante, e dunque $\vec{L}$ si muove lungo un

cono avente per asse $\vec{B}_l$. Ci resta dunque solo da determinare la velocità ω_L con cui $\vec{L}$ precede intorno a $\vec{B}_l$ (*precessione di Larmor*).

Per la formula di Poisson (vedi l'eq. [II.37] del testo di Fisica I) la derivata del vettore $\vec{L}$ (di modulo costante) può essere scritta nella forma:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_L \times \vec{L}$$

per cui la [VI.35] diviene

$$\vec{\omega}_L \times \vec{L} = \frac{e\vec{B}_l}{2m_e} \times \vec{L}$$

da cui segue

$$\vec{\omega}_L = \frac{e\vec{B}_l}{2m_e} \qquad [VI.36]$$

Velocità angolare di Larmor

$\vec{\omega}_L$ è detta velocità angolare di Larmor. Osserviamo che $\vec{\omega}_L$ ha non solo la stessa direzione, ma anche lo stesso verso di $\vec{B}_l$; ciò significa che $\vec{L}$ precede in senso antiorario intorno a $\vec{B}_l$.

Così come il moto orbitale dell'elettrone comporta una corrente atomica di modulo $I_a = e/T_0$ (vedi par. VI.2), così la precessione di Larmor (il cui periodo T_L vale $T_L = 2\pi/\omega_L$) comporta una *corrente di Larmor* I_L che in virtù del fatto che la carica dell'elettrone è negativa circola in senso orario intorno a $\vec{B}_l$, ed il cui modulo vale

$$I_L = \frac{e}{T_L} = \frac{e\,\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B_l}{4\pi m_e}$$

A questa corrente corrisponde un *momento magnetico di Larmor* $\vec{m}_L$ diretto in verso opposto rispetto a $\vec{B}_l$ e di modulo

$$m_L = I_L S_z = \frac{e^2 B_l}{4\pi m_e} S_z$$

dove S_z è la proiezione della superficie dell'orbita sul piano xy; ovvero $S_z = \pi(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$, dove $\bar{x}^2$ e $\bar{y}^2$ rappresentano il valore quadratico medio delle coordinate x e y dell'elettrone mentre questo percorre l'orbita. Se l'atomo è distribuito isotropicamente nello spazio, si ha $\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = (1/3)\, r^2$, dove r è il raggio dell'orbita. La precedente relazione – tenendo conto anche della direzione e del verso di $\vec{m}_L$ – può essere scritta dunque come:

$$\vec{m}_L = -\frac{e^2\vec{B}_l}{4\pi m_e}\cdot \pi \cdot \frac{2}{3} r^2 = -\frac{e^2 r^2}{6 m_e}\vec{B}_l$$

Se l'atomo ha Z elettroni (l'i-esimo dei quali abbia raggio orbitale r_i), ciascuno porta il suo contributo al momento di Larmor, che può pertanto essere scritto come

$$\vec{m}_L = -\frac{e^2\vec{B}_l}{6m_e}\left(\sum_{i=1}^{Z} r_i^2\right) = -\frac{Ze^2a^2}{6m_e}\vec{B}_l \qquad [VI.37]$$

Momento magnetico di Larmor

dove a^2 è il valor quadratico medio del raggio delle orbite elettoniche nell'atomo considerato

$$a^2 = \left(\sum_{i=1}^{Z} r_i^2\right)/Z$$

Esempio

E.VI.7. *Giustificare numericamente l'affermazione sopra fatta, che la precessione di Larmor costituisce una perturbazione piccola al moto dell'elettrone.*

Si tratta di mostrare che $\omega_L \ll \omega$, dove ω è la velocità angolare con cui l'elettrone percorre – nel modello planetario dell'atomo – la sua orbita. Affinché ciò sia, tenuto conto della [VI.36] deve essere

$$\frac{e B_l}{2 m_e} \ll \frac{2\pi}{T_0}$$

dove T_0 è il periodo orbitale dell'elettrone ($T_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-16}$ sec); ovvero

$$B_l \ll \frac{2\pi}{T_0} \frac{2 m_e}{e}$$

Inserendo i valori numerici ($m_e = 10^{-30}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C), questa condizione equivale a:

$$B_l \ll 5 \cdot 10^5 \text{ Tesla}$$

Considerato che i massimi campi macroscopicamente realizzabili sono dell'ordine del centinaio di Tesla e i massimi valori della magnetizzazione M dell'ordine dei Tesla, questa condizione per B_l è sempre verificata nella pratica.

VI.6.3. Polarizzazione per orientamento e funzione di Langevin

Polarizzazione per orientamento

La polarizzazione per orientamento, ad opera del campo locale $\vec{B}_l = \mu_0 \vec{H}_l$, dei dipoli magnetici atomici (ammesso che ogni atomo sia dotato di un momento magnetico proprio $\vec{m}_0$), è descritta dalle stesse leggi discusse nel par. III.2 per il caso della polarizzazione elettrica. In particolare, la probabilità che il dipolo $\vec{m}_0$ si orienti entro l'angolo solido elementare $d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta$ è data dalla [III.6], pur di sostituire in essa m_0 al posto di p_0 e B_l al posto di E_l:

$$dP = A \, e^{\frac{m_0 B_l \cos\theta}{KT}} \, 2\pi \sin\theta \, d\theta \qquad \text{[VI.38]}$$

Tuttavia in questo caso non sempre è lecito (e in particolare non lo è per i materiali ferromagnetici) sviluppare la [VI.38] al primo ordine nell'esponente $m_0 B_l \cos\theta / KT$; e così anche la costante A dovrà essere calcolata integrando direttamente la [VI.38] e non il suo sviluppo al primo ordine. Dunque

$$A = \frac{1}{\int_0^\pi e^{\frac{m_0 B_l \cos\theta}{KT}} \, 2\pi \sin\theta \, d\theta} \qquad \text{[VI.39]}$$

Se il materiale è isotropo, come stiamo qui assumendo, il prolema ha – come vediamo dalla [VI.38], considerato che essa è indipendente dall'azimuth φ – simmetria cilindrica intorno alla direzione di $\vec{B}_l$; e dunque l'unica componente di $\vec{m}_0$ diversa da zero è la componente $m_{0z} = m_0 \cos\theta$ (avendo assunto come al solito l'asse z nella direzione di $\vec{B}_l$) il cui valor medio, tenuto conto della [VI.38] e della [VI.39], vale

$$\overline{m_0} = \overline{m_{0z}} = \overline{m_0 \cos\theta} = \frac{\int_0^\pi m_0 \cos\theta \, e^{\frac{m_0 B_l \cos\theta}{KT}} \, 2\pi \sin\theta \, d\theta}{\int_0^\pi e^{\frac{m_0 B_l \cos\theta}{KT}} \, 2\pi \sin\theta \, d\theta}$$

Ponendo

$$\frac{m_0 \bar{B}_l}{KT} = \bar{y}\,; \qquad \cos\theta = x \tag{VI.40}$$

la precedente relazione diviene

$$\overline{m_0} = \overline{m_{0z}} = \frac{m_0 \int_{-1}^{1} e^{yx} x\, dx}{\int_{-1}^{1} e^{yx} dx}$$

Eseguendo gli integrali, si trova

$$\overline{m_0} = \overline{m_{0z}} = L(y) = m_0\left(\coth y - \frac{1}{y}\right) \tag{VI.41}$$

La funzione

Funzione di Langevin

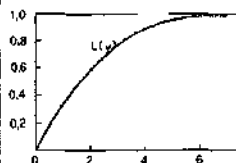
$$L(y) = m_0\left(\coth y - \frac{1}{y}\right); \qquad y = \frac{m_0 B_l}{KT} \tag{VI.42}$$

è detta *funzione di Langevin.*

La funzione di Langevin (che è dispari nella variabile y: $L(-y) = -L(y)$) ha per $y > 0$ l'andamento mostrato in figura. Considerato che lo sviluppo in serie di $\coth y$ è

$$\coth y = \frac{1}{y} + y/3 + y^3/45 + \ldots$$

segue che:

$$L(y) = y/3 + y^3/45 + \ldots \tag{VI.43}$$

Tenendo conto di quanto fin qui visto, siamo ora in grado di interpretare in termini microscopici il comportamento dei materiali diamagnetici, paramagnetici e ferromagnetici.

VI.6.4. Interpretazione microscopica del diamagnetismo

Materiali diamagnetici

Si presentano come diamagnetici i materiali i cui atomi sono privi di momento magnetico proprio; in essi la polarizzazione magnetica è dovuta solo alla precessione di Larmor. Se n è il numero di atomi per unità di volume, tenuto conto della [VI.37] si ha

$$\vec{M} = -\frac{nZe^2a^2}{6m_e}\vec{B}_l = -\frac{nZe^2a^2\mu_0}{6m_e}\vec{H}_l$$

Sostituendo in questa relazione l'espressione di $\vec{H}_l$ in funzione dei campi macroscopici (eq. [VI.33]) abbiamo:

$$\vec{M} = \frac{3\alpha_d}{3-\alpha_d}\vec{H} \qquad \text{dove} \quad \alpha_d = -\frac{nZe^2a^2\mu_0}{6m_e}$$

Poiché $|\alpha_d| \ll 1$, si ha $\frac{3\alpha_d}{3-\alpha_d} \simeq \alpha_d$; e dunque (tenendo conto della definizione [VI.28] della suscettività magnetica χ_m):

Suscettività magnetica dei materiali diamagnetici

$$\chi_{m_d} = \frac{3\alpha_d}{3-\alpha_d} \simeq \alpha_d = -\frac{nZe^2a^2\mu^0}{6m_e} \tag{VI.44}$$

Come si vede, si tratta di una quantità negativa indipendente dalla temperatura, il cui valore numerico tipico (ad es. per $a^2 \simeq 10^{-20}$ m; $n = 5 \cdot 10^{28}$ m^{-3}; $Z = 10$) è dell'ordine di 10^{-5}, in buon accordo qualitativo coi valori sperimentali.

La precessione di Larmor è presente in tutti i materiali; tuttavia nei materiali paramagnetici e ferromagnetici, i cui atomi hanno un momento magnetico proprio, la magnetizzazione per orientamento è dominante, e maschera il diamagnetismo generato dalla precessione di Larmor.

VI.6.5. Interpretazione microscopica del paramagnetismo

Materiali paramagnetici

Nei materiali paramagnetici, i cui atomi sono dotati di momento magnetico proprio, il valore di quest'ultimo e la struttura generale del materiale non consentono che all'interno del materiale stesso si stabiliscano valori molto intensi di $\vec{B}_l$; all'infuori che a temperature molto basse ($T \to 0$), l'intensità di magnetizzazione si mantiene molto lontana dal valore di saturazione.

In queste condizioni, come relazione fra $\vec{B}_l = \mu_0 \vec{H}_l$ e i campi macroscopici può essere assunta la [VI.33] (così come abbiamo fatto nel caso dei materiali diamagnetici); mentre come relazione fra la magnetizzazione $\vec{M} = n\bar{\vec{m}}_0$ e il campo locale $\vec{B}_l$ può essere presa la [VI.41] sviluppata al primo ordine secondo la [VI.43]:

$$\begin{cases} \vec{H}_l = \vec{H} + \dfrac{1}{3}\vec{M} \\ \vec{M} = n\bar{\vec{m}}_0 = \dfrac{n m_0}{3}\vec{y} = \dfrac{n m_0}{3} \cdot \dfrac{m_0 \vec{B}_l}{KT} = \dfrac{n m_0^2 \mu_0}{3KT}\vec{H}_l = \alpha_p \vec{H}_l \end{cases}$$

Nello scrivere la seconda di queste relazioni abbiamo tenuto conto che il vettore momento magnetico medio $\bar{\vec{m}}_0$, il cui modulo è dato dalla [VI.41], è diretto come $\vec{H}_l$. Combinando queste due relazioni, otteniamo:

$$\vec{M} = \frac{3\alpha_p}{3-\alpha_p}\vec{H} \qquad \text{dove} \quad \alpha_p = \frac{n m_0^2 \mu_0}{3KT}$$

Poiché anche nel caso delle sostanze paramagnetiche è $\alpha_p \ll 1$, analogamente alla [VI.44] otteniamo, per le sostanze paramagnetiche:

Suscettività magnetica dei materiali paramagnetici

$$\chi_{mp} = \frac{3\alpha_p}{3-\alpha_p} \simeq \alpha_p = \frac{n m_0^2 \mu_0}{3KT} \qquad \text{[VI.45]}$$

Vediamo che χ_{mp} è positivo, e coerentemente con la legge di Curie [VI.30] è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta T e direttamente proporzionale alla densità ρ (che nella [VI.45] appare tramite il numero di atomi per unità di volume, n).

VI.6.6. Interpretazione microscopica del ferromagnetismo

Materiali ferromagnetici

Nel caso delle sostanze ferromagnetiche la relazione fra $\vec{B}_l = \mu_0 \vec{H}_l$ e i campi macroscopici è la [VI.34]. In virtù dell'elevato valore di γ il campo di induzione magnetica locale può assumere – per elevati valori di $\vec{M}$ – una intensità dell'ordine di $5 \cdot 10^3$ Tesla. La relazione fra $\vec{M}$ e $\vec{B}_l$ è la [VI.41] (moltiplicata per il numero n di atomi per unità di volume) che tuttavia, per conseguenza degli elevati valori possibili per $\vec{B}_l$, non può essere sviluppata al primo ordine in y, e può raggiungere il valore di saturazione anche a temperatura ambiente. Le relazioni da utilizzare per trovare $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$ sono dunque

$$\begin{cases} M(y) = nL(y) = n m_0 \left(\coth y - \dfrac{1}{y}\right) \\ M = \dfrac{H_l - H}{\gamma} = \dfrac{KT}{\gamma \mu_0 m_0} y - \dfrac{H}{\gamma} \end{cases} \qquad \text{[VI.46]}$$

dalle quali va eliminato il parametro y. Nello scrivere le [VI.46] abbiamo proiettato tutti i vettori sulla direzione iniziale di $\vec{H}$, ed abbiamo scritto anche la [VI.34] in funzione di y (anziché di H_l) utilizzando la definizione di y

$$\left(y = \frac{m_0 B_l}{KT} = \frac{m_0 \mu_0 H_l}{KT}\right)$$

Le [VI.46] possono essere risolte graficamente, trovando la intersezione fra il grafico della prima di esse (curva di Langevin) e il grafico della seconda, che rappresenta una retta il cui coefficiente angolare, $\frac{KT}{\gamma \mu_0 m_0}$, è proporzionale alla temperatura assoluta T e la cui intercetta con l'asse delle ordinate, $-H/\gamma$, è proporzionale al campo macroscopico H agente sul materiale.

Consideriamo la situazione ad una fissata temperatura (cioè fissato il coefficiente angolare $\operatorname{tg}\varphi = \frac{KT}{\gamma \mu_0 m_0}$) e per un dato valore del campo $H > 0$ $\left(-\frac{H}{\gamma} < 0\right)$, così come mostrato in figura. Nelle sostanze ferromagnetiche, il valore di γ è così elevato che anche alla temperatura ambiente il coefficiente angolare $\operatorname{tg}\varphi$ è minore della pendenza della curva $nL(y)$ nel punto $y = 0$

$$\frac{KT}{\gamma \mu_0 m_0} < n m_0 L'(y)\big|_{y=0} = \frac{M_s}{3} \qquad \text{[VI.47]}$$

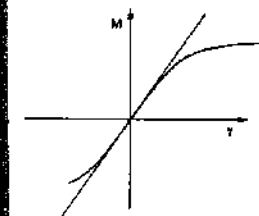
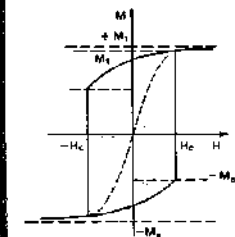
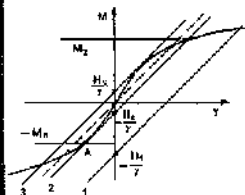
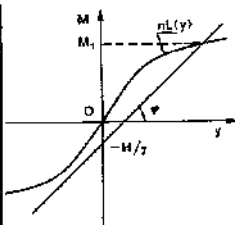
Nello scrivere questa relazione, abbiamo tenuto conto che $n m_0$ rappresenta il valore M_s di saturazione per M, e che $L'(y)\big|_{y=0}$ vale semplicemente 1/3 come discende immediatamente dalla [VI.43].

Come vediamo nella prima figura, per i valori fissati per y e per H l'intersezione avviene ad un valore di M, M_1, prossimo al valore di saturazione M_s. Senza variare la temperatura (fissato cioè φ), facciamo variare H. Se H aumenta (retta 1 della seconda figura), M si avvicina semplicemente ancora più a M_s; se H diminuisce, si arriva a un certo punto al valore H_c per cui la retta (retta 2) diviene tangente a $nL(y)$ nel punto A: in questo caso non si ha più una sola soluzione per M. Oltre alla soluzione positiva M_2 si ha anche la soluzione negativa $-M_c$. La soluzione continua a non essere unica per tutti i valori di H compresi fra H_c e $-H_c$, cioè per tutte le rette parallele comprese fra la retta 2 e la retta 3. Anzi, per tutte le rette comprese fra queste due rette estreme si hanno addirittura tre soluzioni, come si vede osservando la retta tratteggiata in figura. Per conseguenza, la relazione fra M ed H non è univoca: mettendo insieme tutte le soluzioni che si ottengono nel modo testé tracciato si ottiene un grafico del tipo mostrato in figura, che riproduce piuttosto bene le caratteristiche qualitative generali delle *curve di isteresi* che si ottengono sperimentalmente.

Immaginiamo ora di far variare la temperatura: varia per conseguenza la pendenza della retta, e precisamente aumenta la pendenza via via che aumenta la temperatura; fino a che non si raggiunge il valore della temperatura $T = T_c$ per cui la retta ha la stessa pendenza che ha la curva di Langevin nell'origine. Ciò succede quando il primo membro della [VI.47] uguaglia il secondo, per cui

$$T_c = \frac{\gamma \mu_0 m_0 M_s}{3K} \qquad \text{[VI.48]}$$

Risulta evidente dal grafico che per pendenze uguali o superiori a questa ($T \geq T_c$) la retta incontra la curva $nL(y)$ in un sol punto, per qualunque valore di H: il materiale non presenta più isteresi, e non si comporta più come ferromagnetico. La [VI.48] giustifica anche l'affermazione da noi fatta in precedenza, che una misura della temperatura di Curie consente una determinazione sperimentale indiretta del parametro γ che compare nella [VI.34]

$$\left(\gamma = \frac{3KT_c}{\mu_0 m_0 M_s} = \frac{3KT_c n}{\mu_0 M_s^2}\right).$$

Temperatura di Curie

Per valori di T maggiori di T_c, ai valori di H usuali il parametro y resta di solito abbastanza piccolo perché la prima delle [VI.46] possa essere sviluppata al primo ordine

$$M = \frac{n m_o y}{3} = \frac{M_s}{3} \frac{m_o \mu_o H_l}{KT} = \frac{T_c H_l}{\gamma T}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto della [VI.48]. Introducendo in questa relazione la seconda delle [VI.46], si ha:

$$M = \frac{T_c}{\gamma T}\left(H + \frac{1}{3} M\right)$$

Da cui, ricavando M, si ha $M = \dfrac{T_c}{\gamma (T - T_c)} H$; ovvero

Espressione microscopica della seconda legge di Curie

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{T_c}{\gamma} \frac{1}{(T - T_c)} = \frac{\mu_o n m_o^2}{3K} \frac{1}{T - T_c} \qquad \text{[VI.49]}$$

Abbiamo così dimostrato la seconda legge di Curie [VI.32], ricavando anche l'espressione, in termini delle grandezze microscopiche, della costante $C\rho$ che in essa compare

$$\left(C\rho = \frac{\mu_o n m_o^2}{3K}\right)$$

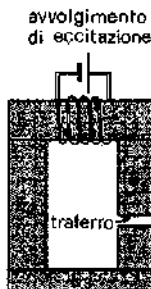
VI.7. Circuiti magnetici, elettromagneti e magneti permanenti

Come abbiamo visto, i mezzi materiali diamagnetici e paramagnetici hanno una permeabilità magnetica relativa che in condizioni normali si discosta assai poco dall'unità (tipicamente, $|\mu_r - 1|$ è compreso fra 10^{-3} e 10^{-5}). Per conseguenza, le perturbazioni che questi materiali producono sulla configurazione del campo sono assai piccole: di solito esse possono essere trascurate; e il loro calcolo, quando serva, può essere fatto in modo molto semplice con metodi perturbativi.

Al contrario, la presenza di materiali ferromagnetici - la loro geometria e le loro proprietà - influenza in maniera determinante la configurazione del campo nello spazio circostante. Per questo motivo, da un lato i materiali ferromagnetici hanno moltissime applicazioni tecniche; e d'altro lato il calcolo della configurazione del campo diviene assai complesso, per conseguenza sia della entità delle modifiche indotte dalla presenza di tali materiali, sia della complessità di comportamento – spesso non univoca – che i materiali ferromagnetici presentano.

Per la progettazione e il calcolo delle prestazioni dei dispositivi magnetici basati su materiali ferromagnetici – che sono i più comuni nella pratica – si ricorre a metodi approssimati, di cui è stata sviluppata una gamma così vasta (da metodi grafici, a metodi numerici approssimati, a modelli di simulazione, ecc.) che una loro rassegna, anche sommaria, può essere presentata solo in testi specializzati.

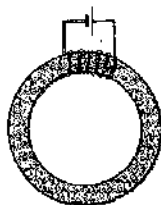
Circuiti magnetici

Qui ci limitiamo a introdurre brevemente la tecnica normalmente usata per trattare i cosiddetti *circuiti magnetici*. Con circuito magnetico si intende una successione di elementi E_i di materiale ferromagnetico, ciascuno di sezione normale piccola rispetto alla sua lunghezza, disposti in

una configurazione geometrica chiusa su se stessa, salvo eventuali brevi interruzioni (in aria o in altro materiale non ferromagnetico) dette *traferri* o *interferri*; il circuito essendo concatenato con un «*avvolgimento di eccitazione*» percorso da corrente I.

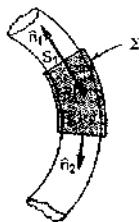
Traferri o interferri

VI.7.1. Circuiti magnetici. Definizioni e approssimazioni

Il più semplice circuito magnetico è rappresentato da un anello di materiale ferromagnetico; concatenato con l'anello è un avvolgimento di N spire di filo conduttore percorso da corrente I *stazionaria* o *quasi stazionaria* (nel senso discusso nel par. IV.15). Si tratta del sistema da noi già discusso nell'esempio E.VI.6, e che ora risolviamo con un metodo facilmente generalizzabile a circuiti di geometria più complessa.

Le equazioni cui si ricorre per la soluzione sono le equazioni fondamentali per $\vec{H}$ e $\vec{B}$, cioè, rispettivamente, il teorema della circuitazione di Ampere [VI.20]; e la proprietà generale di $\vec{B}$ per cui il suo flusso uscente da una qualunque superficie chiusa Σ è nullo:

Equazioni fondamentali

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \qquad \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{[VI.50]}$$

dove N è il numero di spire dell'avvolgimento, e la circuitazione di $\vec{H}$ è calcolata internamente all'anello, lungo la sua linea mediana. Tenuto conto della proprietà (discussa nell'esempio E.VI.5) per cui il flusso di $\vec{B}$ uscente dalla superficie laterale dell'anello è piccolo rispetto a quello che attraversa ogni sezione normale S dell'anello, applicando la seconda delle [VI.50] a una superficie Σ come quella indicata in figura si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \\ &= -\int_{S_1'} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} \simeq -B_1 S_1 + B_2 S_2 \end{aligned}$$

dove S_1 è la sezione con normale $\hat{n}_1$ uscente da Σ e S_1' la sezione con normale $\hat{n}_1'$ entrante in Σ; abbiamo tenuto conto del fatto che il flusso uscente dalla superficie laterale di Σ è trascurabile. La precedente relazione equivale a dire che:

$$\Phi = BS = \text{cost} \qquad \text{da cui} \quad B = \frac{\Phi}{S} \qquad \text{[VI.51]}$$

Se ora utilizziamo la relazione

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \left(\text{ovvero} \ \ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}\right) \qquad \text{[VI.52]}$$

La prima delle [VI.50] diviene

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{l} = \Phi \oint \frac{dl}{\mu S} \qquad \text{[VI.53]}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\vec{B}$ è parallelo a $d\vec{l}$, e Φ è costante lungo tutta la linea di integrazione. Nel passaggio intermedio

abbiamo invece usato, come detto, la [VI.52]. Abbiamo visto nel par. VI.5.3 che tale relazione può essere usata senza cautele solo se il ciclo di isteresi è molto stretto e la relazione $B = B(H)$ è lineare. In caso contrario, in fase di eccitazione (cioè quando si immette la corrente I nel circuito che alimenta il magnete) va curato che il materiale segua il ramo voluto del ciclo di isteresi, e il valore numerico di μ va scelto per tentativi fino a che non corrisponda al valore di H che risulta dalla soluzione del problema (vedi esempio E.VI.10).

La [VI.53] può essere posta nella forma:

Legge di Hopkinson

$$F = R\Phi \qquad \left(\text{con } F = NI; \quad R = \oint \frac{dl}{\mu S}\right) \qquad \text{[VI.54]}$$

Forza magnetomotrice

Riluttanza

detta *legge di Hopkinson*. La grandezza $F = NI$ (misurata in amperspire) è detta *forza magnetomotrice*; la grandezza $R = \oint \frac{dl}{\mu S}$ (misurata in amperspire su weber) è detta *riluttanza* del circuito magnetico.

È evidente l'analogia formale fra la [VI.54] e la legge di Ohm per un circuito elettrico (con la forza magnetomotrice al posto della forza elettromotrice; il flusso Φ al posto della corrente; e la riluttanza magnetica al posto della resistenza elettrica totale del circuito). Questa analogia formale discende dalla analogia fra le equazioni differenziali cui soddisfano le grandezze fondamentali che intervengono nei due fenomeni:

$$\text{circuiti magnetici:} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ F = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \end{cases}$$

$$\text{circuiti elettrici:} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{J} = 0 & (\vec{J}\text{: densità di corrente}) \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} & (\sigma\text{: conducibilità}) \\ f = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} & (f\text{: forza elettromotrice}) \end{cases}$$

Analogia formale fra circuiti magnetici e circuiti ohmici

In virtù di questa analogia formale, la soluzione di un circuito magnetico può essere eseguita con passaggi formalmente analoghi a quelli richiesti per risolvere un circuito ohmico che abbia la stessa struttura topologica e geometrica.

In particolare nel caso di un circuito magnetico di sezione S costante e lunghezza totale l ($l \gg \sqrt{S}$) la riluttanza

$$R = \oint \frac{dl}{\mu S} \qquad \text{[VI.55]}$$

assume la forma semplice

$$R = \frac{l}{\mu S} \qquad \text{[VI.55a]}$$

Questa forma è analoga alla espressione della resistenza elettrica di un conduttore ohmico di sezione S e lunghezza l (eq. [IV.20]): la permeabilità magnetica μ sta nella [VI.55a] al posto della conducibilità elettrica σ della

[IV.20], ed è questa l'origine storica del nome «permeabilità». In ogni caso, salvo i problemi summenzionati relativi alla possibilità di conoscere a priori l'effettivo valore di μ, la [VI.55] consente di calcolare la riluttanza del circuito in funzione delle sue caratteristiche geometriche ($S = S(l)$). Una volta calcolata la riluttanza, nota la corrente di eccitazione I (e dunque nota la forza magnetomotrice $F = NI$), la [VI.54] consente di calcolare immediatamente Φ (costante su ogni sezione del circuito); e quindi tramite la [VI.51] si calcola il valore di B in corrispondenza di ogni sezione S.

Si può a questo punto verificare a consuntivo se il valore di μ che era stato scelto a priori per il calcolo della riluttanza è quello che il materiale in oggetto effettivamente presenta per quel valore di B.

Il calcolo della riluttanza del circuito magnetico, sempre possibile tramite la [VI.55] quando siano noti la sezione $S(l)$ e la permeabilità μ in funzione della posizione l lungo il circuito, diviene particolarmente semplice non solo qualora il circuito sia costituito da un unico anello di sezione costante (eq. [VI.55a]); ma anche quando esso è costituito da un certo numero di elementi E_i ciascuno di sezione costante S_i, di lunghezza l_i molto maggiore delle dimensioni lineari di S_i ($l_i >> \sqrt{S_i}$), e di permeabilità μ_i. L'elemento E_i ha allora riluttanza

$$R_i = \frac{l_i}{\mu_i S_i}$$

Circuito magnetico costituito da un certo numero di elementi in serie

Se nel circuito magnetico gli elementi E_i sono disposti in serie, cosicché in virtù della [VI.51] ciascuno è attraversato dallo stesso flusso Φ, allora come risulta dalla [VI.55] la riluttanza complessiva R_S del circuito serie è data da

$$R_S = \Sigma R_i \qquad \text{[VI.56]}$$

analogamente a quanto accade alla resistenza elettrica di più resistenze poste in serie.

Ma l'analogia del circuito elettrico vale ovviamente anche qualora alcuni degli elementi siano disposti in parallelo, come nel caso degli elementi E_2 ed E_3 di figura. In ognuno dei «nodi» (ad esempio in N_1) in virtù della seconda delle [VI.50] vale la condizione che la somma algebrica dei flussi entranti nel nodo sia nulla, analogamente a quanto stabilisce la prima legge di Kirchhoff per i circuiti elettrici. Ciò comporta che la riluttanza R_p di più elementi magnetici E_i in parallelo sia legata alle riluttanze R_i dei singoli elementi dalla relazione

Elementi magnetici in parallelo

$$\frac{1}{R_p} = \Sigma \left(\frac{1}{R_i} \right) \qquad \text{[VI.57]}$$

analogamente al caso delle resistenze elettriche.

In virtù di questa completa analogia, i circuiti magnetici possono essere risolti – entro i limiti di validità della legge di Hopkinson [VI.54] – utilizzando le stesse tecniche di calcolo sviluppate nel caso dei circuiti elettrici.

Esempi

E.VI.8. *Il circuito magnetico con elementi in serie mostrato a pag. 263 è costituito da elementi E_i di isoperm; sia $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$ m; $S_1 = S_4 = 1$ dm^2; $S_2 = 0{,}25$ dm^2; $S_3 = 0{,}5$ dm^2. Se l'avvolgimento è costituito da 150 spire, ciascuna percorsa da una corrente di 100 A, determinare il valore di B internamente all'elemento E_2.*

Usiamo la legge di Hopkinson [VI.54]. Si ha nel nostro caso:

$$F = NI = 150 \text{ s} \cdot 100 \text{ A} = 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ As}$$

Poiché gli elementi E_i sono disposti in serie, la riluttanza totale R_S è data dalla [VI.56] (in cui trattandosi di isoperm porremo $\mu_r = 60$):

$$R_S = \Sigma \frac{l_i}{\mu_i S_i} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \Sigma \frac{l_i}{S_i} =$$

$$= \frac{1}{\mu_0 60}\left(\frac{1 \text{ m}}{10^{-2} \text{ m}^2} + \frac{1 \text{ m}}{0{,}25 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} + \frac{1 \text{ m}}{0{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} + \frac{1 \text{ m}}{10^{-2} \text{ m}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{12{,}56 \cdot 10^{-7} (\text{Wb/m}^2) \cdot (\text{m/As}) \cdot 60 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} (1 + 4 + 2 + 1) \text{ m} =$$

$$= 1{,}06 \cdot 10^7 \frac{\text{As}}{\text{Wb}}$$

Dunque

$$\Phi = \frac{F}{R} = \frac{1{,}5 \cdot 10^4 \text{ As}}{1{,}06 \cdot 10^7 \text{ As/Wb}} = 1{,}42 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{1{,}42 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{0{,}25 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} = 0{,}57 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 0{,}57 \text{ Tesla}.$$

E.VI.9. *Il circuito magnetico con elementi in parallelo mostrato a p. 263 è costituito da tre elementi di isoperm. Sia $l_1 = 2$ m; $l_2 = l_3 = 1$ m; $S_1 = S_2 = S_3 = 1$ dm^2. Se il circuito di eccitazione è costituito da 100 spire, ciascuna percorsa da una corrente di 100 A, calcolare il valore di B internamente ai tre elementi E_1, E_2, E_3.*

La forza magnetomotrice è

$$F = 100 \text{ s} \cdot 100 \text{ A} = 10^4 \text{ As}$$

Per il calcolo della riluttanza R osserviamo che il circuito è formato da due elementi E_2 ed E_3 fra di loro in parallelo

$$\left(R_p = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right)$$

e in serie ad essi l'elemento E_1. La riluttanza totale è dunque

$$r = R_1 + R_p = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = R_1 + \frac{R_2}{2}$$

avendo tenuto conto del fatto che nel caso in esame è $R_3 = R_2$. Numericamente si ha:

$$R = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{2 S_2}\right) = 33 \cdot 10^5 \frac{\text{As}}{\text{Wb}}$$

Si ha dunque

$$\Phi = \frac{F}{R} = \frac{10^4 \text{ As}}{33 \cdot 10^5 \text{ As/Wb}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Va ora tenuto conto del fatto che nell'elemento E_1 il flusso Φ_1 è pari a Φ; ma negli elementi in parallelo E_2 ed E_3 il flusso si suddivide in parti inversamente proporzionali alle riluttanze. Nel caso in esame, essendo $R_2 = R_3$, si ha:

$$\Phi_1 = \Phi \qquad \Phi_2 = \frac{\Phi}{2} \qquad \Phi_3 = \frac{\Phi}{2}$$

E dunque:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{10^{-2} \text{ m}^2} = 0{,}3 \text{ Tesla}; \qquad B_2 = B_3 = \frac{B_1}{2} = 0{,}15 \text{ Tesla}$$

E.VI.10. *Supponiamo ora che lo stesso circuito magnetico analizzato nell'esempio E.VI.9 sia realizzato in ferro dolce. Il ciclo di isteresi del materiale è molto stretto, e la relativa curva $B = B(H)$ è quella riportata nella tabella qui a fianco. Se le 100 spire di eccitazione del circuito magnetico sono percorse da una corrente $I = 5$ A, discutere quale valore di μ_r vada scelto per il calcolo della riluttanza.*

H (As/m)	B (Tesla)	$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$
100	0,10	800
200	0,23	920
300	0,40	1060
400	0,61	1190
500	0,91	1430
600	1,28	1730
700	1,60	1820
800	1,80	1800
900	1,90	1680
1000	2,00	1590
1100	2,08	1510
1200	2,12	1410

Cominciamo con lo scegliere un valore di prova per μ_r, ad esempio quello corrispondente a $H = 500$ As/m ($\mu_r = 1430$). La riluttanza del circuito è allora data da:

$$R = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{2 S_2}\right) = 1{,}41 \cdot 10^5 \frac{\text{As}}{\text{Wb}}$$

In corrispondenza risulta:

$$\Phi = \frac{F}{R} = \frac{100 \text{ s} \cdot 5 \text{ A}}{1{,}41 \cdot 10^5 \text{ As/Wb}} = 3{,}55 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

e quindi:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{3{,}55 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{10^{-2} \text{ m}^2} = 0{,}355 \text{ Tesla} \qquad B_2 = B_3 = 0{,}178 \text{ Tesla}$$

In corrispondenza di questi valori di B non è $\mu_r = 1430$ come avevamo scelto tentativamente; ma interpolando i valori della tabella si ha piuttosto:

$$\mu_{r1} = 1025 \text{ (in corrispondenza di } B = 0{,}355 \text{ Tesla)}$$

$$\mu_{r2} = \mu_{r3} = 872 \text{ (in corrispondenza di } B = 0{,}178 \text{ Tesla)}$$

Ripetiamo dunque il calcolo, in seconda approssimazione, in corrispondenza di questi valori di μ_r:

$$R = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{l_1}{\mu_{r1} S_1} + \frac{l_2}{\mu_{r2} \cdot 2 \cdot S_2}\right) = 2{,}01 \cdot 10^5 \frac{\text{As}}{\text{Wb}}$$

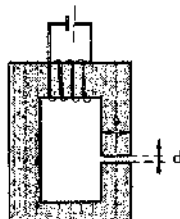
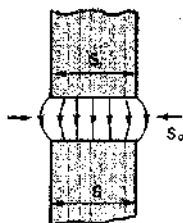
In corrispondenza si ha:

$$\Phi = \frac{F}{R} = \frac{500\ \text{As} \cdot 10^{-5}}{2{,}01\ \text{As/Wb}} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

e dunque

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = 0.25\ \text{Tesla}; \qquad B_2 = B_3 = 0{,}125\ \text{Tesla}$$

I corrispondenti valori di μ_{r1} e μ_{r2} (rispettivamente $\mu_{r1} = 940$; $\mu_{r2} = 825$) sono assai più vicini al valore usato nel calcolo di quanto non lo fossero nel calcolo di prima approssimazione. Per migliorare ancora l'approssimazione si potrà ripetere il calcolo in corrispondenza di questi nuovi valori; e così via fino a che non si raggiunge l'approssimazione voluta.

VI.7.2. Elettromagneti

Elettromagnete

Un elettromagnete è un circuito magnetico, generalmente realizzato in materiale ferromagnetico con ciclo di isteresi stretto (basso campo residuo), dotato di un traferro. Un tale sistema può essere trattato in buona approssimazione coi metodi discussi nella sezione VI.7.1 solo se il traferro è rappresentato da un taglio eseguito nel circuito magnetico lungo una sezione normale, e di spessore d piccolo rispetto alle dimensioni lineari della sezione stessa ($d \ll \sqrt{S}$): solo in questo caso infatti il flusso disperso si mantiene trascurabile anche in corrispondenza del traferro; e mantenendosi trascurabili gli effetti di bordo potremo ritenere che anche nel traferro $\vec{B}$ sia costante sulla sezione e ortogonale ad essa, in modo che possiamo continuare a scrivere anche in essa la [VI.51], $\Phi = BS = \text{cost}$.

Se queste ipotesi sono verificate, il calcolo di B e di H (sia dentro il materiale che nel traferro) può essere condotto in maniera molto semplice secondo le linee sviluppate nella sezione VI.7.1 e in particolare usando la legge di Hopkinson [VI.54]: nel calcolo della riluttanza si dovrà semplicemente tener conto, fra gli altri «elementi», anche del traferro. Osserviamo al riguardo che poiché negli elementi ferromagnetici (detti nel loro complesso *nucleo* dell'elettromagnete) μ_r è molto maggiore che in aria (dove $\mu_r \simeq 1$), un traferro di spessore d equivale, dal punto di vista della sua riluttanza, a un elemento ferromagnetico di lunghezza $l = \mu_r d \gg d$; ad esempio se $\mu_r = 1000$, un traferro di un centimetro contribuisce alla riluttanza del circuito quanto un elemento ferromagnetico di lunghezza 10 m e di pari sezione.

Nucleo dell'elettromagnete

Osserviamo ancora che, nell'approssimazione in cui si possano trascurare gli effetti di bordo nel traferro (e quindi la sua sezione «efficace» S_o sia pari alla sezione S del contiguo elemento ferromagnetico) il vettore induzione magnetica ha nel traferro stesso un valore B_o pari al valore B che esso ha internamente al nucleo

$$B_o = \frac{\Phi}{S_o} = \frac{\Phi}{S} = B$$

Al contrario, il vettore H subisce una discontinuità:

$$H_o = \frac{B_o}{\mu_o} = \frac{B}{\mu_o}; \qquad H = \frac{B}{\mu_o \mu_r} \Rightarrow \frac{H_o}{H} = \mu_r$$

Nel traferro, H ha un valore μ_r volte più grande che nel nucleo; ciò è coerente con le condizioni di raccordo per B ed H (B_n è continuo, H_n no).

Esempio

E.VI.11. *Nel circuito magnetico analizzato nell'esempio E.VI.8, viene realizzato un traferro di $d = 5$ cm a metà dell'elemento E_4. Calcolare il valore di B_0 nel traferro stesso.*

La lunghezza del circuito in isoperm diminuisce di 5 cm rispetto alla configurazione calcolata nell'esempio E.VI.8; ciò tuttavia modifica in misura trascurabile la sua riluttanza, che possiamo assumere valere ancora $R_S = 1{,}06 \cdot 10^7$ As/Wb. A questa va tuttavia aggiunta ora la riluttanza R_0 del traferro, che vale

$$R_0 = \frac{d}{\mu_0 S} = \frac{5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{12{,}56 \cdot 10^{-7}\ (\text{Wb/As}) \cdot (\text{m/As}) \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2} = 0{,}4 \cdot 10^7 \frac{\text{As}}{\text{Wb}}$$

La riluttanza totale R_T dell'elettromagnete vale dunque

$$R_T = R_S + R_0 = (1{,}06 + 0{,}4) \cdot 10^7 \frac{\text{As}}{\text{Wb}} = 1{,}46 \cdot 10^7 \frac{\text{As}}{\text{Wb}}$$

Si ha pertanto

$$\Phi = \frac{1{,}5 \cdot 10^4\ \text{As}}{1{,}46 \cdot 10^7\ \text{As/Wb}} = 1{,}03 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

$$B_0 = \frac{\Phi}{S_0} = \frac{1{,}03 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}}{10^{-2}\ \text{m}^2} \simeq 0{,}10 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

Qualora il nucleo dell'elettromagnete abbia tutto sezione costante (sia S_0), le sue condizioni di lavoro possono essere determinate facilmente per via grafica anche qualora la curva $B = B(H)$ non sia lineare.

La prima delle [VI.50] può essere scritta infatti, in questo caso, semplicemente come:

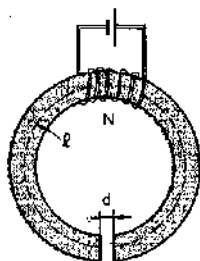
$$NI = H \cdot l + H_0 \cdot d = H \cdot l + \frac{B}{\mu_0} d$$

(nel traferro, si ha infatti $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$, visto che $B = B_0$).

Da cui

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{d} - \frac{H \cdot l\, \mu_0}{d}$$

Nel piano H, B, questa relazione rappresenta una retta, con intercetta con l'asse delle ordinate pari a $\frac{\mu_0 NI}{d}$ (e dunque proporzionale alla corrente di eccitazione I) e coefficiente angolare $(-l\mu_0/d)$. La soluzione per B si ottiene semplicemente determinando graficamente la intersezione fra tale retta e la curva $B = B(H)$ relativa al materiale che costituisce il nucleo:

$$\begin{cases} B = \dfrac{\mu_0 NI}{d} - \dfrac{l\mu_0}{d} H \\ B = B(H) \end{cases} \qquad \text{[VI.58]}$$

Esempio

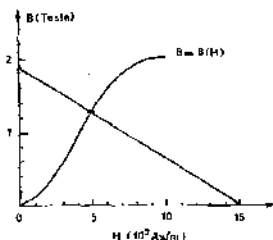
H (As/m)	B (Tesla)
$1 \cdot 10^3$	0,15
$2 \cdot 10^3$	0,3
$3 \cdot 10^3$	0,6
$4 \cdot 10^3$	0,95
$5 \cdot 10^3$	1,3
$6 \cdot 10^3$	1,6
$7 \cdot 10^3$	1,8
$8 \cdot 10^3$	1,95
$9 \cdot 10^3$	2,05
$10 \cdot 10^3$	2,10

E.VI.12. *Consideriamo un elettromagnete, con il nucleo ad anello come quello mostrato in figura; la curva $B = B(H)$ relativa al materiale ferromagnetico con cui il nucleo è costruito sia quella tabulata a fianco. Sia inoltre (usando i simboli utilizzati anche nella [VI.58]): $d = 1$ cm; $l = 1$ m; $N = 1000$ spire; $I = 15$ Ampere. Determinare graficamente il valore di B.*

Nel caso in esame, la retta corrispondente alla prima delle [VI.58] ha intercette, rispettivamente con l'asse H e con l'asse B:

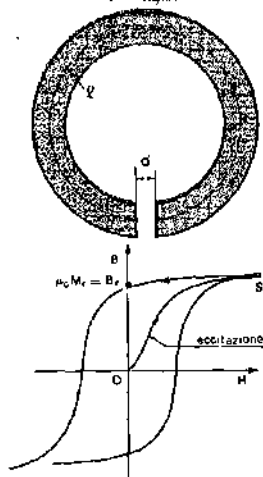
$$(B = 0):\ H = \frac{NI}{l} = \frac{1{,}5 \cdot 10^4\ \text{As}}{1\ m} = 1{,}5 \cdot 10^4\ \frac{\text{As}}{\text{m}}$$

$$(H = 0):\ B = \frac{\mu_0 NI}{d} = \left(\frac{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}5 \cdot 10^4}{10^{-2}}\right) \text{Tesla} = 1{,}88\ \text{Tesla}$$

Nella figura a fianco, il grafico di questa retta è riportato insieme al grafico della curva $B = B(H)$ del materiale in questione: l'intersezione corrisponde a un valore di B pari all'incirca a $B = 1{,}3$ Tesla.

VI.7.3. Magneti permanenti

Nei magneti permanenti, il campo è *generato* dal momento magnetico proprio (magnetizzazione residua) del nucleo. Consideriamo, a titolo di esempio, un magnete di forma particolarmente semplice, cioè il solito anello dotato di un piccolo traferro; il materiale che costituisce il nucleo sarà ora un materiale a ciclo di isteresi molto largo, caratterizzato dunque da un elevato valore della magnetizzazione residua M_r (ovvero della induzione magnetica residua $B_r = \mu_0 M_r$). Nella pratica, la geometria di un magnete permanente è di solito meno simmetrica di quella che noi qui consideriamo: sono assai comuni magneti a ferro di cavallo; ovvero magneti costituiti da un *cilindro* ad alta magnetizzazione residua posto fra due «bracci» di ferro dolce sagomati in modo da realizzare un traferro con le dimensioni geometriche desiderate. Anche in questi casi, geometricamente più elaborati, la trattazione procede in maniera sostanzialmente analoga a quella che noi sviluppiamo qui riferendoci alla semplice geometria toroidale.

Supponiamo che il ciclo di isteresi del materiale sia quello rappresentato in figura. Inizialmente, mediante un avvolgimento di eccitazione, al materiale viene applicato un campo H (positivo, secondo il verso convenzionalmente scelto per l'asse rappresentativo) che seguendo la curva di prima magnetizzazione porta il materiale fino al punto S di saturazione. A questo punto viene fatta gradualmente scendere fino a zero la corrente di eccitazione (e dunque H) e l'avvolgimento di eccitazione viene rimosso: il materiale percorre all'indietro il ramo superiore del ciclo di isteresi (in cui è $B > 0$, cioè diretto come il campo H di eccitazione). È però facile comprendere che una volta eliminato il circuito di eccitazione il materiale non si porta nel punto di lavoro $H = 0$, $B = B_r$; bensì in un punto della caratteristica situato nel secondo quadrante (H_L, B_L, con $H_L < 0$ e $B_L > 0$).

Chiamiamo infatti H e B i valori dei campi internamente al materiale, e H_0, B_0 i corrispondenti valori nel traferro; poiché la corrente di eccitazione è nulla (e dunque è nulla la circuitazione di H) e poiché B non

subisce discontinuità passando dal nucleo al traferro ($B = B_0$) possiamo scrivere:

$$0 = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = Hl + H_0 d \qquad B = B_0 = \mu_0 H_0$$

da cui ricaviamo

$$H = -H_0 \frac{d}{l} = -\frac{B_0}{\mu_0}\frac{d}{l} = -\frac{B}{\mu_0}\frac{d}{l} \qquad \text{[VI.59]}$$

Calcolo del punto di lavoro di un magnete permanente

Essendo $B = B_0 > 0$, è $H < 0$. La [VI.59], che lega fra di loro B e H, è una retta passante per l'origine, di pendenza negativa pari a $B/H = -(\mu_0 l/d)$. Per trovare gli effettivi valori di B e H (B_L, H_L), si può procedere graficamente, trovando l'intersezione fra questa retta e il ramo della curva di isteresi appartenente al secondo quadrante.

Osserviamo che passando dal nucleo al traferro, mentre come già detto B è continuo ($B = B_0$), H non solo subisce una discontinuità, ma cambia addirittura di segno: nel traferro esso è parallelo e concorde a B ($B_0 = \mu_0 H_0$), mentre nel nucleo esso ha verso opposto rispetto a B (ed anche rispetto ad M); esso viene anche detto usualmente *campo smagnetizzante*.

Qualitativamente, lo stesso fenomeno – al passaggio dal nucleo al traferro – succede nei magneti permanenti di diversa geometria; ad esempio l'andamento delle linee di forza di $\vec{H}$ e $\vec{B}$ per un cilindro uniformemente magnetizzato è quello mostrato in figura.

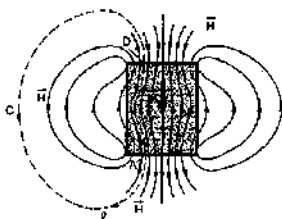
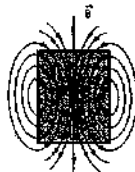
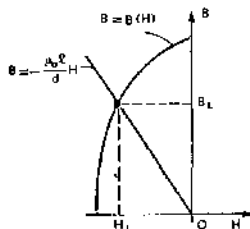
Il fatto che $\vec{H}$ cambi segno al passaggio tra il materiale e l'aria all'esterno è conseguenza immediata della legge di circuitazione di Ampere. Infatti, se per la circuitazione di $\vec{H}$ consideriamo, per esempio, la linea chiusa ed orientata l tratteggiata in figura, si ha

$$\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{ACD} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

L'integrale relativo al tratto esterno ACD è positivo ($\vec{H}$ e $d\vec{l}$ concordi) e ciò implica che l'integrale $\int_{DA} \vec{H} \cdot d\vec{l}$, relativo al tratto interno di l, sia negativo. Il che equivale a dire che, nel materiale magnetico, $\vec{H}$ deve essere antiparallelo rispetto a $d\vec{l}$. Ciò spiega l'inversione di segno di $\vec{H}$ al passaggio dall'aria al materiale magnetico.

È da osservare che l'ipotesi di magnetizzazione uniforme per il cilindro considerato è adeguata se il cilindro ha un'altezza molto maggiore delle dimensioni trasversali delle basi. In realtà la magnetizzazione uniforme si ha solo per materiali a forma di ellissoidi di rotazione con asse parallelo a $\vec{B}$.

Nella figura che mostra le linee di forza del vettore $\vec{H}$ generato da un cilindro uniformemente magnetizzato, l'andamento è quello tipico di un campo elettrico da dipolo elettrico con cariche superficiali localizzate sulle basi del cilindro. È come se le «sorgenti» del vettore $\vec{H}$ fossero localizzate sulle due basi del cilindro magnetizzato.

Questa osservazione è generalizzabile ricordando che, nella deduzione delle formule [VI.16] si è fatto uso dell'espressione [VI.15] per il potenziale vettore $\vec{A}$, nella quale ogni volume elementare $d\tau$ è considerato possedere un momento di dipolo magnetico $d\vec{m} = \vec{M}\, d\tau$. Osserviamo che è piuttosto stretta l'analogia formale con il caso dei dielettrici polarizzati, nei quali l'elemento di volume $d\tau$ assume un momento di dipolo elettrico $d\vec{p} = \vec{P}\, d\tau$.

In forza di questa analogia, un dipolo magnetico può anche essere pensato come una coppia di *cariche magnetiche* o *poli magnetici* distinti e di segno opposto, disposti rigidamente ad una certa distanza.

Poli magnetici

È chiaro che si tratta di un puro schema matematico, dal momento che manca ogni evidenza sperimentale dell'esistenza di *poli magnetici isolati*. L'utilità di tale schema consiste essenzialmente nella possibilità di usare, in un certo numero di problemi di magnetismo nella materia, risultati già stabiliti per i dielettrici in campo elettrico. L'analogia tra le proprietà dei vettori $\vec{P}$ ed $\vec{M}$ porta immediatamente a considerare, in corrispondenza delle note relazioni per i dielettrici polarizzati:

$$\begin{cases} \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \\ \rho_p = -\operatorname{div} \vec{P} \end{cases}$$

delle analoghe relazioni per i materiali magnetizzati:

$$\begin{cases} \sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n} \\ \rho_m = -\operatorname{div} \vec{M} \end{cases}$$

dove σ_m e ρ_m rappresentano «*densità di cariche magnetiche*» di superficie e di volume, rispettivamente.

Sorgenti di $\vec{H}$

Si vede immediatamente che le densità di carica magnetica così formalmente introdotte rappresentano le «*sorgenti*» del campo magnetico $\vec{H}$.

Infatti, come per il vettore spostamento elettrico $\vec{D}$ le sorgenti sono le cariche libere (o localizzate) di densità di volume ρ, legate a $\vec{D}$ dalla relazione $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$, così, per quanto riguarda le sorgenti di $\vec{H}$, basterà valutare la funzione $\operatorname{div}\vec{H}$. Dunque

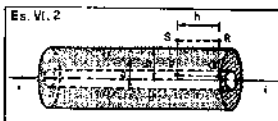
$$\operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \vec{B} - \operatorname{div} \vec{M} = -\operatorname{div} \vec{M} = \rho_m ,$$

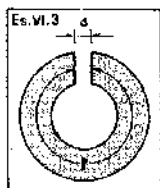
da momento che $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ e $\rho_m = -\operatorname{div}\vec{M}$.

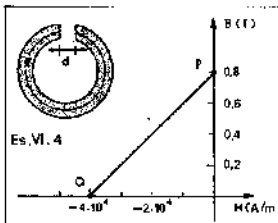
Quando si ha a che fare con materiale uniformemente magnetizzato, come per esempio, in buona approssimazione, nel caso di un magnete permanente a forma di cilindro allungato, si ha che $\vec{M}$ è uniforme all'interno e varia bruscamente nell'attraversamento delle basi del cilindro (all'esterno $\vec{M} = 0$). Dunque si ha che: $\rho_m = 0$, $\sigma_m = M$ (dal momento che $\vec{M}$ è perpendicolare alle basi del cilindro). Le basi del cilindro sono usualmente chiamate poli (nord e sud) nel caso di calamite a barretta od a ferro di cavallo.

Esercizi del VI capitolo

VI.1. Un anello toroidale a sezione costante, di materiale ferroso isotropo ed omogeneo, ha lunghezza media $l = 20$ cm ed è posto in aria. Le dimensioni lineari della sezione trasversale sono piccole rispetto ad l. Sull'anello è distribuito uniformemente un certo numero di spire percorse da una corrente mantenuta costante nel tempo. In queste condizioni la permeabilità magnetica relativa dell'anello è $\mu_r = 1500$, da assumersi costante. Calcolare la variazione percentuale ($\Delta B/B$) del campo B se dall'anello, a parità di tutto il resto, viene asportata una sottile fettina di spessore $\delta = 2$ mm.

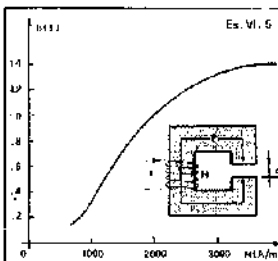
(Risposta: $\Delta B/B = -0{,}94$)

VI.2. Un lungo filo rettilineo, percorso da corrente stazionaria $i = 15$ A, costituisce l'asse di un tubo di materiale ferromagnetico omogeneo ed isotropo, di permeabilità magnetica relativa costante $\mu_r = 400$. Tra filo e tubo non c'è alcun collegamento elettrico ed il sistema è nel vuoto.
Ricavare l'andamento dei campi vettoriali $\vec{H}$ e $\vec{B}$ in funzione della distanza r dall'asse del sistema e calcolare il flusso del vettore intensità di magnetizzazione $\vec{M}$ attraverso il rettangolo $PQRS$ indicato in figura ($a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $h = 10$ cm).

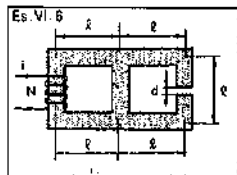
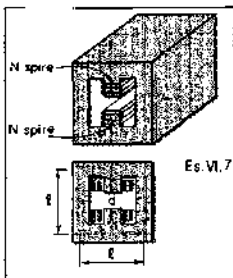
(Risposta: $\Phi_{PQRS}(\vec{M}) = 48{,}7$ Am)

VI.3. Un magnete permanente a forma toroidale ha il nucleo magnetizzato di lunghezza $l = 20$ cm ed il traferro in aria di spessore $d = 2$ cm. Il valore del vettore induzione magnetica misurato nel traferro è $B = 0{,}5$ T.
Quanto vale l'intensità di magnetizzazione M nel magnete?

(Risposta: $M = 4{,}38 \cdot 10^5$ A/m)

VI.4. Un magnete permanente a forma toroidale, di lunghezza $l = 25$ cm e spessore del traferro in aria $d = 2$ cm, è costituito da una lega la cui curva di magnetizzazione nel secondo quadrante può essere approssimata da un tratto di retta passante per i punti del piano (H; B): $P\,(0;\,0{,}8)$ e $Q\,(-4 \cdot 10^4;\,0)$.
Calcolare il campo B nel traferro.

(Risposta: $B = 0{,}35$ T)

VI.5. Un elettromagnete è costituito da un materiale ferromagnetico il cui ciclo di isteresi è, per la parte che interessa il problema, riportato in figura. La lunghezza della parte ferromagnetica dell'elettromagnete è $l = 80$ cm e la bobina di alimentazione consta di $N = 30$ spire. Determinare il valore della corrente necessaria per creare nel traferro un campo $B = 1$ T per i due diversi valori dello spessore del traferro stesso (in aria):
a) $d_1 = 1$ cm
b) $d_2 = 2$ cm
(Trascurare il flusso disperso)

(Risposte: $i_1 = 318{,}6$ A; $i_2 = 584{,}1$ A)

VI.6. Il circuito magnetico mostrato in figura è costituito da sette rami a forma di parallelepipedo di altezza $l = 20$ cm e sezione S. La parte ferromagnetica del circuito ha permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 300$, mentre il traferro del ramo esterno è in aria ed ha spessore $d = 0{,}5$ cm.
Calcolare il campo B_0 nel traferro nel caso in cui per l'alimentazione del magnete si abbia $N = 200$ spire ed $i = 20$ A.

(Risposta: $B_0 = 0{,}167$ T)

VI.7. Il magnete ad H schematizzato in figura è frequentemente usato per deflettere particelle cariche veloci. L'avvolgimento è formato da due bobine aventi ciascuna lo stesso numero $N = 50$ di spire ed alimentate in modo da produrre campi magnetici di verso concorde nel traferro. La lunghezza media di un lato della sezione è $l = 1$ m e lo spessore del traferro in aria è $d = 5$ cm. La sezione S parallela agli avvolgimenti è uniforme.
Se la permeabilità magnetica relativa è $\mu_r = 1000$ nel punto di lavoro del ciclo di isteresi scelto, calcolare il campo B_0 nel traferro quando la corrente circolante negli avvolgimenti assume il valore $i = 400$ A.

(Risposta: $B_0 = 0{,}97$ T)

VI.8. Un cilindro omogeneo, di altezza $h = 60$ cm e raggio di base $R = 10$ cm, di materiale ferromagnetico, viene magnetizzato parallelamente alle sue generatrici e, data la forma, la sua magnetizzazione può essere considerata uniforme con buona approssimazione.
Se l'intensità di magnetizzazione è $M = 3 \cdot 10^5$ A/m, calcolare il campo $B(o)$ al centro del cilindro.

(Risposta: $B(o) \simeq 0{,}36$ T)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del VI capitolo

VI.1. Trascurare il flusso magnetico disperso nel traferro in aria ed assumere che il valore di μ_r non vari. Applicare la legge di Hopkinson per il calcolo dei campi B_{st} (senza traferro) e B_{ct} (con traferro), noti i quali si calcola la variazione percentuale richiesta $(\Delta B/B) = (B_{ct} - B_{st})/B_{st}$.

VI.2. Per l'andamento di $\vec{H}$ e $\vec{B}$ applicare il teorema di Ampere tenendo conto della simmetria cilindrica della configurazione e ricordare le condizioni [VI.22] e [VI.23] per i vettori magnetici al passaggio da un mezzo ad un altro. Per il vettore $\vec{M}$ riferirsi alla [VI.19].

VI.3. Utilizzare il teorema di Ampere nella forma [VI.59] per i magneti permanenti. Per determinare la permeabilità magnetica relativa μ_r utilizzare anche la proprietà di continuità della componente normale di $\vec{B}$ al passaggio dal traferro al ferro.

VI.4. Per il calcolo del punto di lavoro del magnete permanente riferirsi alla [VI.59].

VI.5. Applicare al vettore $\vec{H}$ il teorema della circuitazione di Ampere, sapendo che il vettore $\vec{H}$ nel ferro e nel traferro è ricavabile dalla conoscenza di B e della curva di isteresi.

VI.6. Individuare il circuito elettrico equivalente al circuito magnetico dato, operando la trasposizione:
forza magnetomotrice (Ni) → f.e.m. (f)
riluttanza (R) → resistenza (R)
flusso di B $(\Phi(B))$ → corrente (i)
ed adoperando le nozioni acquisite per i circuiti elettrici a due maglie.

VI.7. Applicare la legge di Hopkinson al circuito magnetico individuando il circuito elettrico equivalente al circuto magnetico dato (vedi esercizio VI.6).

VI.8. Usare le relazioni fondamentali [VI.16] tra la magnetizzazione $\vec{M}$ e le correnti microscopiche, allo scopo di ridurre il magnete dato ad un circuito macroscopico percorso da corrente.
La corrente superficiale, che scorre con linee di flusso circolari su piani perpendicolari all'asse del cilindro, può essere schematizzata come un solenoide di lunghezza finita, il cui campo $\vec{B}$ sull'asse è stato discusso nell'esempio [E.V.12].

Capitolo settimo

Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo. Terza e quarta equazione di Maxwell

Nei capitoli precedenti abbiamo trattato, indipendentemente l'uno dall'altro, il campo elettrico e il campo magnetico in condizioni stazionarie. Le conclusioni a cui siamo giunti sono riassunte nelle quattro equazioni di Maxwell in condizioni stazionarie; cioè – riferendoci per semplicità al caso del vuoto – nelle equazioni:

I) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ [I.36] II) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ [V.29]

III) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ [I.83] IV) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ [V.34]

Due di queste equazioni riguardano il campo elettrico $\vec{E}$ e le altre due il campo di induzione magnetica $\vec{B}$: cosicché $\vec{E}$ e $\vec{B}$ appaiono come grandezze fisiche fra di loro indipendenti. Tuttavia le equazioni relative a $\vec{E}$ e quelle relative a $\vec{B}$ sono solo in apparenza completamente separate. Infatti le stesse cariche elettriche (la cui densità ρ rappresenta la sorgente del campo elettrico), quando sono in movimento, danno luogo a una densità di corrente $\vec{j}$, e divengono dunque sorgente di un campo $\vec{B}$. Poiché il fatto che le cariche siano ferme o si muovano è un fatto *relativo* (cioè dipendente dal sistema di riferimento scelto per descrivere il fenomeno), diviene parimente relativo il fatto che si abbia a che fare con un campo elettrico o con un campo magnetico: di ciò ci siamo occupati in qualche maggior dettaglio nel paragrafo V.7, in cui abbiamo visto che ciò che in un sistema di riferimento appare come un campo elettrico, può apparire come un campo magnetico in un altro sistema di riferimento (o viceversa).

Già da queste prime considerazioni, appare naturale interpretare il campo elettrico e il campo magnetico come manifestazioni diverse di una unica entità fisica, il *campo elettromagnetico*.

Campo elettromagnetico

Questa conclusione verrà rafforzata da quanto vedremo in questo capitolo, in cui tratteremo fenomeni non stazionari. Come punto di partenza illustreremo una serie di fatti sperimentali, che ci porteranno a enunciare una legge fisica generale (detta legge di Faraday-Neumann) secondo cui un

campo elettrico viene generato ogni qualvolta si sia in presenza di un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ variabile nel tempo.

Saremo così naturalmente portati a considerare la derivata temporale di $\vec{B}$ come una sorgente di $\vec{E}$, da includersi al secondo membro della [I.83] (oltre alla sorgente ρ/ε_0 già presente al secondo membro della [I.36]). Analogamente, la derivata temporale di $\vec{E}$ risulterà essere una sorgente di $\vec{B}$, portandoci un termine aggiuntivo (proporzionale a $\partial\vec{E}/\partial t$) al secondo membro della [V.34]. Pertanto, in condizioni non stazionarie le equazioni di Maxwell relative a $\vec{E}$ non risultano più disaccoppiate da quelle relative a $\vec{B}$. Così scritte, tali equazioni saranno adeguate a trattare i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in condizioni del tutto generali, includendo in termini compatti ed eleganti nella teoria tutte le connessioni fra $\vec{E}$ e $\vec{B}$ che fanno di essi due diverse manifestazioni del campo elettromagnetico. Anche la covarianza relativistica dell'elettromagnetismo apparirà allora in tutta la sua generalità.

VII.1. Induzione elettromagnetica. La legge di Faraday-Neumann

Legge di Faraday-Neumann

Consideriamo un circuito (a) costituito da una linea chiusa l realizzata mediante un filo conduttore. In serie al circuito disponiamo un galvanometro G, mediante il quale è possibile misurare l'eventuale passaggio di corrente in (a). Si riscontra sperimentalmente che il galvanometro indica il passaggio di una corrente $I_a \neq 0$ ad esempio nei seguenti casi:

1) il circuito (a) si trova in vicinanza di un circuito (b) percorso da corrente $I_b(t)$ variabile nel tempo (ad esempio all'atto di apertura o chiusura dell'interruttore T nel circuito (b) comprendente un generatore di forza elettromotrice f);

2) quando il circuito (b) percorso da corrente I_b (eventualmente costante nel tempo) viene spostato con velocità $\vec{v}_b$ rispetto al circuito (a) (o viceversa);

3) quando il circuito (a) si trova in vicinanza di un magnete permanente, e quest'ultimo viene spostato con velocità $\vec{v}$ rispetto al circuito (o viceversa);

4) quando il circuito viene deformato, essendo localizzato in una posizione in cui è presente un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ (eventualmente uniforme e costante nel tempo).

Faraday spiegò queste ed altre analoghe osservazioni sperimentali individuando la caratteristica comune a tutte esse: *il fatto che il circuito fosse immerso in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ il cui flusso $\Phi(\vec{B})$ concatenato con la linea l fosse variabile nel tempo.*

Più precisamente i fatti summenzionati sono tutti descritti dalla seguente legge detta *legge di Faraday-Neumann*:

Forza elettromotrice indotta

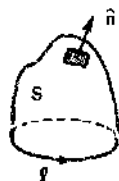
se un circuito è immerso in un campo di induzione magnetica il cui flusso $\Phi(\vec{B})$ concatenato col circuito stesso sia variabile nel tempo, allora in esso si genera una forza elettromotrice f_i (detta forza elettromotrice indotta) data da:

$$f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \qquad \text{[VII.1]}$$

Questa legge fondamentale verrà da noi illustrata ed approfondita nel seguito attraverso numerosi esempi e sviluppi.

Osserviamo intanto che per la definizione [IV.29] di forza elettromotrice si ha:

$$f_i = \oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \qquad \text{[VII.2]}$$

Campo elettromotore indotto

dove il campo elettromotore $\vec{E}_i$ è detto *campo elettromotore indotto*; la circuitazione è eseguita sulla linea l che costituisce il circuito. Per sua parte, il flusso $\Phi(\vec{B})$ concatenato con l è definito come:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \text{[VII.3]}$$

dove S è una qualunque* superficie avente l come contorno, e orientata in modo da «vedere» il verso convenzionalmente scelto come positivo per l (e utilizzato per il calcolo della [VII.2]) girare in senso antiorario. Abbiamo già più volte osservato* come, in virtù del fatto che la divergenza di $\vec{B}$ è nulla, il suo flusso concatenato con l sia indipendente da quale superficie S si scelga fra le infinite aventi l come contorno.

* Vedi fine pag. 207

La derivata temporale $d\Phi/dt$ che compare al secondo membro della [VII.1] è la *derivata totale* rispetto al tempo dell'integrale [VII.3]. Va infatti osservato che il valore di tale integrale può variare sia perché $\vec{B}$ varia nel tempo, sia perché varia nel tempo la geometria della linea l (cioè la geometria del circuito).

Tenuto conto della [VII.2], la [VII.1] ci dice che quando il flusso $\Phi(\vec{B})$ varia nel tempo si genera un campo elettrico la cui circuitazione è diversa da zero: in effetti *il campo elettrico*, che in condizioni stazionarie è un campo conservativo, *non è* per contro *conservativo quando ci si trovi in condizioni non stazionarie* (vedi equazione [VII.10]).

In condizioni non stazionarie, il campo elettrico non è conservativo

Esempio

E.VII.1. *Verificare la coerenza dimensionale della [VII.1].*

Con le unità del sistema internazionale S.I. e loro derivate si ha:

$$[f_i] = [V]$$

$$[B] = [T] = \left[\frac{V}{m} \cdot \frac{s}{m}\right]$$

e pertanto:

$$[\Phi(\vec{B})] = [B \cdot S] = \left[\frac{Vs}{m^2} \cdot m^2\right] = [V \cdot s]$$

$$\left[\frac{d\Phi}{dt}\right] = \left[\frac{V \cdot s}{s}\right] = [V]$$

Dunque in definitiva

$$[f_i] = \left[\frac{d\Phi}{dt}\right]$$

che è quanto volevamo verificare.

Quando nel circuito si genera una forza elettromotrice indotta, in esso circola corrente e questa genera a sua volta un campo magnetico indotto $\vec{B}_i$ il cui flusso concatenato col circuito è diverso da zero. Dal fatto che nella [VII.1] compaia il segno meno consegue che *il flusso del campo indotto concatenato col circuito tende a compensare la variazione di flusso responsabile del fenomeno di induzione stesso*. Questa legge, contenuta nella legge di Faraday-Neumann [VII.1], va sotto il nome di *legge di Lenz*

Legge di Lenz: il verso della f.e.m. indotta è tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera

Esempio

E.VII.2. *Un anello rigido conduttore è disposto fermo ortogonalmente a un campo $\vec{B}$ uniforme il cui modulo varia nel tempo. Se, a due istanti successivi t e $t + \Delta t$, il valore del campo $\vec{B}$ è quello rappresentato nelle figure, in che verso circola la corrente indotta?*

Poiché $B(t + \Delta t) > B(t)$, il modulo del flusso $\Phi(\vec{B})$ aumenta nel tempo. Per compensare questo aumento, il campo indotto $\vec{B}_i$ deve avere verso opposto rispetto a $\vec{B}$, così come indicato in figura. Affinché ciò accada, è necessario che la corrente indotta I_i circoli in senso orario intorno alla direzione di $\vec{B}$ (vedi figura).

VII.2. Interpretazione fisica del fenomeno dell'induzione elettromagnetica

Prima di sviluppare, nel prossimo paragrafo, delle elaborazioni formali della legge di Faraday-Neumann che ci permetteranno di esprimerla in termini compatti e generali, cerchiamo di capirne meglio, in questo paragrafo, il significato fisico; cosa che faremo discutendo alcuni esempi significativi alla luce delle conoscenze di cui già disponiamo.

VII.2.1 Flusso tagliato: configurazione del circuito che varia in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ costante nel tempo

Supponiamo che il campo $\vec{B}$ sia costante nel tempo: ciò significa che le sorgenti di $\vec{B}$ (circuiti percorsi da correnti stazionarie, magneti permanenti, ecc.) hanno caratteristiche che non cambiano con il tempo (in particolare è costante la corrente nei circuiti) e sono in quiete nel sistema di riferimento scelto per descrivere il fenomeno.

Consideriamo un primo classico esempio schematizzato in figura, in cui un conduttore filiforme rigido sia piegato ad U, con i rami paralleli a distanza l. Sulla U è disposta una sbarra conduttrice AC che chiude il circuito e forma un rettangolo il cui piano è perpendicolare alla direzione di $\vec{B}$, uniforme e costante, in cui il circuito è immerso. La sbarra AC scorre parallelamente a se stessa, con velocità $\vec{v}$, garantendo nei punti A e C il contatto elettrico (contatto strisciante). Le cariche mobili nella sbarra conduttrice AC sono trascinate con velocità $\vec{v}$ perpendicolare alle linee di forza di $\vec{B}$ e subiscono una *forza di Lorentz* diretta lungo AC che corrisponde ad un campo elettromotore $\vec{E} = \vec{F}_l/q = \vec{v} \times \vec{B}$. Nel circuito appare dunque una f.e.m.

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = vBl\,.$$

Quando nel circuito si genera una forza elettromotrice indotta, in esso circola corrente e questa genera a sua volta un campo magnetico indotto $\vec{B}_i$ il cui flusso concatenato col circuito è diverso da zero. Dal fatto che nella [VII.1] compaia il segno meno consegue che *il flusso del campo indotto concatenato col circuito tende a compensare la variazione di flusso responsabile del fenomeno di induzione stesso.* Questa legge, contenuta nella legge di Faraday-Neumann [VII.1], va sotto il nome di *legge di Lenz*

Legge di Lenz:
il verso della f.e.m. indotta è tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera

Esempio

E.VII.2. *Un anello rigido conduttore è disposto fermo ortogonalmente a un campo $\vec{B}$ uniforme il cui modulo varia nel tempo. Se, a due istanti successivi t e $t + \Delta t$, il valore del campo $\vec{B}$ è quello rappresentato nelle figure, in che verso circola la corrente indotta?*

Poiché $B(t + \Delta t) > B(t)$, il modulo del flusso $\Phi(\vec{B})$ aumenta nel tempo. Per compensare questo aumento, il campo indotto $\vec{B}_i$ deve avere verso opposto rispetto a $\vec{B}$, così come indicato in figura. Affinché ciò accada, è necessario che la corrente indotta I_i circoli in senso orario intorno alla direzione di $\vec{B}$ (vedi figura).

VII.2. Interpretazione fisica del fenomeno dell'induzione elettromagnetica

Prima di sviluppare, nel prossimo paragrafo, delle elaborazioni formali della legge di Faraday-Neumann che ci permetteranno di esprimerla in termini compatti e generali, cerchiamo di capirne meglio, in questo paragrafo, il significato fisico; cosa che faremo discutendo alcuni esempi significativi alla luce delle conoscenze di cui già disponiamo.

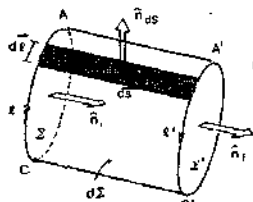
VII.2.1 Flusso tagliato: configurazione del circuito che varia in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ costante nel tempo

Supponiamo che il campo $\vec{B}$ sia costante nel tempo: ciò significa che le sorgenti di $\vec{B}$ (circuiti percorsi da correnti stazionarie, magneti permanenti, ecc.) hanno caratteristiche che non cambiano con il tempo (in particolare è costante la corrente nei circuiti) e sono in quiete nel sistema di riferimento scelto per descrivere il fenomeno.

Consideriamo un primo classico esempio schematizzato in figura, in cui un conduttore filiforme rigido sia piegato ad U, con i rami paralleli a distanza l. Sulla U è disposta una sbarra conduttrice AC che chiude il circuito e forma un rettangolo il cui piano è perpendicolare alla direzione di $\vec{B}$, uniforme e costante, in cui il circuito è immerso. La sbarra AC scorre parallelamente a se stessa, con velocità $\vec{v}$, garantendo nei punti A e C il contatto elettrico (contatto strisciante). Le cariche mobili nella sbarra conduttrice AC sono trascinate con velocità $\vec{v}$ perpendicolare alle linee di forza di $\vec{B}$ e subiscono una *forza di Lorentz* diretta lungo AC che corrisponde ad un campo elettromotore $\vec{E} = \vec{F}_L/q = \vec{v} \times \vec{B}$. Nel circuito appare dunque una f.e.m.

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = vBl.$$

Tale f.e.m. è la stessa che si ricava applicando la [VII.1]:

$$|f_i| = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d}{dt}[B\,l\,x(t)] = B\,l\,\frac{dx}{dt} = B\,l\,v$$

(vedere gli esercizi VII.1, 2, 3).

Generalizziamo le considerazioni precedenti, prendendo in esame un circuito rigido di forma qualsiasi, immerso in un campo $\vec{B}$ costante nel tempo. Supponiamo che il circuito si muova ed indichiamo con $\vec{v}$ la velocità con cui si muove il suo generico elemento $d\vec{l}$.

Consideriamo due istanti successivi t_i e $t_f = t_i + dt$. L'elemento $d\vec{l}$ si sposta del tratto elementare $d\vec{s} = \vec{v}\,dt$; e ciò facendo spazza un'areola elementare $d\vec{S} = d\vec{l} \times d\vec{s} = d\vec{l} \times \vec{v}\,dt$. Nel suo complesso il circuito orientato l passa dalla posizione iniziale AC alla posizione finale $A'C'$, e per conseguenza il flusso con essa concatenato varia dal valore iniziale Φ_i al valore finale Φ_f. Se Σ è la superficie orientata attraverso cui è calcolato Φ_i, Σ' la superficie attraverso cui è calcolato Φ_f e $d\Sigma$ la superficie totale spazzata dal circuito nell'intervallo di tempo dt (mantello esterno del cilindroide schematizzato in figura), nel loro insieme queste costituiscono una superficie chiusa: e dunque il flusso totale di $\vec{B}$ uscente da esso deve essere nullo (osserviamo che affinché ciò accada è necessario, come noi stiamo qui ipotizzando, che $\vec{B}$ sia costante nel tempo: infatti le superfici Σ e Σ' sono appoggiate al circuito in due istanti diversi). Avremo dunque:

$$-\Phi_i + \Phi_f + \Phi_{d\Sigma} = 0$$

dove $\Phi_{d\Sigma}$ è il flusso di $\vec{B}$ uscente da $d\Sigma$. Il segno meno davanti a Φ_i deriva dal fatto che Φ_i rappresenta un *flusso entrante* nella superficie chiusa (tenendo conto del verso scelto come positivo lungo la linea l del circuito; vedi figura), mentre la precedente relazione deve imporre che sia nulla la somma dei *flussi uscenti* da tale superficie. Detta $d\Phi = \Phi_f - \Phi_i$ la variazione che il flusso concatenato col circuito subisce nell'intervallo di tempo dt, dalla precedente relazione traiamo

$$d\Phi = \Phi_f - \Phi_i = -\Phi_{d\Sigma} \qquad \text{[VII.4]}$$

Flusso tagliato

Il flusso $\Phi_{d\Sigma}$ attraverso la superficie $d\Sigma$ spazzata dal circuito è detto *flusso tagliato*; dunque la [VII.4] ci dice che *se il campo è costante nel tempo, la variazione del flusso concatenato col circuito è pari in modulo al flusso tagliato dal circuito stesso*. Osserviamo che qualora $\vec{B}$ sia uniforme e il circuito sia dotato di moto puramente traslatorio, allora $\Phi_f = \Phi_i$ e il flusso tagliato è nullo.

Calcoliamo ora tale flusso tagliato, nel caso generale, in funzione della geometria del circuito, della velocità $\vec{v}$ del suo elemento $d\vec{l}$, e del campo $\vec{B}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} d\Phi &= -\Phi_{d\Sigma} = -\int_{d\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\oint_l \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}\,dt) = \\ &= -dt \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \end{aligned} \qquad \text{[VII.5]}$$

ovvero:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad \text{[VII.6]}$$

Il segno meno nella [VII.5] discende dal fatto che l'elemento di superficie $d\vec{S} = d\vec{l} \times d\vec{s} = d\vec{l} \times \vec{v}\,dt$ è orientato verso l'esterno della superficie $d\Sigma$ (come risulta evidente dalla figura), e nella [VII.4] $\Phi_{d\Sigma}$ rappresenta proprio il flusso uscente dalla superficie $d\Sigma$ stessa. Nel calcolo della [VII.5] abbiamo inoltre tenuto conto della identità vettoriale $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

Per confronto fra la [VII.6] e la [VII.1], tenendo conto della definizione [VII.2], vediamo dunque che *nel caso* di un circuito rigido in moto in un campo di induzione $\vec{B}$ costante nel tempo (caso *di puro flusso tagliato*) sulle cariche all'interno del circuito agisce il campo elettromotore indotto

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{[VII.7]}$$

In questo caso, l'interpretazione fisica del fenomeno dell'induzione elettromagnetica è dunque assai semplice, alla luce di conoscenze che già abbiamo: le cariche presenti internamente al conduttore, costrette dal moto del circuito a muoversi nel campo $\vec{B}$, sono sottoposte alla forza di Lorentz.

Se il campo $\vec{B}$ è uniforme, e il moto del circuito è traslatorio, allora il flusso totale tagliato è nullo (flusso iniziale uguale a flusso finale); la [VII.6] diviene:

$$0 = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \int_B^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Se invece il campo di induzione $\vec{B}$ non è uniforme, allora esso ha sul tratto AB valore mediamente diverso rispetto al tratto BA; la circuitazione della [VII.7] è diversa da zero, e si manifesta una forza elettromotrice. Lo stesso accade se il moto del circuito non è traslatorio, perché la velocità del circuito rispetto al campo è mediamente diversa nel tratto AB rispetto al tratto BA.

Va osservato che nella [VII.7] la velocità $\vec{v}$ *non è* la velocità di deriva $\vec{v}_d$ degli elettroni, ma una velocità imposta al circuito dall'esterno in direzione generalmente diversa rispetto alla direzione consentita per $\vec{v}_d$. Questo è il motivo per cui, nonostante la forza di Lorentz compia in generale lavoro nullo, la circuitazione della [VII.7] può essere diversa da zero: il lavoro dissipato dalla corrente circolante nel circuito è compiuto dalla forza esterna che mantiene $\vec{v}$ costante (o nel caso di assenza di forza esterna, il circuito rallenta e il lavoro è compiuto a spese della sua energia cinetica), e la forza di Lorentz funge solo da tramite.

Osserviamo, infine, che benché ci siamo riferiti esplicitamente al caso di un circuito rigido, tutte le considerazioni fisiche e matematiche da noi fatte sono indipendenti da questa ipotesi: la [VII.6] vale del tutto in generale, anche quando il circuito modifichi la sua forma durante il suo moto, purché esso si muova in un campo $\vec{B}$ costante nel tempo, cosicché la variazione del flusso concatenato con esso sia dovuta al solo flusso tagliato dagli elementi $d\vec{l}$ del circuito nel loro moto entro il campo $\vec{B}$.

La [VII.6] vale anche nel caso di flusso tagliato da un circuito *non rigido*

VII.2.2 Variazione del flusso concatenato dovuta al moto delle sorgenti del campo $\vec{B}$

Consideriamo ora un circuito rigido C in quiete nel sistema di riferimento inerziale $Oxyz$ da noi scelto per descrivere il fenomeno: il flusso di $\vec{B}$ concatenato col circuito può dunque variare solo per conseguenza di una variazione nel tempo del campo $\vec{B}$ in cui il circuito è immerso. La variabi-

lità nel tempo di $\vec{B}$ può essere per sua parte dovuta o al fatto che variano nel tempo le caratteristiche delle sorgenti, o al fatto che queste si muovono rispetto al circuito (o ad entrambe le cose).

Variazione del flusso concatenato: sorgenti in moto

Supponiamo che le caratteristiche delle sorgenti siano costanti nel tempo (sorgenti stazionarie), e che esse si muovano rispetto al circuito (e dunque rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$). Per semplicità, cominciamo col considerare il caso in cui tali sorgenti siano rappresentate da un unico circuito S alimentato con corrente continua, e che il suo moto sia un moto di pura traslazione con velocità costante $\vec{v}$. Se consideriamo un sistema di riferimento $O'x'y'z'$ solidale con la sorgente del campo, anche questo è un sistema di riferimento inerziale. In tale riferimento, le sorgenti S del campo sono stazionarie e in quiete, e dunque il campo $\vec{B}'$ è costante; mentre si muove, con velocità $-\vec{v}$, il circuito C. Osserviamo che poiché i due riferimenti sono in moto relativo, per quanto visto nel par. V.7 il campo $\vec{B}'$ che si osserva in $O'x'y'z'$ non coincide con il campo $\vec{B}$ che si osserva in $Oxyz$ (benché $\vec{B}$ e $\vec{B}'$ si discostino assai poco fra di loro finché $v/c \ll 1$).

Nel sistema $O'x'y'z'$ solidale con la sorgente, ci troviamo dunque nelle stesse condizioni discusse nel par. VII.2.1, e il campo elettromotore $\vec{E}_i'$ è identificabile con la forza di Lorentz per unità di carica F_i'/q:

$$\vec{E}_i' = \frac{\vec{F}_i'}{q} = \vec{v}' \times \vec{B}' = -\vec{v} \times \vec{B}'$$

dove $\vec{v}' = -\vec{v}$ è la velocità con cui si muove il circuito C nel sistema $O'x'y'z'$ (cioè rispetto al circuito sorgente S). Nel sistema $Oxyz$, in cui il circuito è fermo e tali sono in media anche le cariche in esso contenute, non si ha invece alcun effetto dovuto alla forza di Lorentz; tuttavia, come abbiamo discusso nel par. V.7, imponendo la covarianza relativistica delle leggi dell'elettromagnetismo, si riscontra che il moto delle sorgenti del campo magnetico provoca l'insorgenza di un campo elettrico $\vec{E}_i$ che esercita sulle cariche q del circuito una forza $\vec{F}_i = q\vec{E}_i$ equivalente alla forza di Lorentz $\vec{F}_i' = q\vec{v}' \times \vec{B}'$ (trasformata da $Oxyz$ a $O'x'y'z'$ secondo le leggi di trasformazione relativistica delle forze). In particolare, se $v \ll c$, allora $\vec{F}_i' \simeq \vec{F}_i$ e $\vec{B}' \simeq \vec{B}$, e si ha semplicemente:

$$\vec{E}_i \simeq \vec{v}' \times \vec{B}' = -\vec{v} \times \vec{B}' \simeq -\vec{v} \times \vec{B}$$

Dunque anche in questo caso l'induzione elettromagnetica (legge di Faraday-Neumann) è riconducibile a fenomeni già noti, essendo ricavabile dalla condizione di covarianza relativistica delle leggi dell'elettromagnetismo relative a sorgenti stazionarie (includendo fra tali leggi anche la forza di Lorentz).

Benché noi ci siamo riferiti, nei ragionamenti fin qui fatti, al caso in cui il campo $\vec{B}$ sia generato da una unica sorgente in moto traslatorio, in virtù della additività del campo, il ragionamento è immediatamente estendibile al caso di più sorgenti; e usando l'artificio di suddividere ogni circuito sorgente (e ogni eventuale sorgente di altra natura) in costituenti elementari, anche al caso in cui la sorgente sia soggetta a un moto qualunque (incluso il caso in cui la sua forma sia variabile nel tempo).

La discussione che qui abbiamo fatto del fenomeno dell'induzione generato da sorgenti in movimento ci mostra che il campo elettromotore indotto si manifesta localmente come un campo elettrico: poiché il campo elettromotore ha circuitazione non nulla, resta così confermata l'osservazione, da noi già fatta a commento della [VII.2], che *il campo elettrico in condizioni non stazionarie non è conservativo*

VII.2.3 Variazione del flusso concatenato dovuta a variazione della corrente di alimentazione dei circuiti sorgente

Variazione del flusso concatenato: sorgenti non stazionarie

In questo caso il circuito sorgente S e il circuito C non sono soggetti ad alcun moto relativo, e dunque il fenomeno della induzione elettromagnetica che sperimentalmente si rileva non può essere ricondotto alla forza di Lorentz. Possiamo dunque dire che mentre nei due casi precedenti il fenomeno dell'induzione elettromagnetica era riconducibile a fenomeni già trattati nei precedenti capitoli, in questo caso esso costituisce un fenomeno nuovo. Tuttavia si tratta di un fenomeno che dovevamo attenderci in base a quanto abbiamo fin qui discusso. Infatti ciò che in questo caso la non stazionarietà della sorgente produce localmente, in ogni punto del circuito C, è un campo $\vec{B}$ variabile nel tempo: ma localmente, in ogni punto del circuito C, anche il moto della sorgente S (caso discusso nel par. VII.2.2) viene avvertito semplicemente attraverso una variabilità nel tempo del campo $\vec{B}$; e non possiamo aspettarci che in un caso si abbia come effetto un campo elettromotore indotto e nell'altro no.

In effetti, vedremo nel prossimo paragrafo che la traduzione in termini locali della legge di Faraday-Neumann, col vincolo della covarianza relativistica, ci porterà a una riformulazione della terza equazione di Maxwell [I.83] adatta anche al caso non stazionario; equazione che sarà caratterizzata dalle seguenti proprietà:

a) Essa si ridurrà alla espressione ricavata per il caso stazionario (eq. [I.83]) nel caso che le sorgenti siano stazionarie.

b) Nel caso di sorgenti non stazionarie, essa darà ragione del fenomeno della induzione elettromagnetica, cioè della legge di Faraday-Neumann.

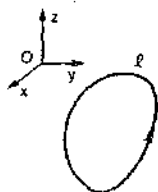
c) Nel caso in cui il circuito e le sorgenti siano dotate di moto relativo, giustificherà l'insorgenza della forza di Lorentz.

Va osservato che, storicamente, è stato proprio al fine di conseguire questo obiettivo di coerenza teorica che Einstein è stato portato a formulare la sua teoria della relatività ristretta, assumendo la matrice di Lorentz come legge di trasformazione relativistica dello spazio-tempo.

VII.3. Forma locale della legge di Faraday-Neumann ed espressione della terza equazione di Maxwell nel caso non-stazionario

Forma locale della legge di Faraday-Neumann

La forma locale della legge di Faraday-Neumann (cioè la sua espressione in termini del valore che il campo elettromagnetico assume punto per punto nello spazio, anziché in termini di integrali dei campi stessi come nella [VII.1]) può essere ricavata assai semplicemente usando relazioni matematiche da noi già introdotte in precedenza.

Cominciamo col considerare il caso di un circuito in quiete: in particolare la sua forma, peraltro arbitraria, sarà dunque costante nel tempo. La variazione del flusso di $\vec{B}$ sarà pertanto dovuta solo alla variabilità nel tempo del campo di induzione $\vec{B}$ in cui il circuito è immerso. Tenuto conto di ciò, nella [VII.1] (scritta tenendo conto della [VII.2] e della [VII.3]) la

$\frac{\partial B}{\partial t}$ è una derivata parziale. Invece, una volta stabilita la superficie attraverso cui calcolarlo, Φ_B non dipende dalle posizioni, quindi $\frac{d\Phi(B)}{dt}$ è una derivata totale.

derivata temporale può essere portata sotto il segno di integrale divenendo una derivata parziale di $\vec{B}$ rispetto al tempo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}(x,t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \qquad \text{[VII.8]}$$

Applicando il teorema del rotore al primo membro di questa equazione

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

essa diviene

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \qquad \text{[VII.9]}$$

Poiché questa relazione vale qualunque sia la forma del circuito (e dunque qualunque sia la superficie di integrazione S) la sua validità implica l'uguaglianza degli integrandi; dunque:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{[VII.10]}$$

Alla [VII.10], da noi ricavata analizzando un circuito fermo nel sistema di riferimento $Oxyz$ scelto per descrivere il fenomeno (e dunque in particolare di forma immutabile), si perviene anche considerando un circuito non rigido in moto qualunque. In questo caso, in luogo della [VII.8] avremo:

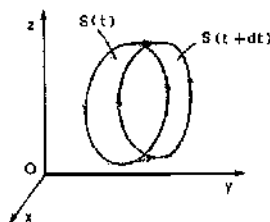
$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{dt}\left[\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}\right] \qquad \text{[VII.11]}$$

La forza elettromotrice indotta è pari alla circuitazione del campo $\vec{E}_i$ definito operativamente come la forza per unità di carica agente localmente entro il circuito in movimento; mentre la variazione elementare di flusso (cioè la quantità fra parentesi quadra al secondo membro) è pari alla differenza fra il flusso del campo $\vec{B}(t+dt)$ all'istante $(t+dt)$ attraverso la superficie $S(t+dt)$ che si appoggia sul circuito all'istante $(t+dt)$, e il flusso di $\vec{B}(t)$ attraverso la superficie $S(t)$ all'istante t. Sviluppando al primo ordine $\vec{B}(t+dt)$:

$$\vec{B}(t+dt) = \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dt\,,$$

il secondo membro della [VII.11] diviene:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{dt}\left[\int_{S(t+dt)}\left(\vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dt\right) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}\right] = \\ &= -\frac{1}{dt}\left[\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}\right] - \int_{S(t+dt)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \qquad \text{[VII.12]}$$

Dei due termini al secondo membro di questa relazione, quello fra parentesi quadra rappresenta la variazione del flusso di $\vec{B}(t)$ (considerato come

costante al valore che esso aveva all'istante t) dovuta solo al moto del circuito. Pertanto, tenuto conto della [VII.5], si ha:

$$-\frac{1}{dt}\left[\int_{S(t+dt)}\vec{B}(t)\cdot d\vec{S}-\int_{S(t)}\vec{B}(t)\cdot d\vec{S}\right]=\oint_{l}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} \qquad \text{[VII.13]}$$

Mentre il secondo termine al secondo membro della [VII.12], al limite per $dt \to 0$, diviene:

$$\int_{S(t+dt)}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \to \int_{S(t)}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \text{[VII.14]}$$

e rappresenta la variazione di flusso – a posizione costante del circuito – dovuta alla sola variazione nel tempo di $\vec{B}$. Sostituendo la [VII.13] e la [VII.14] nella [VII.12], cioè nel secondo membro della [VII.11], quest'ultima diviene:

$$\oint_{l}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\oint_{l}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}-\int_{S}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

ovvero:

$$\oint_{l}(\vec{E}_i-\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=-\oint_{S}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \text{[VII.15]}$$

Osserviamo ora che uno sperimentatore posto in quiete nel sistema di riferimento $Oxyz$ osserverà, su una carica q in moto con velocità $\vec{v}$, una forza $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ (dove $\vec{E}$ e $\vec{B}$ rappresentano rispettivamente il campo elettrico e il campo di induzione magnetica agenti in $Oxyz$); mentre per la definizione stessa di $\vec{E}_i$ deve essere anche $\vec{F}=q\vec{E}_i$. Dall'uguaglianza

$$q\vec{E}_i=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

segue che $\vec{E}_i-\vec{v}\times\vec{B}=\vec{E}$; per cui la [VII.15] si riduce anche in questo caso (circuito in movimento) alla [VII.8]. Pertanto la [VII.9], e la sua forma locale [VII.10] che qui riscriviamo per comodità, hanno validità del tutto generale poiché ad esse si giunge sia analizzando un circuito in quiete che un circuito in movimento:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{[VII.10]}$$

Terza equazione di Maxwell nel caso generale (non stazionario)
$\text{rot}\,\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$

È questa l'espressione generale assunta dalla **terza equazione di Maxwell nel caso non stazionario**. In realtà la validità della [VII.10] si estende anche al caso in cui non vi siano circuiti: nello spazio vuoto o con dielettrici o conduttori, se il campo magnetico cambia nel tempo allora è presente un campo elettrico non conservativo.

VII.4. La quarta equazione di Maxwell nel caso non stazionario

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che nel caso non stazionario – cioè nel caso in cui il campo elettromagnetico sia variabile nel tempo – la terza equazione di Maxwell assume forma diversa rispetto al caso stazionario.

Ciò deriva dal fatto che mentre nel caso stazionario il campo elettrico è conservativo (e perciò vale la relazione $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$), nel caso non stazionario, a causa del fenomeno dell'induzione elettromagnetica, il campo elettrico ha circuitazione non nulla: al secondo membro della terza equazione di Maxwell compare allora il termine $(-\partial B/\partial t)$, che rappresenta la «sorgente» della non-irrotazionalità del campo $\vec{E}$.

Prima di proseguire, nei prossimi paragrafi, con approfondimenti e sviluppi relativi al fenomeno della induzione elettromagnetica, discutiamo qui quali modifiche subiscano, nel caso non stazionario, le altre equazioni di Maxwell. Ci riferiremo esplicitamente al caso del vuoto, partendo dalle equazioni relative al caso stazionario che abbiamo richiamato all'inizio di questo capitolo. Le conclusioni a cui arriveremo sono tuttavia applicabili, mediante semplice sostituzione di ε e μ al posto di ε_0 e μ_0, anche al caso di materiali omogenei ed isotropi per i quali ε e μ siano costanti.

Risulta sperimentalmente che la prima e la seconda equazione di Maxwell mantengono nel caso non stazionario la stessa espressione che esse hanno nel caso stazionario. Naturalmente, mentre nel caso stazionario la densità di carica ρ che compare al secondo membro della prima equazione è costante nel tempo, nel caso non stazionario essa in generale dipende esplicitamente dal tempo oltre che dalle coordinate spaziali:

I) $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(x, y, z, t)/\varepsilon_0 \qquad \text{[VII.16.a]}$$

II) $$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{[VII.16.b]}$$

Dal punto di vista macroscopico «non-locale», per conseguenza della seconda di queste equazioni continua ad essere vero che il flusso di $\vec{B}$ uscente, in ogni particolare istante, da una superficie chiusa è nullo: proprietà che del resto abbiamo già utilizzato nelle elaborazioni della legge di Faraday-Neumann che abbiamo sviluppato nel precedente paragrafo. Quanto alle conseguenze fisiche della [VII.16.a], integrando tale equazione sul volume finito τ racchiuso entro una superficie chiusa S arbitraria e fissa, e applicando il teorema della divergenza, si trova immediatamente che la forma integrale [I.22] del teorema di Gauss continua a valere anche in condizioni non stazionarie. Ciò può sorprendere, perché in queste condizioni la [I.22] collega fra di loro due grandezze variabili calcolate allo stesso istante in posizioni diverse (la carica $Q^{int}(t)$ *internamente* alla superficie e il flusso $\Phi(\vec{E}(t))$ *sulla* superficie) mentre nessun fenomeno fisico può propagarsi istantaneamente. Tuttavia va osservato che in virtù della conservazione della carica, se Q^{int} varia ciò può essere dovuto solo a cariche che attraversano S; e ciò riconduce la conseguente variazione di Φ a un fenomeno sostanzialmente locale.

Tornando a tali equazioni, ci si può rendere conto immediatamente del fatto che l'estensione al caso non stazionario della quarta di esse (eq. [V.34], $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$) non può essere ottenuta, così come abbiamo fatto per le [VII.16], introducendo semplicemente la dipendenza dal tempo nelle grandezze che in tale equazione compaiono. Applichiamo infatti l'operatore divergenza alla [V.34]:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{j}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Poiché la divergenza del rotore di un qualunque vettore è identicamente nulla, il primo membro di questa equazione è nullo; da cui discende che

affinché la [V.34] sia valida è necessario che sia $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, cioè che sia nulla ovunque la divergenza della densità di corrente $\vec{j}$. D'altro canto, dalla equazione di continuità [IV.12] discende che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

da cui si vede che $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ solo se $\partial\rho/\partial t = 0$, cioè se la densità di carica ρ è ovunque costante nel tempo; che è come dire solo nel caso stazionario. È dunque anche la validità della [V.34] è limitata al solo caso stazionario, come del resto avevamo anticipato nel par. V.4 commentando la [V.34]. La inadeguatezza della [V.34] a descrivere correttamente il caso non stazionario risulta evidente in termini più immediatamente fisici analizzando la forma integrale della [V.34] (cioè il teorema della circuitazione di Ampere) nel caso di un circuito RC, cioè costituito da un condensatore C e da una resistenza R disposti in serie. Sia $I(t)$ la corrente che circola nella resistenza (e negli altri elementi conduttori di collegamento presenti nel circuito) all'istante t. Come abbiamo visto nei paragrafi IV.2 e IV.15, tale corrente è alimentata dalle cariche inizialmente presenti sulle armature del condensatore, che per semplicità supponiamo essere un condensatore piano; mentre nello spazio compreso fra le due armature non vi è alcun movimento di cariche (e dunque fra le armature è $\vec{j} = 0$). Consideriamo una linea chiusa l concatenata col circuito. Secondo il teorema della circuitazione da noi enunciato nel caso stazionario, la circuitazione di $\vec{B}$ calcolata lungo l deve essere pari a μ_0 moltiplicato per le correnti I concatenate con l, cioè pari al flusso di $\mu_0\vec{j}$ calcolato su una superficie Σ che abbia l come contorno. Nel caso non stazionario che stiamo ora considerando, questo enunciato presenta una evidente difficoltà. Consideriamo infatti due superfici Σ_1 e Σ_2 aventi l come contorno: Σ_1 è attraversata dal filo conduttore; mentre Σ_2, passando nello spazio interposto fra le due armature, non è attraversata da alcuna corrente. È allora evidente che la corrente concatenata con l è pari a $I(t)$ se la si calcola su Σ_1, mentre è nulla se la si calcola su Σ_2; e ciò mette in difficoltà l'enunciato del teorema della circuitazione.

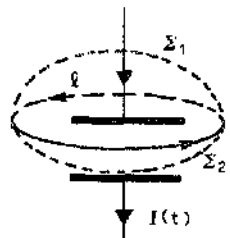
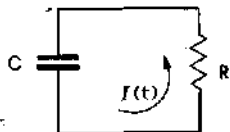
Precise indicazioni su come il teorema della circuitazione (ovvero la sua espressione locale rappresentata dalla quarta equazione di Maxwell) possa essere reso adeguato al caso non stazionario ci vengono da un esame della espressione della equazione di continuità [IV.12]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Sostituendo al posto di ρ la sua espressione in funzione di $\vec{E}$ quale ci è fornita dalla prima equazione di Maxwell [VII.16.a], si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$$

ovvero, invertendo l'ordine di derivazione come consentito dal teorema di Schwartz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

da cui

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0 \qquad \text{[VII.17]}$$

La [VII.17] ci mostra che il vettore $\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ gode delle seguenti proprietà:

a) esso si riduce alla densità di corrente $\vec{j}$ nel caso stazionario (quando è $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$)

b) esso ha in ogni caso divergenza nulla

Pertanto, esso rappresenta un buon candidato ad essere sostituito al posto di $\vec{j}$ al secondo membro della [V.16] nel caso generale. Questa ipotesi, avanzata per la prima volta da Maxwell, è confermata dalla puntuale verifica sperimentale delle conseguenze dirette e indirette che possono essere dedotte dalla teoria così formulata: in particolare da tutta la fenomenologia relativa alle onde elettromagnetiche di cui ci occuperemo in altri capitoli.

La quantità $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ viene detta *densità di corrente di spostamento*; e il suo flusso attraverso una qualunque superficie S

Corrente di spostamento

$$\int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

viene detto *corrente di spostamento* attraverso tale superficie. La densità di corrente di spostamento va aggiunta nel caso non stazionario alla densità di corrente di conduzione $\vec{j}$, ottenendo così una *densità di corrente totale generalizzata*

Quarta equazione di Maxwell nel caso non stazionario nel vuoto

$$\vec{j}_t = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

la cui divergenza è sempre nulla. La quarta equazione di Maxwell nel caso non stazionario verrà pertanto scritta nella forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \qquad \text{[VII.18]}$$

Vale la pena fare le seguenti osservazioni:

a) Nel caso non stazionario, la corrente di conduzione entrante (o uscente) a un certo istante attraverso una superficie chiusa Σ qualunque non è in generale nulla; ma è nulla la corrente totale generalizzata (quella di conduzione più quella di spostamento) attraverso Σ. La prima legge di Kirchhoff dei nodi, eq. [IV.17], è dunque immediatamente estendibile in termini esatti al caso non stazionario pur di considerare, accanto alla corrente di conduzione, anche quella di spostamento.

Prima legge di Kirchhoff nel caso non stazionario

b) Calcolando, su una superficie qualunque S non chiusa, il flusso di entrambi i membri della [VII.18] e applicando al primo membro il teorema di Stokes del rotore, si trova immediatamente che il teorema della circuita-

zione di Ampere vale istante per istante anche in condizioni non stazionarie, pur di considerare accanto alle correnti di conduzione anche la corrente di spostamento.

Tuttavia in condizioni non stazionarie l'utilità pratica del teorema della circuitazione (cioè della forma integrale non locale della [VII.18]) al fine del calcolo dei campi, è limitata ai casi in cui esso valga istante per istante anche trascurando la corrente di spostamento. Ciò accade quando le dimensioni geometriche del sistema in esame sono tali che il tempo impiegato dai segnali elettromagnetici per attraversarlo sia molto piccolo rispetto al tempo che caratterizza le variazioni di ρ e $\vec{j}$: cioè, secondo la definizione da noi data nel par. IV.15, quando ci si trovi in *condizioni quasi stazionarie* (dette anche condizioni di *sorgenti lentamente variabili*).

Condizioni quasi-stazionarie

Nel prosieguo di questo capitolo, in cui continueremo a discutere fenomeni connessi con l'induzione elettromagnetica (e dunque fenomeni non stazionari), *dovunque parleremo di una corrente elettrica sottintenderemo di considerare una corrente totale generalizzata*, cioè la somma della corrente di conduzione e di quella di spostamento. Inoltre, quando applicheremo il teorema della circuitazione sottintenderemo di trovarci in condizioni quasi stazionarie. Tuttavia, tutte le conclusioni di carattere locale cui perverremo (cioè tutte le relazioni fra grandezze calcolate istante per istante nello stesso punto, come ad esempio accade per le equazioni di Maxwell) avranno validità generale, non subordinata cioè all'ipotesi di quasi-stazionarietà.

Esempio

E.VII.3. *In un circuito RC in fase di scarica, supponendo che il condensatore C sia un condensatore piano, calcolare la densità della corrente di spostamento presente fra le armature, e verificare che il suo flusso è in ogni istante pari alla corrente che passa nella resistenza R.*

Secondo quanto visto nell'esempio E.IV.23, all'istante t la carica Q presente sulle armature e la corrente I circolante nella resistenza valgono rispettivamente

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}$$
$$I = (Q_0/RC)\, e^{-t/RC}$$

D'altro canto, il campo $\vec{E}$ presente fra le armature è ortogonale ad esse ed ha all'istante t modulo E che per il teorema di Coulomb [II.5] vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{S\varepsilon_0} e^{-t/RC}$$

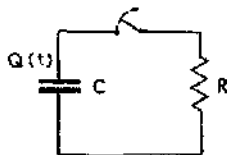
dove S è la superficie delle armature e $\sigma = Q/S$ la densità di carica superficiale presente sulle armature all'istante t.

La densità di corrente di spostamento presente fra le armature vale dunque:

$$\left| \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right| = \left| \varepsilon_0 \frac{Q_0}{S\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-t/RC}) \right| = \frac{Q_0}{SRC} e^{-t/RC}$$

Il flusso di tale densità di corrente si ottiene semplicemente, nelle ipotesi scelte per l'esempio, moltiplicando per la superficie S delle armature. Si ottiene

$$S\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

che è per l'appunto pari alla corrente di conduzione $I = \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$.

A conclusione di quanto discusso in questo paragrafo, possiamo ora fornire la espressione che le equazioni di Maxwell assumono nel vuoto nel caso generale (non stazionario):

Equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 & \text{II)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{III)}\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{IV)}\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}\right\} \qquad \text{[VII.19]}$$

Come già osservato in precedenza, tali equazioni sono immediatamente estendibili al caso di mezzi omogenei ed isotropi semplicemente sostituendo ε e μ al posto di ε_0 e μ_0; ovvero, introducendo i vettori $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ e $\vec{H} = \vec{B}/\mu$:

Equazioni di Maxwell in un mezzo omogeneo ed isotropo

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}\right\} \qquad \text{[VII.20]}$$

Nel caso generale le [VII.20] vanno completate con le relazioni strutturali:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}$$

VII.5. Il fenomeno dell'autoinduzione e coefficiente di autoinduzione

Condizioni quasi stazionarie

Consideriamo un qualunque *circuito elettrico in condizioni quasi stazionarie*; sia $I(t)$ la corrente che circola nel circuito all'istante t. Tale corrente genera, nello spazio circostante, un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$ il cui flusso $\Phi(\vec{B})$ concatenato col circuito stesso è in generale diverso da zero. Se la corrente $I(t)$ varia nel tempo, varia parimenti $\vec{B}(t)$ e dunque anche $\Phi(\vec{B})$: si genera pertanto nel circuito, per la legge di Faraday-Neumann, una forza elettromotrice detta *forza elettromotrice autoindotta*; il fenomeno nel suo complesso è detto *fenomeno dell'autoinduzione*.

Forza elettromotrice autoindotta

Ci proponiamo in questo paragrafo di trattare il fenomeno dell'autoinduzione in termini quantitativi. Limiteremo la nostra attenzione al caso di materiali omogenei ed isotropi per i quali sia μ costante (indipendente da $\vec{B}$, e dunque anche da $I(t)$).

Cominciamo con l'osservare che in virtù della prima formula di Laplace [V.19], in ogni punto dello spazio circostante il circuito, il campo $\vec{B}(t)$ è proporzionale alla corrente $I(t)$; e poiché il flusso elementare $d\Phi$ attraverso ogni elemento di superficie $d\vec{S}$ è proporzionale a $\vec{B}(t)$ ($d\Phi = \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}$), il flusso $\Phi(\vec{B})$ concatenato col circuito risulta esso stesso proporzionale a $I(t)$:

$$\Phi(\vec{B}) = LI \qquad \text{[VII.21]}$$

Ribadiamo che affinché valga la relazione di proporzionalità [VII.21] è necessario che sia valida l'approssimazione di quasi stazionarietà, il che implica che la corrente abbia lo stesso valore lungo tutto il circuito. Il coefficiente di proporzionalità L definito dalla [VII.21] è detto *coefficiente di autoinduzione* del circuito in esame o *induttanza* del circuito stesso. Il suo

Coefficiente di autoinduzione o induttanza

valore è determinato unicamente dalla geometria del circuito e dal materiale circostante. Nel sistema SI esso si misura in

$$\frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{sec}}{\text{Ampere}} = \text{Ohm} \cdot \text{sec}:$$

tale unità di misura è detta anche **Henry**.

Henry = Ohm · sec
H = Ω · s

Esempi

Coefficiente di autoinduzione di un solenoide nel vuoto

E.VII.4. *Consideriamo un solenoide, costituito da un avvolgimento regolare e molto fitto di filo conduttore su un supporto tubolare di spessore trascurabile e di lunghezza l molto grande rispetto al raggio R del tubo. Se N è il numero totale di spire che formano l'avvolgimento, e se internamente al tubo vi è il vuoto (o aria), calcolare il coefficiente di autoinduzione del solenoide.*

Come abbiamo visto nell'esempio E.V.12 e nell'esempio E.VI.2, il campo di induzione $\vec{B}_0$ presente internamente al solenoide è diretto assialmente, è uniforme ed il suo modulo vale

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

Il flusso di B_0 concatenato con ciascuna spira si ottiene in questo caso semplicemente moltiplicando B_0 per l'area $S = \pi R^2$ della spira stessa; e poiché il solenoide è formato da N spire il flusso $\Phi(\vec{B}_0)$ concatenato col circuito è pari a $B_0 NS$:

$$\Phi(\vec{B}_0) = B_0 NS = \mu_0 \frac{N}{l} I \cdot NS = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} I = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l} \cdot I$$

da cui

$$L = \frac{\Phi(\vec{B}_0)}{I} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l} = \mu_0 n^2 l S$$

con $n = N/l$ numero di spire per unità di lunghezza.

Dunque il coefficiente di autoinduzione è in questo caso (cioè per un circuito di questa geometria) proporzionale al quadrato del numero di spire e all'area di ciascuna di esse, e inversamente proporzionale alla lunghezza del solenoide. Ad esempio se $N = 10^4$, $R = 1\ \text{cm} = 0{,}01\ \text{m}$; $l = 20\ \text{cm}$, si ha:

$$L = 12{,}56 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\Omega \cdot \text{s}}{\text{m}}\right) \cdot 10^8 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{20 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 197{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{H} = 197{,}2\ \text{mH}$$

Il coefficiente di autoinduzione vale in questo caso circa 200 millihenry.

Solenoide con nucleo

E.VII.5. *Calcolare il coefficiente di autoinduzione del solenoide di cui all'esempio E.VII.4 nell'ipotesi che al suo interno si trovi, anziché il vuoto, un materiale omogeneo e isotropo con permeabilità magnetica relativa pari a* μ_r (tale materiale viene detto *nucleo* del solenoide).

Come abbiamo discusso nell'esempio E.VI.2, il campo magnetico $\vec{H}$ presente internamente al solenoide è indipendente dal materiale con cui il solenoide è riempito; mentre il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ in presenza del materiale vale $\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0$ (a parità di corrente I).

Solenoide con nucleo ferromagnetico. Se il ciclo di isteresi è stretto, si continua a parlare di coefficiente di autoinduzione per campi abbastanza bassi purché il materiale si mantenga nella zona di linearità.

Si ha pertanto $\Phi(\bar{B}) = BNS = \mu_r B_0 NS$, cioè a parità di corrente il flusso di $\bar{B}$ risulta μ_r volte più grande rispetto al caso del vuoto; anche il coefficiente di autoinduzione L risulta dunque semplicemente moltiplicato per μ_r rispetto al caso del vuoto:

$$L = \frac{\Phi(\bar{B})}{I} = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 \pi R^2}{l} = \mu_0 \mu_r n^2 l S$$

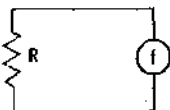
Se ad esempio $\mu_r = 3 \cdot 10^3$, il coefficiente di autoinduzione risulta dell'ordine di 600 H. Va osservato che un valore di μ_r così elevato implica che il materiale sia ferromagnetico. In questo caso, essendo μ_r dipendente da B e dunque da I, a rigore non si può più parlare di coefficiente di autoinduzione: $\Phi(\bar{B})$ non è infatti proporzionale a I. Si continua tuttavia a parlare di coefficiente di autoinduzione fino a che B è abbastanza piccolo perché ci si trovi nella zona di linearità del materiale, e fino a che il ciclo di isteresi è abbastanza stretto.

Quando un circuito opera in condizioni tali che possa essere considerata valida la [VII.21] (cioè quando si sia in presenza di materiali omogenei ed isotropi a μ costante, e quando sia applicabile l'ipotesi di quasi stazionarietà) la forza elettromotrice autoindotta viene immediatamente espressa, tramite la [VII.21] stessa, in termini della derivata temporale della corrente circolante nel circuito. Tenendo conto della relazione di Faraday-Neumann [VII.1] si ha:

Forza elettromotrice autoindotta

$$f_a = -\frac{d\Phi_a(\bar{B})}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad \text{[VII.22]}$$

dove il pedice a applicato a Φ e f sta ad indicare che si tratta di *flusso* e, rispettivamente, di *forza elettromotrice autoindotta*.

Consideriamo ad esempio un circuito costituito da una resistenza R chiusa su un generatore di forza elettromotrice f. Supponiamo che il circuito sia sede di una corrente I variabile nel tempo: ciò può accadere perché f è variabile nel tempo ($f = f(t)$), e/o perché ci troviamo in regime transitorio dopo che sul circuito è stato compiuto qualche intervento dall'esterno (chiusura di un interruttore; modifica del valore della resistenza R; ecc.). Oltre alla forza elettromotrice f del generatore agisce allora – in virtù della variabilità nel tempo della corrente I circolante nel circuito – la forza elettromotrice autoindotta [VII.22]. L'equazione del circuito è dunque:

$$RI = f + f_a = f - L\frac{dI}{dt} \qquad \text{[VII.23]}$$

Se la geometria del circuito è semplice, il termine $f_a = -L\dfrac{dI}{dt}$ risulta trascurabile nella maggior parte dei casi. Ad esempio in un circuito di forma rettangolare con area $S = 1\ \text{dm}^2 = 10^{-2}\ \text{m}^2$, L è dell'ordine di 10^{-7} H; $f_a = -L\dfrac{dI}{dt}$ rimane allora trascurabile rispetto a RI (supposto ad esempio che R sia dell'ordine delle centinaia di Ω) a meno che la corrente non subisca variazioni percentualmente apprezzabili in tempi dell'ordine del nanosecondo, cioè di circa 10^{-9} sec.

Simbolo convenzionale per indicare una induttanza

Quando ci si trova in condizioni tali che il termine $f_a = -L\, dI/dt$ nella [VII.23] *non sia trascurabile* rispetto agli altri (il che accade di norma se, ad esempio, nel circuito è inserito un solenoide come quello visto nell'esem-

pio E.VII.4; ovvero, in un circuito di geometria semplice, se esso è sede di correnti variabili molto rapidamente), si usa indicare esplicitamente nello schema del circuito la presenza di un componente autoinduttivo mediante il simbolo indicato nella figura a lato a pagina precedente. È interessante risolvere esplicitamente il circuito RL mostrato nella successiva figura, in cui è presente un generatore di forza elettromotrice f costante, calcolando come varia nel tempo la corrente I a partire dall'istante iniziale in cui viene chiuso l'interruttore T. Si tratta di risolvere l'equazione [VII.23] con $f =$ costante, a partire dalla condizione iniziale $I(0) = 0$.

Si ha dalla [VII.23]:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = f$$

Dividendo per R:

$$I + \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = \frac{f}{R}$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned} & I + \tau\frac{dI}{dt} = I_m \\ \text{con} \quad & \tau = \frac{L}{R}; \quad I_m = \frac{f}{R} \end{aligned}\right\} \qquad \text{[VII.24]}$$

$\tau = \frac{L}{R}$: costante tempo del circuito RL
$[\tau] = [s]$

Separando le variabili, la [VII.24] diviene

$$\frac{dI}{I - I_m} = -\frac{dt}{\tau}$$

Integrando, si ha

$$\ln(I - I_m) = -\frac{t}{\tau} + \text{cost}$$

Passando dai logaritmi ai numeri e imponendo che $I = 0$ per $t = 0$, si ha

$$I = I_m(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{f}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \qquad \text{[VII.25]}$$

Andamento della corrente dopo la chiusura in un circuito LR con f costante

che rappresenta l'andamento cercato della corrente nel circuito RL a partire dall'istante di chiusura su un generatore di forza elettromotrice costante. Graficamente tale andamento è mostrato nella figura a lato: partendo da zero, la corrente si approssima via via che passa il tempo al valore $I_m = f/R$ che raggiungerebbe istantaneamente se l'induttanza del circuito fosse nulla; valore che è già raggiunto in ottima approssimazione non appena t diviene maggiore di alcune unità di τ. È evidente che in R ed L andranno inglobati tutti i contributi che i vari componenti del circuito (come ad esempio i fili elettrici di collegamento) portano rispettivamente alla resistenza e all'induttanza del circuito stesso. Osserviamo infine che la differenza di potenziale presente ai capi dell'induttanza ($f_a = -L\,dI/dt = RI - f$, come discende dalla [VII.23]) è immediatamente calcolabile a partire dalla [VII.25]: cosa che può esssere fatta sia derivando la [VII.25] rispetto al

tempo e moltiplicando per $-L$; sia moltiplicando la [VII.25] per R e sottraendo f. Si ottiene

$$f_a = - L \frac{dI}{dt} = - f e^{-(R/L)t} \qquad \text{[VII.26]}$$

che ha l'andamento mostrato in figura. Il segno meno nella [VII.26] sta ad indicare che f_a si oppone a f: per $t = 0$, $f_a = -f$, e dunque f_a annulla completamente f (e infatti $I = 0$); per $t \to \infty$ (e in pratica non appena $t \geq 5\tau$), $f_a \to 0$ e dunque nel circuito resta attiva la sola forza elettromotrice costante del generatore ($I = f/R$).

Esempio

E.VII.6. *Analizziamo come varia la corrente nel circuito RL considerato nell'esempio precedente, se, a partire da un istante in cui $I = I_m = f/R$ (istante che assumeremo come $t = 0$), viene aperto l'interruttore T.*

Si potrebbe pensare che con l'apertura dell'interruttore, divenendo infinita la resistenza elettrica del circuito, la corrente divenga istantaneamente nulla. Tuttavia se ciò accadesse la forza elettromotrice autoindotta ai capi dell'induttanza diverrebbe infinita, e ciò non è fisicamente possibile. Ciò che accade in realtà è che subito dopo l'apertura dell'interruttore, la forza elettromotrice autoindotta ai capi dell'induttanza aumenta bruscamente arrivando, in certi casi, a far scoccare una scintilla ai capi dell'interruttore (*extracorrente di apertura*). La resistenza del circuito passa così bruscamente dal valore R a un valore R' molto maggiore di R, ma diverso da infinito. In realtà la resistenza $R' >> R$ non è costante nel tempo, poiché essa cambia via via che cambia la corrente residua circolante nel circuito dopo l'apertura dell'interruttore: R' tende a infinito via via che I tende a zero. Tuttavia la soluzione dell'equazione del circuito può essere eseguita facilmente solo supponendo che R' sia costante nel tempo. L'equazione del circuito diviene in tal caso

Extracorrente di apertura

$$R' I + L \frac{dI}{dt} = f$$

ovvero

$$I + \frac{L}{R'} \frac{dI}{dt} = \frac{f}{R'}$$

Risolvendo con la condizione iniziale che per $t = 0$ sia $I = I_m = f/R$, si ottiene immediatamente

$$I = \frac{f}{R} e^{-(R'/L)t} = \left(\frac{f}{R} - \frac{f}{R'}\right) e^{-(R'/L)t} + \frac{f}{R'} \simeq I_m e^{-(R'/L)t} \qquad \text{[VII.27]}$$

La corrente decade esponenzialmente, con costante tempo molto breve $\tau' = L/R'$ ($\tau' << \tau$, poiché $R' >> R$), fino ad annullarsi completamente.

L'equazione [VII.23], che abbiamo risolto esplicitamente in questo paragrafo nell'ipotesi che la forza elettromotrice f fosse costante, vale anche quando f sia variabile nel tempo; nel capitolo VIII discuteremo diffusamente il caso notevole che f abbia un andamento periodico nel tempo.

Qui limitiamo la nostra attenzione a un caso semplice di notevole rilevanza anche pratica. Consideriamo una spira di area S costituita da N avvolgimenti; sia la spira chiusa su sé stessa, e sia R la sua resistenza. Inizialmente la spira è immersa in un campo di induzione $\vec{B}$ costante; suppo-

niamo che essa sia disposta ortogonalmente a $\vec{B}$, cosicché si ha inizialmente

$$\Phi_i(\vec{B}) = NS\bar{B}$$

dove $\bar{B}$ è il valor medio di $\vec{B}$ sull'area occupata dalla spira. Se ora la spira viene estratta dal campo, e portata in una zona in cui $\vec{B} = 0$, si ha una variazione di $\Phi(\vec{B})$ e quindi una forza elettromotrice indotta. L'equazione [VII.23] si scrive allora

$$RI + L\frac{dI}{dt} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Moltiplicando per dt e integrando fra l'istante iniziale t_i (in cui $\Phi_i(B) = NS\bar{B}$) e l'istante finale t_f (in cui $\Phi_f(\vec{B}) = 0$), si ha

$$\int_{t_i}^{t_f} RI\,dt + \int_{t_i}^{t_f} L\,dI = -\int_{t_i}^{t_f} d\Phi(\vec{B}) = -[\Phi_f - \Phi_i] = NS\bar{B}$$

Si ha inoltre:

$$\int_{t_i}^{t_f} L\,dI = L(I_f - I_i) = 0$$ (sia all'istante iniziale che all'istante finale la corrente è nulla)

$$\int_{t_i}^{t_f} RI\,dt = RQ$$ (dove Q è la carica totale che attraversa il circuito)

Per cui la relazione precedente diviene

Legge di Felici

$$Q = \frac{1}{R}[\Phi_i - \Phi_f] = \frac{NS\bar{B}}{R}$$

Questa relazione è detta *legge di Felici*: essa afferma che *la differenza fra il flusso iniziale e quello finale, divisa per la resistenza R della spira, è pari alla carica totale Q che attraversa il circuito*. La carica Q può essere misurata con uno strumento detto *galvanometro balistico*: la legge di Felici può così essere usata per misurare B. È da notare che Q non dipende dalla legge temporale con cui varia $\Phi(\vec{B})$.

VII.6. Induzione mutua

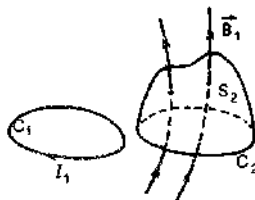
Consideriamo due circuiti, C_1 e C_2, in condizioni quasi-stazionarie, immersi in un mezzo omogeneo ed isotropo di permeabilità magnetica μ costante (indipendente da $\vec{B}$). Supponiamo che C_1 sia percorso, all'istante t, da corrente $I_1(t)$. Esso genera allora nello spazio circostante un campo di induzione magnetica $\vec{B}_1(t)$ che, per la prima formula di Laplace [V.19], è proporzionale a $I_1(t)$. Dunque anche il flusso di $\vec{B}_1$ concatenato col circuito C_2 è istante per istante proporzionale a I_1:

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = M_{21}I_1 \quad \text{ovvero} \quad M_{21} = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{I_1} \qquad \text{[VII.28]}$$

Coefficiente di mutua induzione

La costante di proporzionalità M_{21} definita dalla [VII.28] è detta *coefficiente di mutua induzione* (o *induttanza mutua*) fra C_1 e C_2.

Se dunque $I_1(t)$ varia nel tempo, nel circuito C_2 si genera per conse-

guenza una forza elettromotrice indotta data da:

$$f_{2m} = -\frac{d\Phi_2(\vec{B}_1)}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} \qquad \text{[VII.29]}$$

Analogamente, se C_2 è percorso da corrente I_2, nel circuito C_1 si ha un flusso $\Phi_1(\vec{B}_2)$ proporzionale a I_2:

$$\Phi_1(\vec{B}_2) = M_{12} I_2 \quad \text{ovvero} \quad M_{12} = \frac{\Phi_1(\vec{B}_2)}{I_2} \qquad \text{[VII.30]}$$

Del tutto in generale vale la relazione di uguaglianza

$$M_{12} = M_{21} \qquad \text{[VII.31]}$$

Questa uguaglianza giustifica il nome di *induzione mutua* che si dà a tale grandezza, senza specificare quale dei due circuiti sia oggetto e quale soggetto del fenomeno della induzione: tale fenomeno è in effetti perfettamente simmetrico fra i due circuiti.

La [VII.31] può essere dimostrata facilmente calcolando $\Phi_2(\vec{B}_1)$ (ovvero $\Phi_1(\vec{B}_2)$) utilizzando la definizione e le proprietà del potenziale vettore. Ricordando infatti la relazione [V.46] che lega il potenziale vettore $\vec{A}$ al campo di induzione magnetica $\vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B})$ il flusso $\Phi_2(\vec{B}_1)$ può essere scritto come:

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{l_2} \vec{A}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{l}_2$$

$M_{12} = M_{21} = M$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il teorema di Stokes del rotore; l_2 è la linea chiusa che individua C_2, $\vec{r}_2$ il vettore posizione di un punto generico su l_2, S_2 una superficie avente l_2 come contorno. $\vec{A}_1$ è il potenziale vettore di $\vec{B}_1$; per la [V.54] esso può pertanto essere posto nella forma:

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

che sostituita nella relazione precedente dà:

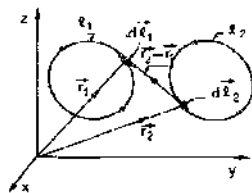
$$\Phi_2(\vec{B}_1) = I_1 \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Per confronto con la [VII.28] si ha:

$$M_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \qquad \text{[VII.32]}$$

Poiché $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ e $d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1 = d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$, e poiché inoltre l'ordine delle due integrazioni nella [VII.32] può essere invertito, la [VII.32] stessa è simmetrica rispetto agli indici 1 e 2; e ciò dimostra che $M_{12} = M_{21}$.

Esempi

E.VII.7. *Consideriamo una spira piana circolare di raggio R. Coplanare e concentrica con essa, sia posta una seconda spira di raggio $r << R$. Usando la definizione [VII.28], calcolare il coefficiente di mutua induzione fra i due circuiti.*

Il campo di induzione magnetica al centro di una spira di raggio R percorsa da corrente I vale (vedi eq. [V.23]):

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2R}\hat{n}$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale alla spira. Poiché $r << R$, $\vec{B}$ si può ritenere uniforme su tutto il cerchio di raggio r e quindi il flusso attraverso la spira di raggio r, la cui superficie $\vec{S}$ è $\vec{S} = \pi r^2 \cdot \hat{n}$ vale:

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\mu I}{2R}\pi r^2$$

e dunque il coefficiente di mutua induzione M vale:

$$M = \frac{\Phi(\vec{B})}{I} = \mu \frac{\pi r^2}{2R}$$

Se ci troviamo nel vuoto ($\mu = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m), e se ad esempio $R = 0{,}1$ m e $r = 0{,}01$ m, si ha:

$$M = 12{,}56 \cdot 10^{-7} \frac{3{,}14 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-1}} \text{ H} \simeq 4 \cdot 10^{-9} \text{ H}$$

E.VII.8. *Su un tubo cilindrico di cartone, di sezione di area S e lunghezza $l >> \sqrt{S}$, sono realizzati due avvolgimenti molto fitti e regolari, fra di loro isolati, di filo conduttore; avvolgimenti costituiti rispettivamente da N_1 spire ed N_2 spire. Calcolare il coefficiente di mutua induzione fra i due circuiti.*

Supponiamo che il circuito costituito da N_1 spire sia percorso da corrente I. Come abbiamo visto nell'esempio E.V.12 (e nell'esempio E.VI.2) internamente al solenoide si ha allora un campo di induzione $\vec{B}$ uniforme, diretto come l'asse del cilindro, di modulo

$$B = \mu \frac{N_1}{l} I$$

Il flusso attraverso il secondo circuito costituito da N_2 spire di area S vale allora:

$$\Phi(\vec{B}) = \mu \frac{N_1 N_2 S}{l} I$$

e dunque

$$M = \frac{\Phi(\vec{B})}{I} = \mu \frac{N_1 N_2 S}{l} \qquad \text{[VII.33]}$$

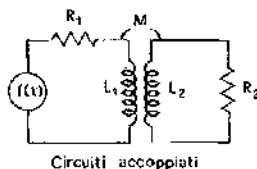
Supponiamo ad esempio $N_1 = 100$; $N_2 = 1000$; $S = 3\ \text{cm}^2 = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$; $l = 10\ \text{cm} = 10^{-1}$ m. Se dentro il cilindro si ha il vuoto (o aria), avremo

$$M = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{10^{-1}} \simeq 4 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

Se dentro il cilindro vi è un materiale ferromagnetico di permeabilità relativa $\mu_r = 1000$, allora M risulta 1000 volte maggiore; nel caso in esame $M = 0{,}4$ H.

E.VII.9. *Se la resistenza elettrica dei due circuiti di cui all'esempio E.VII.8 vale rispettivamente R_1 ed R_2, scrivere la loro equazione nell'ipotesi che il primo sia chiuso su una forza elettromotrice $f(t)$ variabile nel tempo, e il secondo sia chiuso in corto circuito su sé stesso.*

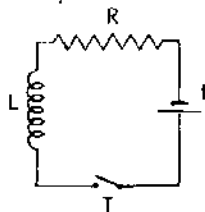
Siano I_1 e I_2 le correnti circolanti rispettivamente nel primo e nel secondo circuito; siano L_1 ed L_2 i coefficienti di autoinduzione dei due circuiti e M il loro coefficiente di mutua induzione. Le forze elettromotrici agenti nel primo circuito saranno allora la $f(t)$, la forza elettromotrice autoindotta $-L_1 \frac{dI_1}{dt}$ e la forza elettromotrice di mutua induzione $-M \frac{dI_2}{dt}$. Analogamente nel secondo circuito (in cui non agisce alcuna forza elettromotrice «esterna») le forze elettromotrici sono $-L_2 \frac{dI_2}{dt}$ e $-M \frac{dI_1}{dt}$. Le due equazioni sono pertanto:

Circuiti accoppiati

$$\begin{cases} R_1 I_1 = f(t) - L_1 \dfrac{dI_1}{dt} - M \dfrac{dI_2}{dt} \\ R_2 I_2 = - L_2 \dfrac{dI_2}{dt} - M \dfrac{dI_1}{dt} \end{cases} \qquad \text{[VII.34]}$$

dove M è dato dalla [VII.33], e L_1 ed L_2 sono dati dalla [VII.22] (con N_1 ed N_2, rispettivamente, al posto di N).

La [VII.34] costituisce un sistema di due equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione verrà discussa nel prossimo capitolo.

VII.7. Analisi energetica di un circuito RL

Riprendiamo, per analizzarlo dal punto di vista energetico, il circuito RL già da noi discusso nel par. VII.5 e descritto dall'equazione differenziale [VII.23] che qui riscriviamo nella forma

$$f = RI + L \frac{dI}{dt} \qquad \text{[VII.23.a]}$$

dove f, R ed L sono parametri costanti a partire dall'istante iniziale in cui viene chiuso l'interruttore T. Moltiplichiamo questa equazione per la quantità $dQ = I\,dt$ che rappresenta la carica erogata dal generatore nell'intervallo elementare di tempo dt:

$$f I\,dt = RI^2\,dt + L I\,dI \qquad \text{[VII.35]}$$

La quantità al primo membro $f I\,dt = f\,dQ$ rappresenta l'energia erogata dal generatore nell'intervallo di tempo dt, come risulta dalla definizione stessa (eq. [IV.29]) di forza elettromotrice. La quantità $RI^2\,dt$ rappresenta l'energia che si dissipa nella resistenza R nel tempo dt per effetto Joule (eq. [IV.24]). Se nel circuito non vi fosse induttanza ($L = 0$), si avrebbe $f I\,dt = RI^2\,dt$ e l'energia erogata dal generatore sarebbe solo quella che serve per rifornire l'energia termica che si dissipa nella resistenza R (che ingloba in sé anche la resistenza interna del generatore). La [VII.35] ci mostra dunque che la

presenza dell'induttanza L comporta l'erogazione, da parte del generatore, dell'energia aggiuntiva

$$dU_L = LI \cdot dI$$

che può essere interpretata come l'*energia che deve essere fornita all'induttanza affinché la corrente in essa circolante si porti dal valore I al valore $I + dI$.* L'energia che deve essere fornita affinché la corrente circolante nell'induttanza passi da O a I è dunque

$$U_L = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2} LI^2 \qquad \text{[VII.36]}$$

Energia posseduta da una induttanza percorsa da corrente I.

La [VII.36] rappresenta dunque anche l'*energia posseduta da una induttanza L percorsa da corrente I.* Questa interpretazione è confermata dal semplice calcolo mostrato nell'esempio E.VII.11, in cui si vede che se una induttanza inizialmente percorsa da corrente I viene chiusa su una resistenza R in un circuito non comprendente alcun generatore, mentre la corrente passa da I a O nella resistenza si dissipa una energia totale pari a $LI^2/2$.

Esempi

E.VII.10. *Nel circuito RL di equazione [VII.23.a] analizzare come variano nel tempo, a partire dall'istante iniziale in cui viene chiuso l'interruttore, la potenza W_g erogata dal generatore, la potenza W_R dissipata per effetto Joule nella resistenza, la potenza W_L assorbita dall'induttanza per accumulare l'energia [VII.36].*

Dividendo la [VII.35] per dt, si ha:

$$W_g = fI = RI^2 + LI\frac{dI}{dt} = W_R + W_L$$

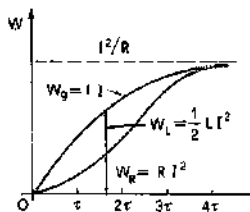
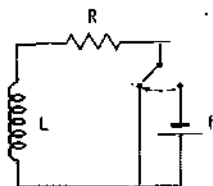
Tenuto conto della espressione della corrente [VII.25], e della sua derivata temporale $\frac{dI}{dt} = \frac{f}{L} e^{-t/\tau}$, con $\tau = L/R$, si ha:

$$W_g = fI = \frac{f^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$W_R = RI^2 = \frac{f^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})^2 = \frac{f^2}{R}(1 - 2\,e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau})$$

$$W_L = LI\frac{dI}{dt} = \frac{f^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})(e^{-t/\tau}) = W_g - W_R$$

L'andamento di queste tre grandezze nel tempo (espresso in unità di $\tau = L/R$) è quello mostrato in figura.

E.VII.11. *A partire da un istante iniziale (preso come $t = 0$) in cui nel circuito RL di cui all'esempio E.VII.10 circola la corrente $I_m = f/R$, il generatore f viene escluso dal circuito, e lo stesso viene chiuso in corto circuito. Calcolare l'an-*

damento temporale della corrente nel circuito RL e dimostrare che l'energia dissipata per effetto Joule nella resistenza $U_R = \int_0^\infty RI^2\,dt$ è proprio pari all'energia $U_L = (1/2)LI_m^2$ inizialmente posseduta dall'induttanza.

L'equazione differenziale del circuito per $t \geq 0$ è:

$$RI = -L\frac{dI}{dt}$$

che va risolta con la condizione iniziale $I(0) = I_m = f/R$. Per separazione di variabili si ottiene immediatamente la soluzione

$$I = \frac{f}{R}e^{-t/\tau}$$

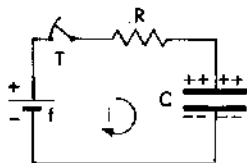
La potenza dissipata per effetto Joule all'istante t è dunque

$$W_R = RI^2 = R\left(\frac{f}{R}e^{-t/\tau}\right)^2 = \frac{f^2}{R}e^{-2t/\tau}$$

L'energia totale dissipata nella resistenza è pertanto:

$$U_R = \int_0^\infty W_R\,dt = \int_0^\infty \frac{f^2}{R}e^{-2t/\tau}\,dt = -\frac{f^2}{R}\left[\frac{L}{2R}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{f^2}{2R^2}L = \frac{1}{2}LI_m^2$$

che è quanto è stato chiesto di dimostrare.

Osserviamo la perfetta analogia fra il comportamento energetico, in fase di scarica, del circuito *RL* or ora analizzato e del circuito *RC* analizzato nell'esempio E.IV.25.

E.VII.12. *Discutere dal punto di vista energetico il comportamento di un circuito RC in fase di carica, analogamente a quanto fatto nell'esempio E.VII.10 per il circuito RL.*

L'equazione [IV.59] del circuito può essere scritta nella forma

$$f - V = RI \quad \text{con } V = \frac{Q}{C} \text{ ed } I = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{[VII.37]}$$

dove $V = \dfrac{Q}{C}$ è la differenza di potenziale fra le armature del condensatore all'istante t; Q è la carica presente sulle armature allo stesso istante; $I = \dfrac{dQ}{dt}$ la corrente circolante in quell'istante nella resistenza (ad una corrente circolante nel verso indicato in figura corrisponde un aumento della carica Q presente nel condensatore, dato che si tratta di un processo di carica; il contrario avviene in un processo di scarica).

Moltiplicando questa equazione per I abbiamo

$$W_f = fI = VI + RI^2 = \frac{QI}{C} + RI^2 = W_C + W_R \qquad \text{[VII.38]}$$

dove W_f e W_R hanno lo stesso significato definito nell'esempio E.VII.10 mentre W_C è la potenza che all'istante t assorbe il condensatore per caricarsi.

Come è immediato verificare (e come del resto è già stato discusso nell'esempio E.IV.26) la soluzione della [VII.37] è

$$Q = fC(1 - e^{-t/RC})$$

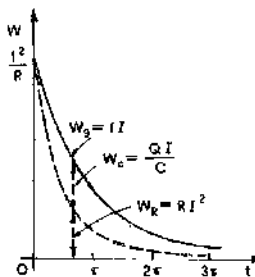
da cui derivando

$$\frac{dQ}{dt} = I = \frac{f}{R}\, e^{-t/RC}$$

Sostituendo queste espressioni per Q e per I nella [VII.38] si ricava:

$$W_g \equiv fI = \frac{f^2}{R}\, e^{-t/RC}$$

$$W_R \equiv RI^2 = \frac{f^2}{R}\, e^{-2t/RC}$$

$$W_C = \frac{QI}{C} = \frac{f^2}{R}\, e^{-t/RC}(1 - e^{-t/RC}) = W_g - W_R$$

che hanno in funzione del tempo l'andamento mostrato in figura. Come al solito la scala dei tempi è misurata in termini della costante tempo τ del circuito, che per un circuito RC vale $\tau = RC$.

Osserviamo che – come già mostrato nell'esempio E.IV.27 – l'energia totale U_g erogata dal generatore è doppia rispetto a quella U_C che si accumula nel condensatore; quest'ultima essendo a sua volta pari all'energia U_R dissipata per effetto Joule nella resistenza:

$$U_g = \int_0^\infty fI\, dt = Cf^2$$

$$U_C = \int_0^\infty \frac{QI}{C}\, dt = \frac{1}{2}\, Cf^2 = \int_0^\infty RI^2\, dt = U_R$$

Quando abbiamo discusso l'energia elettrostatica U_C di un condensatore, la cui espressione in termini della capacità C del condensatore stesso e della carica Q presente sulle sue armature è $U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ (vedi eq. [II.30]), abbiamo poi avuto modo di verificare come si possa dire (vedi es. E.II.15) che tale energia sia localizzata nel campo elettrostatico presente fra le armature del condensatore. Più precisamente l'energia U del campo elettrostatico è descritta da una densità di energia u_E (energia per unità di volume: $u_E = dU/d\tau$) nel seguente modo:

$$U = \int u_E\, d\tau \quad \text{con} \quad u_E = \frac{1}{2}\,\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{\varepsilon E^2}{2} \qquad \text{[III.42]}$$

La [III.42] è anzi una relazione più generale della [II.30]. Essa infatti è applicabile non solo al caso di un condensatore (cioè al caso di due conduttori in condizioni di induzione completa), ma consente di calcolare del tutto in generale l'energia elettrostatica di un sistema qualunque di cariche, purché immerse in un mezzo di costante dielettrica ε uniforme; inoltre essa rappresenta una relazione locale che, come vedremo nel cap. IX, è immediatamente generalizzabile al caso non stazionario, rinunciando anche all'ipotesi di quasi-stazionarietà.

Una situazione del tutto analoga si presenta nel caso dei circuiti percorsi da corrente, la cui energia può essere interpretata come localizzata nel campo magnetico generato dai circuiti stessi nello spazio circostante. Questa affermazione verrà da noi giustificata più avanti in termini generali;

qui cominciamo col verificarla nel caso semplice di un solenoide, di lunghezza l molto maggiore del suo diametro, costituito da N spire percorse da corrente I; cioè nel caso del sistema discusso nell'esempio E.VI.2.

Consideriamo dunque ancora una volta il circuito già più volte analizzato nel corso di questo paragrafo: cioè il circuito LR in fase di «carica» per effetto della forza elettromotrice costante f, descritto dalla equazione [VII.23]:

$$f - L\frac{dI}{dt} = RI$$

Tenuto conto della [VII.22], e del fatto che nel solenoide il campo di induzione $\vec{B}$ è longitudinale e uniforme su tutta la sezione S, possiamo scrivere:

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{d}{dt}(NSB) = NS\frac{dB}{dt}$$

Sostituendo nella precedente equazione e moltiplicando l'equazione stessa per $I\,dt$:

$$fI\,dt = RI^2\,dt + ISN\frac{dB}{dt}\,dt = RI^2\,dt + INS\,dB$$

Vediamo così (analogamente a quanto visto a commento della [VII.35]) che l'energia che va somministrata all'induttanza nel tempo dt (in cui la corrente passa dal valore I al valore $I + dI$, e simultaneamente il campo di induzione passa da B a $B + dB$) è:

$$dU_L = INS\,dB = SlnI\,dB$$

dove $n = N/l$ è il numero di spire per unità di lunghezza. Dividiamo ora la precedente relazione per il volume Sl del solenoide (in modo da ottenere la densità di energia, cioè la energia per unità di volume); tenendo conto che per la [VI.21] la quantità nI è pari al modulo del campo H presente internamente al solenoide, otteniamo:

Incremento della densità di energia corrispondente all'incremento dB dell'induzione magnetica

$$\frac{dU_L}{Sl} = du_L = H\,dB \qquad [VII.39]$$

che rappresenta l'energia che va comunicata all'unità di volume del solenoide per incrementare di dB il campo di induzione in esso presente. Osserviamo che la [VII.39] è stata da noi ottenuta senza fare alcuna ipotesi sul materiale contenuto all'interno del solenoide, purché si tratti di un materiale omogeneo e isotropo: cioè senza alcuna ipotesi sulla relazione che lega tra loro $\vec{B}$ ed $\vec{H}$. Da questo punto di vista, la [VII.39] può essere considerata del tutto generale (materiali diamagnetici, paramagnetici e ferromagnetici). Per quanto riguarda invece la configurazione geometrica del campo, la [VII.39] stessa è stata ottenuta ponendosi in condizioni particolarmente restrittive (campo uniforme su un volume di geometria semplice): vedremo tuttavia nel paragrafo VII.10 che allo stesso risultato si perviene anche per configurazioni del tutto generali del campo (campo non uniforme su un volume qualunque).

La [VII.39] produce conseguenze particolarmente semplici nel caso di materiali diamagnetici o paramagnetici (o comunque nel caso di materiali per cui il rapporto fra B ed H sia in ogni posizione costante, cioè indipendente da B e da H stessi: $B/H = \mu =$ costante). In questo caso la [VII.39] stessa può essere posta nella forma:

$$du_L = \frac{B\,dB}{\mu}$$

e quindi semplicemente integrata dal valore $B = 0$ al valore generico di B:

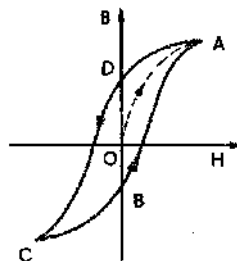
$$u_L(B) = \int_0^B du_L = \int_0^B \frac{B\,dB}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2 \qquad \text{[VII.40]}$$

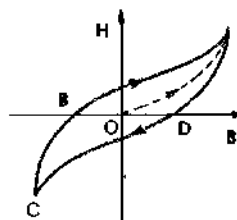
Densità di energia in un campo magnetico (μ = costante)

$$u_L = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2$$

La [VII.40] rappresenta la densità di energia (energia per unità di volume) presente in una regione di spazio, uniformemente riempito con materiale omogeneo caratterizzato da una permeabilità μ costante, in cui sia presente un campo di induzione magnetica di modulo B.

Esempi

E.VII.13. *Un solenoide contiene un nucleo di ferro il cui ciclo di isteresi è quello mostrato in figura. Facendo opportunamente variare la corrente nel solenoide, si costringe il nucleo (dopo averlo portato da O ad A attraverso la curva di prima magnetizzazione) a compiere un ciclo ADCBA. Calcolare l'energia assorbita dall'unità di volume del nucleo.*

Dovremo usare, integrandola, la [VII.39]. Poiché in essa H è la funzione integranda, e B la variabile di integrazione, ridisegnamo per maggior chiarezza la precedente figura prendendo l'asse B come asse delle ascisse, e l'asse H come asse delle ordinate. L'energia per unità di volume che il materiale «rende» mentre percorre il tratto ADC del ciclo di isteresi è data dall'integrale della curva ADC stessa, mentre quella che assorbe quando percorre il tratto CBA è pari all'integrale della curva CBA stessa. L'*energia complessiva* (pari all'energia assorbita meno quella resa) necessaria per far compiere all'unità di volume di materiale l'intero ciclo, è dunque *pari all'area compresa all'interno del ciclo stesso nel piano BH*. Questa energia viene dissipata nel materiale in forma di calore.

Molti dispositivi usati in elettrotecnica, e funzionanti in corrente alternata, sono basati su induttanze (o mutue induttanze) realizzate con solenoidi e nuclei ferromagnetici: nel prossimo capitolo vedremo, ad esempio, il caso dei trasformatori. Per evitare che una frazione rilevante dell'energia si dissipi in calore è allora importante che il nucleo sia realizzato con un materiale a ciclo di isteresi molto stretto.

E.VII.14. *Correnti di Foucault o correnti parassite.*

Correnti parassite o di Foucault

Supponiamo che, internamente a un materiale conduttore, sia presente un campo di induzione $\vec{B}$ variabile nel tempo. Questa circostanza si presenza usualmente nei nuclei ferromagnetici di dispositivi elettrotecnici (elettromagneti, trasformatori statici di cui ci occuperemo nel cap. VIII, ecc.) il cui avvolgimento sia percorso da corrente variabile nel tempo (ad esempio da corrente alternata).

In questo caso, se si considera una linea chiusa l qualunque, internamente al materiale, concatenata con $\bar{B}$; per la legge dell'induzione di Faraday-Neumann la circuitazione di $\bar{E}$ lungo tale linea è diversa da zero:

$$\oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi(\bar{B})}{dt} \neq 0$$

Lungo la linea considerata agisce dunque una forza elettromotrice non nulla. Internamente al materiale circolano pertanto delle correnti indotte, dette correnti di Foucault o correnti parassite, che dissipano energia per effetto Joule sottraendo tale energia al campo magnetico o ai generatori che tale campo producono. Questo meccanismo dissipativo (vedi, per esempio, l'esercizio VII.20), che si aggiunge a quello trattato nell'esempio E.VII.13, è presente anche quando il ciclo di isteresi è molto stretto (al limite, anche quando esso ha area nulla).

Per ridurre gli effetti di questo fenomeno, i nuclei dei dispositivi elettrotecnici destinati a operare in regime variabile nel tempo vengono realizzati mediante lamierini metallici separati l'uno dall'altro da un sottile strato isolante, scegliendo la geometria in modo che le linee chiuse concatenate col campo $\bar{B}$ non siano conduttrici (ciò accade se i lamierini sono paralleli alle linee di forza di $\bar{B}$). Poiché a parità di forza elettromotrice la potenza dissipata per effetto Joule è inversamente proporzionale alla resistenza elettrica ($W = f^2/R$), gli effetti dissipativi vengono così ridotti a livelli trascurabili.

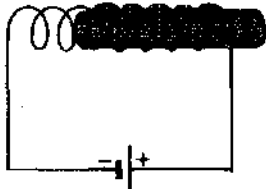
VII.8. Energia magnetica ed azioni meccaniche

VII.8.1. Richiamo ad energia elettrica ed azioni meccaniche

L'analisi energetica svolta nel precedente paragrafo ci rende ragione, in termini chiari e sintetici, dei vari termini del bilancio energetico di un circuito percorso da corrente: dell'energia erogata dal generatore, una definita frazione (perfettamente quantificabile quando siano note le caratteristiche del circuito) si dissipa nella resistenza in forma di calore; e un'altra definita frazione si immagazzina nell'induttanza. Quest'ultima forma di energia è a sua volta interpretabile come energia dislocata nel campo magnetico circostante il circuito.

Più complicata, anche se peraltro assai lineare, è l'analisi della relazione fra i vari termini del bilancio energetico del circuito e le azioni meccaniche che sono esercitate sugli oggetti circostanti.

Cominciamo con l'analizzare un semplice esperimento. In un solenoide percorso da corrente costante I è parzialmente inserito un nucleo di ferro: si riscontra che il nucleo viene risucchiato all'interno del solenoide stesso. Dal punto di vista energetico, questo fenomeno può apparire a prima vista incongruente. Infatti l'energia del sistema solenoide-nucleo, quando il nucleo è

completamente estratto, vale $U_0 = \frac{1}{2} L_0 I^2$, avendo indicato con $L_0 = \frac{N^2 S}{l} \mu_0$ l'induttanza del solenoide «vuoto»; mentre quando il nucleo è completamente inserito essa vale $U_L = \frac{1}{2} L I^2 \left(\text{con } L = \frac{N^2 S}{l} \mu_0 \mu_r\right)$. Poiché $\mu_r > 1$, l'energia del solenoide nello stato finale è maggiore dell'energia nello stato iniziale; ed è questa appunto l'apparente incongruenza, visto che abitualmente individuiamo le configurazioni di equilibrio meccanico stabile nelle configurazioni corrispondenti ai minimi dell'energia U.

Per comprendere meglio questo punto, riprendiamo un attimo l'analisi della forza fra le armature di un condensatore piano, da noi già trattata nell'esempio E.II.16. L'energia elettrostatica del condensatore di capacità $C = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$ (con S area delle armature, e x distanza fra queste) è

$$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C\Delta V^2,$$

dove Q è la carica e $\Delta V = Q/C$ la differenza di potenziale fra le armature stesse. Calcoliamo dunque, usando il metodo dei lavori virtuali, la forza fra le armature:

$$f_x = -\frac{\partial U_C}{\partial x}$$

Se usiamo per l'energia l'espressione

$$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_0 S},$$

ponendo $Q = \text{cost}$ (che equivale a considerare il condensatore isolato) e derivando otteniamo:

$$f_x = -\left(\frac{\partial U_C}{\partial x}\right)_{Q=\text{cost}} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} \qquad \text{[VII.41]}$$

che, essendo negativa, rappresenta una forza attrattiva.

Se invece usiamo l'espressione

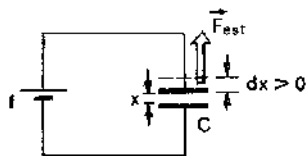
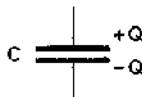
$$U_C = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\Delta V^2\frac{\varepsilon S}{x}$$

e deriviamo ponendo $\Delta V = \text{cost}$ (il che equivale a considerare il condensatore collegato con un generatore di forza elettromotrice costante $f = \Delta V$) otteniamo:

$$\begin{aligned} f_x = -\left(\frac{\partial U_C}{\partial x}\right)_{\Delta V=\text{cost}} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 S\Delta V^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{x^2}\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{C^2\Delta V^2}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} \end{aligned} \qquad \text{[VII.42]}$$

Questo calcolo fornisce una forza che ha lo stesso modulo che nel caso precedente, ma è repulsiva anziché attrattiva (essendo positiva).

Sperimentalmente, la forza che si esercita fra le armature è attrattiva, ed è la stessa (a parità di Q, cioè anche a parità di ΔV) sia se il condensatore è isolato, sia se esso è chiuso su un generatore di forza elettromotrice costante $f = \Delta V$. Il primo calcolo fornisce il risultato corretto; il secondo fornisce un risultato errato, essendo il segno sbagliato (anche se corretto il modulo).

Per capire l'origine di questa incongruenza, ricordiamo che alla base del metodo dei lavori virtuali vi è la considerazione che in un sistema meccanicamente, ma non termicamente, isolato, l'energia meccanica può diminuire

(se il sistema cede calore all'ambiente) ma non può aumentare (per il secondo principio della termodinamica, calore sottratto all'ambiente non può trasformarsi spontaneamente in energia meccanica): e poiché nelle situazioni di equilibrio (energia cinetica nulla) l'energia totale coincide con l'energia potenziale, le configurazioni di equilibrio sono quelle corrispondenti a un minimo dell'energia potenziale.

Quando dunque si passa a fenomeni appartenenti a domini della fisica diversi da quello meccanico, il principio dei lavori virtuali è applicabile pur di usare – al posto dell'energia potenziale meccanica – l'*energia totale U_m del sistema suscettibile di trasformazione in calore.*

In questa luce, vediamo prima il caso del condensatore isolato. L'energia U_m è in questo caso tutta e sola l'energia elettrostatica del condensatore; dunque $U_m = U_C$, e la [VII.41] è corretta.

Nel caso in cui il condensatore sia collegato ad un generatore di d.d.p. con f costante, nell'applicare il principio dei lavori virtuali occorre tener conto anche del lavoro elettrico fatto dal generatore in seguito allo spostamento di carica elettrica necessario a mantenere costante la d.d.p. tra le armature. Supponiamo ancora di avere un condensatore a facce piane e parallele di area S poste nel vuoto a distanza x e di applicare una forza esterna $\vec{F}_{est}$ che allontani della quantità virtuale δx le armature del condensatore. La forza $\vec{F}_{est}$ è scelta in modo da essere in modulo appena diversa dalla forza elettrica f_x che si esercita tra le armature e da avere segno opposto rispetto a questa. La forza $\vec{F}_{est}$ compie pertanto un lavoro virtuale $\delta L_{est} = F_{est}\,\delta x$ sul sistema costituito dal condensatore e dal generatore. A seguito dell'aumento di distanza tra le armature del condensatore, la capacità di questo diminuisce e ciò implica, a d.d.p. costante, una diminuzione dell'energia elettrostatica U_C immagazzinata nel condensatore pari a

$$\delta U_C = \delta\left[\frac{1}{2}\,C(x)\,f^2\right] = \frac{1}{2}\,f^2\,\frac{dC}{dx}\,\delta x = \frac{1}{2}\,f^2\,\delta C$$

dove

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{x} \qquad \text{e} \qquad \delta C = -\frac{\varepsilon_0 S}{x^2}\,\delta x\,.$$

In concomitanza all'allontanamento delle armature del condensatore, la carica su di esse depositata deve diminuire; infatti il campo elettrico nel condensatore diminuisce, dovendosi avere la stessa d.d.p. tra armature che si sono allontanate ($E_{iniziale} \cdot x = f$; $E_{finale} \cdot (x + \delta x) = f$). Dunque una certa quantità di carica δQ passa dall'armatura positiva a quella negativa del condensatore, attraverso il generatore di f.e.m. in verso opposto al campo elettromotore e quindi compiendo un lavoro elettrico negativo $\delta U_g = -f\,\delta Q$, che viene immagazzinato nella forma di energia che caratterizza il generatore (per esempio chimica, come nel caso di ricarica di un accumulatore).

Dunque il lavoro virtuale delle forze esterne produce contemporaneamente una diminuzione di energia elettrostatica nel condensatore ed un aumento dell'energia immagazzinata nel generatore. Il confronto tra queste due quantità permette di affermare che l'energia immagazzinata nel generatore è positiva ed ha valore assoluto doppio rispetto all'energia elettrostatica perduta dal condensatore. Infatti si ha:

$$\delta U_g = -f\,\delta Q$$

con $Q = f C$ e quindi $\delta Q = f \delta C$ (con $f =$ costante) da cui:

$$\delta U_g = -f^2 \delta C \qquad (\delta C < 0 \text{ e } \delta U_g > 0)$$

laddove si ha:

$$\delta U_C = \frac{1}{2} f^2 \delta C .$$

Tenendo conto del principio di conservazione dell'energia e del fatto che il contributo del generatore al bilancio energetico complessivo è pari al doppio del contributo elettrostatico cambiato di segno, per cui la variazione totale di energia si può calcolare cambiando segno alla variazione di energia elettrostatica, si può scrivere:

$$\delta L_{est} = F_{est} \delta x = - f_x \delta x = \delta U_C + \delta U_g = - \delta U_C \qquad \text{[VII.43]}$$

da cui:

$$f_x = + \left(\frac{\partial U_C}{\partial x} \right)_{\Delta V = \text{costante}} \qquad \text{[VII.44]}$$

È questa l'espressione corretta della forza ed ha segno opposto rispetto alla [VII.42] (che invece è errata).

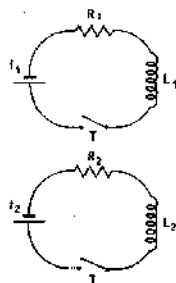
Una situazione del tutto analoga si presenta nei circuiti magnetici. Tutte le volte che noi trattiamo una espressione dell'energia magnetica ipotizzando che la corrente sia costante (ipotesi che a volte viene fatta indirettamente, ipotizzando che sia costante il campo $\vec{B}$) – cioè che sia indipendente dai parametri geometrici del problema – noi implicitamente assumiamo che i vari circuiti costituenti il sistema considerato siano collegati a generatori capaci di mantenere costanti le correnti circolanti nei circuiti stessi.

Per dedurre correttamente le conseguenze della applicazione del principio dei lavori virtuali al caso di azioni magnetiche tra circuiti percorsi da corrente, è necessario premettere alcuni sviluppi relativi all'energia magnetica nel caso di circuiti accoppiati.

VII.8.2. Energia magnetica nel caso di circuiti accoppiati

L'analisi svolta nei precedenti paragrafi ci ha portato a riscontrare, in condizioni quasi statiche, una perfetta analogia fra gli aspetti energetici di un condensatore carico e quelli di un'induttanza percorsa da corrente. Questa analogia può essere riassunta nei seguenti parallelismi: la forma dell'energia potenziale – rispettivamente elettrostatica e magnetostatica – immagazzinata nel dispositivo (rispettivamente $U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2$ e $U_L = \frac{1}{2} L I^2$); il modo in cui tale energia può essere espressa in funzione del campo in un mezzo omogeneo ed isotropo (rispettivamente $u_E = \frac{1}{2} ED$; $u_M = \frac{1}{2} HB$). Vedremo che questa analogia è del tutto generale.

Analogia fra energia elettrostatica di un condensatore e energia magnetica di una induttanza

Cominciamo con l'analizzare il caso di più circuiti accoppiati percorsi da corrente in condizioni quasi-statiche: circuiti cioè che interagiscono l'un con l'altro scambiandosi forze di natura magnetica.

Vediamo prima il caso più semplice, cioè quello di due soli circuiti accoppiati. Il comportamento dei circuiti sarà descritto da un sistema di equazioni analogo al sistema [VII.34], e precisamente:

$$\begin{cases} f_1 - L_1 \dfrac{dI_1}{dt} - M_{12} \dfrac{dI_2}{dt} = R_1 I_1 \\[2ex] f_2 - L_2 \dfrac{dI_2}{dt} - M_{21} \dfrac{dI_1}{dt} = R_2 I_2 \end{cases}$$

dove il pedice alle varie grandezze specifica a quale circuito si riferiscano: f è la forza elettromotrice (costante); L il coefficiente di autoinduzione; $M = M_{12} = M_{21}$ il coefficiente di mutua induzione; I la corrente; R la resistenza. Scriviamo per comodità questo sistema (che è un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti) nella forma:

$$\begin{cases} f_1 = L_1 \dfrac{dI_1}{dt} + M_{12} \dfrac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 \\[2ex] f_2 = L_2 \dfrac{dI_2}{dt} + M_{21} \dfrac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 \end{cases} \qquad \text{[VII.45]}$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $dQ_1 = I_1\, dt$ e la seconda per $dQ_2 = I_2\, dt$, cioè per la carica erogata nel tempo dt dai rispettivi generatori. Sommando membro a membro (e usando l'uguaglianza $M_{12} = M_{21}$) otteniamo:

$$(f_1 I_1\, dt + f_2 I_2\, dt) = (I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2)\, dt +$$
$$+ [L_1 I_1\, dI_1 + L_2 I_2\, dI_2 + M_{12} (I_1\, dI_2 + I_2\, dI_1)]$$

Al primo membro di questa relazione abbiamo l'energia complessivamente erogata dai generatori nel tempo dt; e vediamo che questa non è semplicemente pari a quella dissipata nello stesso tempo per effetto Joule nelle resistenze. In più, i generatori devono erogare l'energia:

$$dU_M = L_1 I_1\, dI_1 + L_2 I_2\, dI_2 + M_{12} (I_1\, dI_2 + I_2\, dI_1) =$$
$$\left[= d \left(\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \right) \right]$$

che rappresenta dunque l'energia che deve essere fornita ai circuiti per incrementare di dI_1 e dI_2 le correnti I_1 e I_2 in essi circolanti. Integrando da $I_1 = I_2 = 0$ (situazione iniziale), ai valori finali I_1 e I_2 abbiamo:

$$U_M = \int_0^{I_1, I_2} dU_M = \underbrace{\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2}_{\text{energia dei singoli circuiti}} + \underbrace{M_{12} I_1 I_2}_{\text{energia di mutua interazione}} \qquad \text{[VII.46]}$$

Osserviamo, per inciso, che tenendo conto della definizione [VII.28] o [VII.30] l'energia di mutua interazione può essere scritta nella forma

$$U_{M_{12}} = M_{12} I_1 I_2 = \Phi_1 (\vec{B}_2) I_1 = \Phi_2 (\vec{B}_1) I_2$$

cioè come prodotto fra la corrente che circola nel circuito C_1 e il flusso che attraversa tale circuito per il fatto di essere immerso nel campo $\vec{B}_2$ generato dall'altro (o viceversa). Questa espressione è la stessa in modulo, ma opposta in segno, rispetto all'energia meccanica U_m ricavata nel par. V.2 (eq. [V.14]). Approfittando del fatto che $M_{12} = M_{21}$, il termine $M_{12} I_1 I_2$ nella [VII.46] può essere posto nella forma

$$M_{12} I_1 I_2 = \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1 \,.$$

Sostituendo questa relazione nella [VII.46] ed indicando L_1 con M_{11} ed L_2 con M_{22}, la [VII.46] stessa può essere scritta nella forma

$$U_M = \frac{1}{2} M_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1 + \frac{1}{2} M_{22} I_2^2 \qquad \text{[VII.46.a]}$$

ovvero:

$$\boxed{U_M = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j} \qquad \text{[VII.47]}$$

Energia magnetica in termini di correnti e di coefficienti di induzione

Considerata la linearità delle equazioni [VII.45] dei circuiti, ci si rende conto immediatamente che la [VII.47] *rappresenta correttamente l'energia magnetica per un numero N qualunque di circuiti interagenti in condizioni quasi stazionarie*, purché naturalmente le sommatorie si estendano da 1 a N.

La [VII.46.a] può essere scritta anche in un'altra forma, che è utile direttamente in molte circostanze e che servirà anche a noi nel prossimo paragrafo per ulteriori sviluppi della teoria. Raccogliendo, nella [VII.46.a], I_1 dai primi due termini e I_2 dai secondi termini, abbiamo:

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{1}{2} I_1 (M_{11} I_1 + M_{12} I_2) + \frac{1}{2} I_2 (M_{22} I_2 + M_{12} I_1) = \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2) \end{aligned} \qquad \text{[VII.48]}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che $M_{11} I_1 = L_1 I_1 = \Phi_1(\vec{B}_1)$ rappresenta il flusso concatenato col circuito C_1 del campo $\vec{B}_1$ generato da C_1 stesso; mentre $M_{12} I_2 = \Phi_1(\vec{B}_2)$ rappresenta il flusso concatenato con C_1 del campo B_2 generato dal circuito C_2: dunque $\Phi_1 = M_{11} I_1 + M_{12} I_2$ rappresenta il flusso del campo totale $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ (generato dall'uno o dall'altro dei circuiti) attraverso il circuito C_1. Analogamente $\Phi_2 = M_{22} I_2 + M_{12} I_1$ rappresenta il flusso totale di $\vec{B}$ attraverso C_2. Dunque la [VII.48] può essere scritta come

$$\boxed{U_M = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k} \qquad \text{[VII.49]}$$

Così come la [VII.47], anche la [VII.49] vale per un numero qualunque di circuiti: I_k rappresenta la corrente circolante nel circuito k-esimo, e Φ_k il flusso attraverso il circuito k-esimo del campo di induzione totale $\vec{B}$ (incluso quello generato dal circuito stesso).

VII.8.3. Energia magnetica e forze su circuiti

Consideriamo un generico insieme di N circuiti; il k-esimo, sia percorso dalla corrente I_k ed abbia resistenza complessiva R_k. L'energia magnetica dell'intero sistema assume la forma [VII.49]

$$U_M = \frac{1}{2}\sum_j I_j \Phi_j \qquad (j = 1, 2, ..., k, ... N)$$

dove Φ_j è il flusso concatenato con il j-esimo circuito del vettore induzione magnetica $\vec{B}$ generato da tutti i circuiti costituenti il sistema.

Supponiamo ora di operare una traslazione virtuale del k-esimo circuito del sistema, mediante l'applicazione di una forza esterna $\vec{F}^{(k)}$ che imprima al circuito stesso una velocità $\vec{v}^{(k)}$ molto piccola, in modo che si possa trascurare l'energia cinetica associata a questo movimento.

Il corrispondente lavoro virtuale per unità di tempo è allora $\vec{F}^{(k)} \cdot \vec{v}^{(k)}$ ed il principio di conservazione dell'energia deve essere scritto tenendo conto, oltre che della potenza meccanica $\vec{F}^{(k)} \cdot \vec{v}^{(k)}$ trasferita al sistema di circuiti per azione della forza esterna $\vec{F}^{(k)}$, anche dai seguenti altri contributi per unità di tempo:

a) dU_M/dt, relativo all'energia magnetica U_M del sistema di circuiti;
b) dU_R/dt, relativo all'energia complessivamente dissipata per effetto Joule nelle resistenze R_k dei vari circuiti (potenza Joule);
c) dU_g/dt, relativa al lavoro elettrico fornito dai generatori di f.e.m. inseriti nei vari circuiti costituenti il sistema.

Il segno dei vari termini di questa relazione è determinato anche dalla seguente semplice considerazione: nell'unità di tempo, la variazione di energia magnetica $\left(\frac{dU_M}{dt}\right)$ è pari al lavoro comunicato al circuito dalle forze esterne ($\vec{F}^{(k)} \cdot \vec{v}^{(k)}$) più il lavoro erogato dai generatori ($\sum_j I_j f_j$) meno il lavoro dissipato per effetto Joule ($\sum_j I_j^2 R_j$).

Il principio di conservazione dell'energia rapportato all'unità di tempo implica:

$$-\vec{F}^{(k)} \cdot \vec{v}^{(k)} + \frac{dU_M}{dt} + \frac{dU_R}{dt} + \frac{dU_g}{dt} = 0 \qquad \text{[VII.50]}$$

Limitiamoci ora al caso in cui tutte le *correnti* nei vari circuiti siano mantenute *costanti*, mentre avviene la traslazione virtuale del k-esimo circuito. Ciò vuol dire che i vari generatori debbono lavorare aggiustando le rispettive f.e.m. f_j in modo da soddisfare la condizione I_j = costante (con $j = 1, 2, ..., N$). In questo caso i vari termini della [VII.50] assumono la forma:

$$\frac{dU_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_j I_j \Phi_j\right) = \frac{1}{2}\sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt}$$

$$\frac{dU_R}{dt} = \sum_j I_j^2 R_j$$

$$\frac{dU_g}{dt} = -\sum_j I_j f_j$$

Il segno negativo dell'ultimo termine tiene conto del fatto che, in corrispondenza ad uno spostamento del circuito k-esimo che faccia variare il flusso di $\vec{B}$ concatenato con il circuito j-esimo, si ha in quest'ultimo una f.e.m. indotta ($-d\Phi_j/dt$). Consideriamo, a titolo di semplice esempio, il

caso di due circuiti disposti come in figura (correnti concordi e forza magnetica attrattiva).

La forza esterna $\vec{F}^{(2)}$ applicata al circuito 2 allontana i due circuiti e compie un lavoro positivo (forza e spostamento concordi). Durante l'allontanamento il flusso diminuisce e la forza f.e.m. indotta $(-d\Phi_1/dt)$, per la legge di Lenz, tende a far passare corrente nel circuito 1 concordemente ad I_1 e quindi il generatore del circuito 1 deve aggiustare f_1 per mantenere I_1 costante; dunque il prodotto $I_1 f_1$ deve diminuire, realizzandosi così una variazione negativa in concomitanza di un lavoro meccanico positivo della forza esterna.

È da osservare che, rispetto alla situazione di circuiti fermi, il generatore f_1 eroga minor potenza e quindi *realizza* un «*guadagno*» di energia, mentre l'energia magnetica del sistema diminuisce (come si vede dalla [VII.46], in cui il termine di mutua induzione diminuisce con l'allontanamento dei circuiti, mentre i termini di autoenergia restano invariati perché le correnti non variano ed i singoli circuiti non si deformano).

Nell'esplicitare la [VII.50] nel caso considerato (correnti costanti) teniamo anche conto delle equazioni dei singoli circuiti:

$$f_j - \frac{d\Phi_j}{dt} = I_j R_j \quad \text{ovvero} \quad f_j = I_j R_j + \frac{d\Phi_j}{dt}$$

così che possiamo scrivere:

$$-\vec{F}^{(k)} \cdot \vec{v}^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt} + \sum_j I_j^2 R_j - \sum_j \left[I_j \left(I_j R_j + \frac{d\Phi_j}{dt} \right) \right] = 0$$

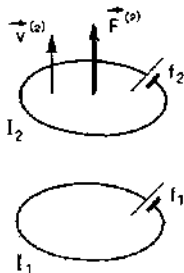
e quindi:

$$-\vec{F}^{(k)} \cdot \vec{v}^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt} - \sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt} = 0 \qquad \text{[VII.51]}$$

È importante osservare che nella [VII.51], valida per correnti costanti, il *contributo* energetico dovuto ai *generatori* di f.e.m. è in modulo pari al *doppio* del termine *di energia magnetica* ed ha *segno opposto* rispetto a questo. Dunque, ad un lavoro virtuale positivo delle forze esterne si accompagna un «guadagno» complessivo di energia, rispetto alla situazione di circuiti fermi, pari al modulo della corrispondente variazione di energia magnetica $dU_M/dt = \frac{1}{2} \sum_j I_j \frac{d\Phi_j}{dt}$. La [VII.51] diventa pertanto:

$$-\vec{F}^{(k)} \cdot \vec{v}^{(k)} + \left| \frac{dU_M}{dt} \right| = 0$$

Tenendo conto che, per garantire una traslazione virtuale a velocità trascurabile, la forza esterna $\vec{F}^{(k)}$ deve essere uguale in modulo e di verso opposto rispetto alla forza $\vec{f}^{(k)}$ che il campo magnetico esercita sul circuito k-esimo, si ha:

$$\vec{f}^{(k)} \cdot \vec{v}^{(k)} = + \left. \frac{dU_M}{dt} \right|_{I=\text{costanti}} \qquad \text{[VII.52]}$$

In termini di componenti cartesiane la [VII.52] si scrive, per ogni traslazione virtuale a velocità $\vec{v}^{(k)}$:

$$f_x^{(k)} v_x^{(k)} + f_y^{(k)} v_y^{(k)} + f_z^{(k)} v_z^{(k)} =$$
$$= \frac{\partial U_M}{\partial x^{(k)}} \cdot v_x^{(k)} + \frac{\partial U_M}{\partial y^{(k)}} v_y^{(k)} + \frac{\partial U_M}{\partial z^{(k)}} v_z^{(k)} ,$$

il che implica:

$$\begin{aligned} f_x^{(k)} &= \left.\frac{\partial U_M}{\partial x^{(k)}}\right|_{I=\text{costanti}} \\ f_y^{(k)} &= \left.\frac{\partial U_M}{\partial y^{(k)}}\right|_{I=\text{costanti}} \\ f_z^{(k)} &= \left.\frac{\partial U_M}{\partial z^{(k)}}\right|_{I=\text{costanti}} \end{aligned} \qquad \text{[VII.53]}$$

È da osservare che le derivate dell'energia magnetica sono prese con il segno positivo, al contrario di quanto accade nel caso dell'energia potenziale meccanica.

L'espressione dell'energia magnetica totale di un insieme di circuiti percorsi da corrente è, come già visto,

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_j I_j \Phi_j$$

e consta di autoenergie dei singoli circuiti (del tipo $L_j I_j^2/2$) e di energie di accoppiamento tra i vari circuiti (del tipo $M_{kj} I_k I_j$).

Nell'operare derivazioni parziali spaziali dell'energia magnetica, se si considerano costanti le correnti ed indeformabili i singoli circuiti (in modo tale che sono costanti i coefficienti di autoinduzione L_j), allora le derivate dell'energia magnetica totale coincidono con le derivate della sola energia di accoppiamento. Per un singolo circuito percorso da corrente I_k l'energia di accoppiamento risulta essere

$$U_{acc} = \sum_{j \neq k} I_k M_{kj} I_j = I_k \Phi_{acc}^{(k)} (\vec{B})$$

dove $\Phi_{acc}^{(k)}$ è il flusso concatenato con il k-esimo ciruito del campo $\vec{B}$ generato da tutti gli altri circuiti (escluso il k-esimo).

Per quanto appena detto, nel calcolo delle forze agenti su un circuito percorso da corrente I e posto in un campo esterno costante $\vec{B}_{est}$, si può scrivere per l'energia magnetica da adoperare nelle derivazioni parziali della [VII.53]:

$$U = + I \Phi (\vec{B}_{est}) \qquad \text{[VII.54]}$$

Esempio

E.VII.15. *Consideriamo un solenoide di lunghezza $l = 10$ cm, costituito da $N = 1000$ spire di area $S = 1$ cm^2 percorse da corrente $I = 1$ A. Nel solenoide viene inserito un nucleo di ferro dolce; le condizioni di lavoro sono tali che il*

nucleo ha una caratteristica $B(H)$ approssimativamente lineare, cosicché si può porre $B = \mu_0\mu_r H$ con $\mu_r = 1000$. Calcolare la forza con cui il nucleo viene risucchiato dentro il solenoide.

Usando il riferimento indicato in figura, si tratta di calcolare f_x; notare che per come è stato scelto il verso dell'asse x, $f_x > 0$ indica una forza attrattiva.

Avremo

$$f_x = + \left.\frac{\partial U_M}{\partial x}\right|_{I=\text{cost}}$$

dove per la [VII.44] e la [VII.36] dobbiamo porre

$$U_M = \frac{1}{2} L I^2$$

con I = costante. Quando il nucleo è inserito per un tratto x, tenuto conto della [VII.22] e della [VII.22,a] avremo:

$$L = \mu_0\mu_r n^2 S x + \mu_0 n^2 S (l - x) = \mu_0 n^2 S [l + (\mu_r - 1) x]$$

dunque

$$U_M = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 n^2 S}{2} I^2 [l + (\mu_r - 1) x]$$

e infine

$$f_x = + \frac{\partial U_M}{\partial x} = \frac{\mu_0 n^2 S}{2} I^2 (\mu_r - 1)$$

Forza di risucchio

Poiché $\mu_r > 1$ la forza è attrattiva. Osserviamo per inciso che se fosse $\mu_r < 1$ (nucleo diamagnetico) sarebbe $f_x < 0$ e dunque repulsiva (seppure molto meno intensa rispetto al caso di nucleo ferromagnetico) coerentemente con la fenomenologia qualitativa descritta all'inizio del capitolo VI. Nel caso del nucleo di ferro, numericamente (ponendo $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \Omega\,\text{s/m}$; $n = N/l = 10^4$ spire/m; $S = 10^{-4}\ \text{m}^2$; $\mu_r - 1 \simeq \mu_r = 1000$) abbiamo

Per sostanze diamagnetiche la forza sarebbe repulsiva

$$f_x = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Omega \cdot \text{s}}{\text{m}} \cdot \frac{10^8}{\text{m}^2} \cdot \frac{10^{-4}\ \text{m}^2}{2} \cdot 1\ \text{A}^2 \cdot 10^3 = 6{,}28\ \text{N}$$

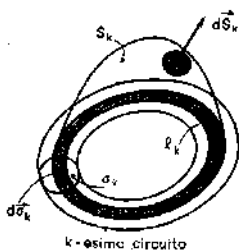
Si tratta, come si vede, di una forza notevolmente intensa, considerato che il peso del nucleo di ferro (cilindretto di lunghezza 10 cm e sezione 1 cm^2) è dell'ordine di $p = mg = \rho V \cdot g = 0{,}8$ N, cioè quasi dieci volte più piccolo.

È interessante osservare che, per il risucchio del nucleo di ferro, il sistema evolve verso stati di energia magnetica massima (il coefficiente di autoinduttanza L cresce all'aumentare di x).

VII.9. Espressioni generali di tipo locale per l'energia magnetica

Al fine di sviluppare l'espressione [VII.49] dell'energia magnetica associata a un certo numero di circuiti percorsi da corrente, consideriamo in maggior dettaglio il circuito k-esimo. Esso sarà in realtà costituito da un conduttore di sezione non nulla σ_k chiuso su sé stesso (ad esempio anulare, come mostrato in figura) percorso da corrente I_k, rappresentabile come flusso di una densità di corrente $\vec{J}_k$:

$$I_k = \int_{\sigma_k} dI_k = \int_{\sigma_k} \vec{J}_k \cdot d\vec{\sigma}_k$$

k-esimo circuito

Decomponiamo il circuito in un sistema di circuiti elementari filiformi l_k di sezione $d\sigma_k$ che siano tubi di flusso di $\vec{J}_k$. Il generico di tali circuiti elementari è percorso dalla corrente

$$dI_k = \vec{J}_k \cdot d\vec{\sigma}_k$$

Detta S_k una superficie che abbia l_k come contorno, riscriviamo la [VII.49] come somma di tutti i contributi elementari dei tubi elementari l_k di corrente in cui i vari circuiti sono stati decomposti. Si ha:

$$U_M = \frac{1}{2}\sum_k I_k \Phi_k = \frac{1}{2}\sum_k \left[\int_{\sigma_k} \vec{J}_k \cdot d\vec{\sigma}_k \cdot \int_{S_k} \vec{B} \cdot d\vec{S}_k\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_k \left[\int_{\sigma_k} \vec{J}_k \cdot d\vec{\sigma}_k \int_{S_k} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_k\right] = \frac{1}{2}\sum_k \left[\int_{\sigma_k} \vec{J}_k \cdot d\vec{\sigma}_k \oint_{l_k} \vec{A} \cdot d\vec{l}_k\right]$$

dove, naturalmente, $\vec{A}$ è il potenziale vettore di $\vec{B}$ ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$). Tenuto conto che $\vec{J}_k$ è parallelo a $d\vec{l}_k$ e che $d\vec{\sigma}_k$ (essendo una sezione normale) è anch'esso parallelo a $d\vec{l}_k$, la precedente relazione può essere scritta come

$$U_M = \frac{1}{2}\sum_k \left[\int_{\sigma_k} J_k d\sigma_k \oint_{l_k} \vec{A} \cdot d\vec{l}_k\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_k \int_{\sigma_k} \oint_{l_k} \vec{J}_k \cdot \vec{A}\, d\tau_k = \frac{1}{2}\sum_k \int_{\tau_k} \vec{J}_k \cdot \vec{A}\, d\tau_k$$

dove $d\tau_k = d\sigma_k\, dl_k$ è l'elemento di volume del circuito e τ_k il suo volume totale. Considerato che la somma sull'indice k copre tutti i circuiti presenti nello spazio e che la densità di corrente $\vec{J}_k$ è nulla fuori dai circuiti, possiamo scrivere la precedente relazione come:

Densità di energia magnetica come prodotto $\vec{J} \cdot \vec{A}$

$$U_M = \frac{1}{2}\int_\tau \vec{J} \cdot \vec{A}\, d\tau \qquad \text{[VII.55]}$$

dove τ è un qualunque volume che contenga tutti i circuiti. Vediamo che la [VII.55] è formalmente analoga alla espressione [II.28] dell'energia elettrostatica, col prodotto scalare $\vec{J} \cdot \vec{A}$ fra la densità di corrente e il potenziale vettore al posto del prodotto ρV fra la densità di carica e il potenziale elettrostatico.

Densità di energia magnetica

Contrariamente alle relazioni [VII.47] e [VII.49], che esprimevano l'energia magnetica in termini di prodotti di grandezze fisiche «integrali», e quindi calcolate ciascuna indipendentemente dall'altra nello spazio, la [VII.50] esprime tale energia in *forma locale*, cioè come integrale di una densità di energia magnetica

$$u_M = \frac{1}{2}\vec{J} \cdot \vec{A} \qquad \text{[VII.56]}$$

costruita moltiplicando fra di loro le grandezze $\vec{J}$ ed $\vec{A}$ *calcolate nella stessa posizione dello spazio*. Ci aspettiamo dunque che la [VII.55] abbia validità più generale delle relazioni non locali [VII.47] e [VII.49], essendo in grado di esprimere l'energia magnetica anche nel caso non stazionario, pur di sostituire in essa le espressioni che $\vec{J}$ e $\vec{A}$ assumono nel caso non stazionario stesso; in particolare al posto di $\vec{J}$ dovrà essere posta la densità di corrente generalizzata $\vec{J} \to \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$ (vedi eq. [VII.18])

Densità di energia magnetica nel caso non stazionario

$$u_M = \frac{1}{2}\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \vec{A} \qquad \text{[VII.57]}$$

Questa conclusione è confermata dall'evidenza sperimentale.

A partire dalla [VII.57] è immediato esprimere l'energia magnetica in termini del campo magnetico. Tenuto conto della quarta equazione di Maxwell (eq. [VII.20]) la [VII.57] può essere scritta come:

$$u_M = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A}$$

che sostituita nella [VII.55] ci dà per l'energia magnetica l'espressione:

$$U_M = \frac{1}{2}\int_\tau (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A}\, d\tau$$

Questa relazione, tenendo conto della identità vettoriale

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A} - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

(vedi relazione d.2 di tabella V.1 pag. 208), può essere scritta come:

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{1}{2}\int_\tau (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A}\, d\tau = \frac{1}{2}\int_\tau \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{A})\, d\tau + \frac{1}{2}\int_\tau \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})\, d\tau = \\ &= \frac{1}{2}\int_S (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_\tau (\vec{H} \cdot \vec{B})\, d\tau \end{aligned} \qquad [VII.58]$$

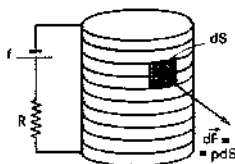
dove S è la superficie che racchiude il volume τ. Nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il teorema della divergenza per il primo integrale, mentre per il secondo abbiamo usato la relazione [V.46]: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. La [VII.58] è del tutto analoga alla [II.34] per il caso elettrostatico, ed ammette la stessa interpretazione discussa a commento della [II.34] stessa. La funzione (analoga della [III.42] per il caso elettrostatico):

Densità di energia espressa in termini dei campi

$$u_M = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}\frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \qquad [VII.59]$$

(funzione dello spazio e del tempo nel caso generale; funzione solo dello spazio nel caso stazionario) rappresenta l'espressione della densità di energia in termini dei campi $\vec{H}$ e $\vec{B}$. Come nel caso elettrostatico, così anche nel caso magnetostatico il contributo dell'integrale di superficie nella [VII.58] tende a zero al tendere all'infinito del raggio della superficie S (per $r \to \infty$, $\vec{A} \to 0$ come $1/r$ e $\vec{H} \to 0$ come $1/r^2$, vedi eq. [V.19] e [V.54]).

Nel caso non stazionario, invece, vedremo che il campo elettromagnetico può propagarsi alla velocità della luce nella forma di onde elettromagnetiche. Le modalità di propagazione delle onde elettromagnetiche sono tali che il flusso di energia del campo elettromagnetico uscente da una superficie S resta diverso da zero anche molto lontano dalle sorgenti (al limite, anche per $r \to \infty$). Questa circostanza, che verrà da noi discussa in termini approfonditi nel cap. IX, rafforza anziché indebolire l'interpretazione che l'energia elettromagnetica sia dislocata realmente nel campo elettromagnetico stesso, e da esso trasportata: fenomeni di trasferimento energetico si verificano infatti dovunque sia presente il campo elettromagnetico, anche quando questo agisca in tempi e luoghi molto distanti rispetto ai tempi e luoghi in cui agiscono le sorgenti che hanno generato il campo stesso.

A conclusione delle precedenti considerazioni su energia magnetica ed azioni meccaniche su circuiti, vediamo alcuni semplici esempi.

Esempi

E.VII.16. *Un solenoide, di lunghezza l molto maggiore del raggio r, è realizzato con N spire uniformemente avvolte in modo compatto. Calcolare la pressione p (forza normale per unità di superficie) cui è sottoposto il solenoide quando in esso circola corrente I.*

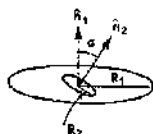
In questo caso l'unico termine di energia magnetica è $U_M = LI^2/2$; il solenoide è meccanicamente isolato, e dunque il risultante e il momento risultante delle forze su di esso agenti sono nulli. Si tratta di calcolare la forza che ogni elemento del solenoide subisce ad opera delle restanti parti del solenoide stesso. Considerata la simmetria cilindrica del sistema, la forza $d\vec{F}$ subita dall'elemento di superficie $d\vec{S}$ è normale all'elemento di superficie stesso e il suo modulo dF è indipendente da dove è dislocato l'elemento dS sul solenoide. La pressione (forza per unità di superficie)

$$p = dF/dS$$

è dunque uniforme su tutta la superficie laterale del solenoide, e pertanto può essere calcolata applicando il principio dei lavori virtuali, rispetto al parametro geometrico r, all'energia di tutto il solenoide, e dividendo per la superficie laterale totale $S = 2\pi r l$

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{S}\frac{\partial U_M}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r l}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}\mu_0\mu_r\frac{N^2}{l}\pi r^2 I^2\right) = \mu_0\mu_r\frac{I^2N^2}{2l^2}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che $L = \mu\dfrac{N^2}{l}\pi r^2$ (vedi eq. [VII.22]), e dunque $\dfrac{\partial L}{\partial r} = \mu\dfrac{N^2 2\pi r}{l}$.

Queste sollecitazioni interne di tipo magnetico possono essere nella pratica assai rilevanti, e di esse si deve tener conto nella progettazione delle caratteristiche meccaniche dei dispositivi magnetici. Ad esempio se $N = 10^4$; $l = 0{,}1$ m; $\mu_r = 1$; $I = 5$ A, risulta $p \simeq 1{,}5\cdot 10^5$ N/m^2 = 1,5 atm.

E.VII.17. *Una piccola spira circolare rigida C_2 di raggio R_2 percorsa da corrente I_2 è posta al centro di una seconda spira circolare C_1 di raggio R_1 ($R_1 >> R_2$) percorsa da corrente I_1. La normale $\hat{n}_2$ a C_2 forma un angolo α con la normale $\hat{n}_1$ a C_1. Calcolare la forza risultante $\vec{F}$ e il momento risultante $\vec{M}$ agenti su C_2 ad opera di C_1.*

Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della spira C_1, asse z parallelo a $\hat{n}_1$ e asse x normale al piano $\hat{n}_1\hat{n}_2$.

L'energia magnetica U_M del sistema può essere espressa tramite la [VII.46]: in essa i due termini $(1/2)\,L_1I_1^2$ e $(1/2)\,L_2I_2^2$ di auto-energia sono costanti (indipendenti dalla posizione relativa dei due circuiti); a meno di una costante possiamo dunque porre che l'energia magnetica sia pari all'energia di mutua interazione. Dunque:

$$U_M = M_{12}I_1I_2$$

La dipendenza dalla posizione relativa è contenuta nella dipendenza di M_{12} dai parametri geometrici, cioè dall'angolo α e dalla posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ della spira C_2 rispetto al centro della spira C_1 (cioè rispetto all'origine).

Per il calcolo di M_{12}, ricordiamoci la definizione [VII.28] o [VII.30]:

$$M_{12} = \frac{\Phi_1(\vec{B}_2)}{I_2} = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{I_1}$$

Poiché la spira C_2 è molto più piccola di C_1, è assai più semplice il calcolo di $\Phi_2(\vec{B}_1)$ (che almeno per $\vec{r}=0$ può essere facilmente eseguito in termini approssimati) che non il calcolo di $\Phi_1(\vec{B}_2)$. Si ha infatti, analogamente a quanto visto nell'esempio E.VII.7:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu I_1 \hat{n}_1}{2R_1}$$

$$\Phi_2(\vec{B}_1) \simeq \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{\mu I_1 \hat{n}_1}{2R_1} \cdot \vec{S}_2 = \frac{\mu I_1}{2R_1} \pi R_2^2 \cos\alpha$$

Dunque:

$$M_{12}(\vec{r}=0;\alpha) = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{I_1} = \frac{\mu}{2R_1} \pi R_2^2 \cos\alpha$$

o infine:

$$U_M(\vec{r}=0;\alpha) = M_{12} I_1 I_2 = \frac{\mu I_1 I_2}{2R_1} \pi R_2^2 \cos\alpha$$

Poiché la spira C_2 è assimilabile a un sistema rigido, una volta determinata l'energia U_M il calcolo delle sollecitazioni meccaniche si riduce al calcolo del gradiente (per ottenere il risultante) e al calcolo delle derivate rispetto agli angoli (per avere le componenti del momento); vedi le equazioni [VII.53].

Nel nostro presente caso, il campo B_1 (e dunque anche M_{12}) per ragioni di simmetria ammette un massimo al centro di C_1, cioè per $\vec{r}=0$. In tale posizione è pertanto nullo il risultante delle forze agenti su C_2

$$\vec{f} = 0$$

Quanto al momento, è diversa da zero solo la componente ortogonale al piano $\hat{n}_1 \hat{n}_2$ che individua l'angolo α, cioè la componente x:

$$\begin{cases} M_x = \dfrac{\partial U_M}{\partial \alpha} = -\dfrac{\mu I_1 I_2}{2R_1} \pi R_2^2 \sin\alpha \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

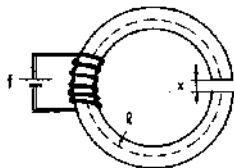
E.VII.18. *Un elettromagnete è costituito da un anello di ferro dolce ($\mu_r = 1000$) la cui lunghezza sulla linea mediana è $l = 50$ cm e la sezione $S = 60$ cm^2, con un avvolgimento di $N = 1000$ spire percorse da corrente $I = 2$ A, e un traferro di spessore $x = 1$ cm. Calcolare la forza f con cui si attraggono le espansioni polari.*

Usiamo la approssimazione di circuito magnetico (vedi par. VI.7.1) secondo cui $\vec{B}$ è ortogonale ad ogni sezione normale del circuito e $\Phi(\vec{B})$ è costante in ogni sezione (flusso disperso nullo). Si ha pertanto:

$$\Phi(\vec{B}) = BS = \Phi(\vec{B}_0) = B_0 S \qquad \text{da cui } B = B_0$$

dove B è l'induzione entro il ferro e B_0 nel traferro.

Applicando ora il teorema della circuitazione lungo la linea mediana l si ha (vedi eq. [VI.53]):

$$NI = Hl + H_0 x = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} l + \frac{B}{\mu_0} x$$

da cui:

$$B = B_0 = \frac{\mu_0 N I}{\left(\frac{l}{\mu_r} + x\right)}$$

La densità di energia magnetica dentro il ferro e nel traferro è dunque, rispettivamente:

$$u = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 I^2}{\mu_r\left(\frac{l}{\mu_r} + x\right)^2}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 I^2}{\left(\frac{l}{\mu_r} + x\right)^2}$$

e l'energia magnetica totale U_M del circuito è:

$$U_M = uSl + u_0 Sx = \frac{\mu_0}{2}\frac{N^2 I^2 S}{\left(\frac{l}{\mu_r} + x\right)}$$

Tenuto conto ora della eq. [VII.53], possiamo calcolare la forza f come:

$$f = \frac{\partial U_M}{\partial x}$$

Si ottiene:

$$f = -\frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{\left(\frac{l}{\mu_r} + x\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{B^2 S}{\mu_0}$$

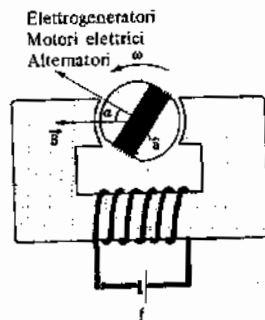
La forza è negativa, e dunque attrattiva (opposta a x). Sostituendo i valori numerici nel caso in esame, si ha $f = 150$ N.

VII.10. Elettrogeneratori e motori elettrici

L'induzione elettromagnetica è alla base di una grande varietà di dispositivi elettrotecnici destinati alle applicazioni più diverse. Qui ci limitiamo a descrivere il principio di funzionamento dei più comuni dispositivi appartenenti a due grandi categorie di applicazioni: quelle per la conversione di energia meccanica in energia elettrica (*elettrogeneratori*) e quelle per la conversione di energia elettrica in energia meccanica (*motori elettrici*).

Elettrogeneratori
Motori elettrici
Alternatori

I più comuni elettrogeneratori sono gli *alternatori*. Lo schema del più semplice fra gli alternatori è mostrato in figura: si tratta di una bobina (detta «indotto») girevole intorno a un asse fisso $\hat{a}$ entro un campo magnetico $\vec{B}$ generato da un elettromagnete («induttore») eccitato da un opportuno avvolgimento. Se, per semplicità, supponiamo che il campo $\vec{B}$ entro cui la bobina ruota sia uniforme, il flusso concatenato con la bobina stessa (formata da N spire di area S) quando la normale $\hat{n}$ alle spire forma un angolo α con la direzione del campo $\vec{B}$ è:

$$\Phi(\vec{B}) = NSB\cos\alpha$$

Supponiamo che la spira ruoti con velocità angolare costante ω per azione di un dispositivo meccanico (turbina azionata da un motore termico, da acqua fluente, ecc.). Abbiamo allora $\alpha = \omega t$ (avendo posto $t = 0$ quando $\alpha = 0$), e quindi:

$$\Phi(\vec{B}) = NSB\cos\omega t$$

Poiché questo flusso non è costante nel tempo, la bobina è sede di una forza elettromotrice $F(t)$:

$$F(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = NSB\omega\sin\omega t \equiv F_0\sin\omega t \qquad \text{[VII.60]}$$

Attraverso opportuni contatti mobili (realizzati mediante due anelli metallici posti sull'asse $\hat{a}$ di rotazione, isolati fra di loro e rispetto all'asse, su cui strisciano premute da molle due spazzole usualmente costituite da elettrodi di carbone) questa forza elettromotrice «alternata» può essere chiusa su un circuito esterno («carico») che utilizza la potenza elettrica così prodotta secondo modalità che verranno discusse nel prossimo capitolo.

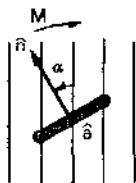
Forza elettromotrice alternata

Per minimizzare la riluttanza del circuito magnetico la bobina dell'indotto è usualmente avvolta su un nucleo di ferro dolce, in virtù del quale il traferro complessivo del circuito magnetico è ridotto a due sottili lamine d'aria. Di solito, nella pratica gli alternatori hanno geometria assai diversa rispetto a quella indicata schematicamente più sopra. È usuale che l'indotto sia fisso, e abbia forma di anello con espansioni polari che si protendono verso l'interno. Intorno a ciascuna espansione è realizzato un avvolgimento dell'indotto. L'induttore, per sua parte, ruota internamente: la sua geometria e le sue bobine di eccitazione sono costruite in modo da fornire all'induttore stesso più coppie di poli magnetici nord-sud, che si presentano in fase alle coppie di espansioni dell'indotto. È chiaro che, concettualmente, un tale alternatore equivale a più alternatori, che vengono poi opportunamente collegati fra di loro (ad esempio in serie, o in parallelo).

Uno dei vantaggi di questa geometria è che l'indotto, che è il circuito di questo dispositivo in cui circola la maggiore potenza, non richiede contatti mobili; questi ultimi sono richiesti solo per alimentare gli avvolgimenti di eccitazione dell'induttore rotante.

Dinamo

Un altro elettrogeneratore di uso comune è la cosiddetta *dinamo*: costruttivamente, essa è realizzata in maniera assai simile a un alternatore a indotto rotante. L'unica differenza consiste nel fatto che i capi della bobina dell'indotto, anziché essere collegati a due diversi anelli collettori, sono collegati alle due metà di un unico anello collettore, a contatto col quale sono due spazzole disposte in posizione diametralmente opposta. Per conseguenza, ogni spazzola è a contatto con un capo dell'indotto durante un mezzo giro; e con l'altro capo durante l'altro semigiro. Il passaggio del contatto dall'uno all'altro capo avviene proprio quando la forza elettromotrice passa per il valore nullo; e la forza elettromotrice applicata fra le due spazzole risulta pertanto pulsata anziché sinusoidale, una delle due spazzole risultando sempre positiva rispetto all'altra. Una versione più sofisticata della dinamo è realizzata col cosiddetto *anello di Pacinotti* che permette di ottenere una forza elettromotrice pressoché costante sovrapponendo un gran numero di forze elettromotrici pulsate opportunamente sfasate fra di loro. Ciò si realizza mediante un indotto con avvolgimento toroidale suddi-

Anello di Pacinotti

viso in molte sezioni, ognuna delle quali è collegata a un diverso segmento cilindrico di un unico collettore anulare, su cui strisciano due spazzole diametralmente opposte.

Motori elettrici

Anche i *motori elettrici* possono essere realizzati in una grande varietà di modelli, appartenenti alle due grandi categorie dei *motori a corrente continua* e dei *motori a corrente alternata*.

Consideriamo una spira («rotore») libera di ruotare intorno ad un asse $\hat{a}$ ortogonale al piano del disegno, percorsa da corrente I circolante in senso antiorario intorno alla normale $\hat{n}$, e immersa in un campo di induzione $\vec{B}$ uniforme e costante generato da un magnete («statore»). Se la normale $\hat{n}$ alla spira forma con $\vec{B}$ un angolo α negativo, il momento tende a far ruotare la spira in senso antiorario; ma quando, dopo essere passato per $\alpha = 0$, l'angolo α diviene positivo, il momento agente sulla spira tende a farla ruotare in senso inverso (orario). Se però, nel momento in cui l'angolo passa per $\alpha = 0$ noi invertissimo il verso di circolazione della corrente nella spira, il momento su di essa agente sarebbe positivo sia per $\alpha > 0$ che per $\alpha < 0$, e la spira sarebbe spinta a ruotare con continuità intorno ad $\hat{a}$. È questo, per l'appunto, il principio di funzionamento dei *motori in corrente continua*.

Motori in corrente continua

La tecnica utilizzata per invertire il verso di circolazione della corrente nella spira è esattamente la stessa, da noi descritta più sopra, usata per prelevare corrente circolante sempre nello stesso verso dall'indotto di una dinamo (due spazzole diametralmente opposte a contatto con un collettore diviso in due semicilindri). In effetti un motore in corrente continua non è altro, in linea di principio, che una dinamo il cui indotto viene alimentato dall'esterno, attraverso le spazzole, con una forza elettromotrice costante. Uno dei limiti di questo tipo di motore sta nel fatto che le spazzole sono sottoposte ad usura; il principale vantaggio è che la velocità, a parità di potenza meccanica erogata dal motore, può essere variata variando semplicemente la corrente circolante nel rotore, cioè variando la tensione di alimentazione di quest'ultimo.

Motori in alternata
Motori sincroni

I *motori a corrente alternata* appartengono a loro volta alle due grandi categorie dei *motori sincroni* e dei *motori asincroni*

Un motore sincrono è anch'esso costituito da un magnete fisso fra le cui espansioni può ruotare una bobina. Quest'ultima è alimentata in alternata, e quindi la corrente circola per metà periodo in un verso e per metà periodo in verso opposto. Se la velocità angolare ω di rotazione del rotore è pari alla pulsazione ω_0 della tensione alternata che alimenta il rotore, si realizza una situazione del tutto simile a quella discussa più sopra per il caso del motore in continua. Questo motore è più semplice di quello in continua, ma è anche meno flessibile perché la sua velocità angolare non può essere variata: in particolare, in fase di avvio è necessario portarlo alla velocità angolare di lavoro ω_0 usando un servomotore di avviamento.

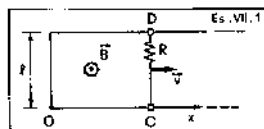
Motori asincroni a campo rotante

I *motori asincroni* sono detti anche *motori a campo rotante*.

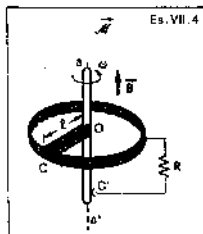
Consideriamo uno statore costituito da tre bobine uguali b_1 b_2 b_3 giacenti su tre piani (normali al disegno) che formano l'una con l'altra un angolo di 120°. Al centro, ognuna delle bobine genera un campo – rispettivamente $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ – ortogonale alla bobina stessa. Se le bobine sono alimentate in corrente alternata di pari ampiezza, ma sfasate l'una rispetto all'altra di 1/3 di periodo, è facile verificare che il campo risultante:

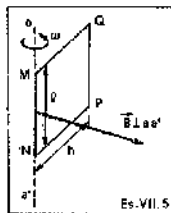
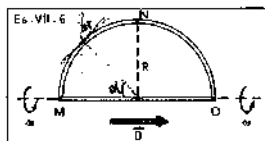
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \vec{B}_{01} \cos \omega t + \vec{B}_{02} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \vec{B}_{03} \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

è un campo di modulo costante $B = \frac{3\,B_{01}}{2} = \frac{3\,B_{02}}{2} = \frac{3\,B_{03}}{2}$ ruotante con velocità angolare ω intorno all'asse $\hat{a}$ ortogonale al piano del disegno passante per il centro. Un rotore costituito da una spira rigida chiusa su sé stessa e libera di ruotare intorno all'asse $\hat{a}$, diviene sede di corrente indotta, e viene quindi trascinato nella sua rotazione dal campo rotante. Se al rotore non è applicata alcuna coppia resistente, esso raggiunge a regime il sincronismo col campo rotante: la corrente indotta è allora nulla, e nullo è anche il momento motore con cui viene trainato dal campo rotante. In presenza di una coppia resistente, il rotore ritarda di quanto basta perché la coppia motrice di natura elettromagnetica uguagli la coppia resistente. Un motore asincrono non richiede né contatti mobili né servomotore di avviamento.

Esercizi del VII capitolo

VII.1. Un filo conduttore di resistenza trascurabile è rigido ed è piegato ad U e disposto in un campo magnetico uniforme e costante nel tempo, di induzione magnetica $B = 0{,}5$ *T*, perpendicolare al piano definito dalla U stessa (ed uscente dal foglio nel caso della figura). Sul filo può scorrere senza attrito un conduttore *CD*, di lunghezza $l = 20$ cm e resistenza $R = 10\ \Omega$, che realizza nei punti *C* e *D* un contatto strisciante con il filo ad U. Il conduttore *CD* si muove con velocità costante $v = 2$ m/s, perpendicolarmente ai lati paralleli della U. Calcolare il modulo della forza *F* che è necessario applicare dall'esterno al conduttore mobile *CD*, perché si muova alla data velocità costante v. (Risposta: $F = 2 \cdot 10^{-3}$ N)

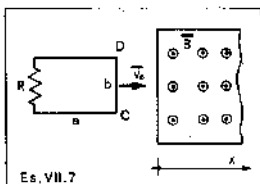
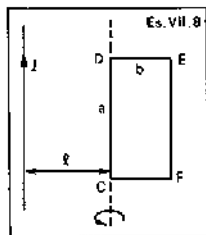
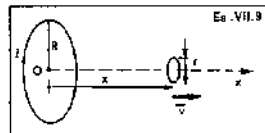
VII.2. Nella situazione dell'esercizio VII.1, calcolare la potenza *W* dissipata per effetto Joule nella resistenza *R* e confrontarla con la potenza meccanica *P* della forza esterna *F*. (Risposta: $W = P = 4 \cdot 10^{-3}\ w$)

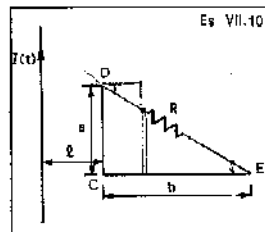
VII.3. Nella situazione degli esercizi VII.1 e VII.2, supponiamo che la sbarretta *CD* abbia massa $m = 30$ g e che, ad un certo istante $t = 0$, la sua velocità sia $v_0 = 2$ m/s e che, allo stesso istante, la forza esterna cessi bruscamente di essere applicata. Nel moto decelerato che segue, quale sarà la velocità della sbarretta al tempo $t = 10$ s? (Risposta: $v = 1{,}44$ m/s)

VII.4. Una sbarra rigida *OC* conduttrice, di lunghezza $l = 20$ cm, è saldata ad un asse *a a'* rigido, conduttore ed ortogonale alla sbarra stessa. L'asse è mantenuto in rotazione da una coppia di momento *M* in modo che la velocità angolare sia costante e valga $\omega = 50$ rad/s. L'estremo *C* della sbarra garantisce un contatto elettrico strisciante con un nastro conduttore a forma di circonferenza di raggio *l*. Tra il nastro circolare e l'asse di rotazione *a a'* è disposta una resistenza $R = 100\ \Omega$ (il collegamento con l'asse è realizzato con un contatto strisciante *C'*). Il dispositivo è immerso in un campo di induzione magnetica $B = 0{,}3$ *T*, parallelo all'asse *a a'*, uniforme e costante nel tempo. Calcolare la corrente che passa nella resistenza *R* e la potenza meccanica che la coppia di momento M eroga per mantenere la sbarra in moto rotatorio uniforme. Considerare trascurabile la resistenza di tutte le parti diverse dal ramo *DC'* e nulli gli attriti.

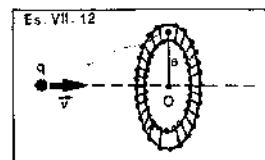
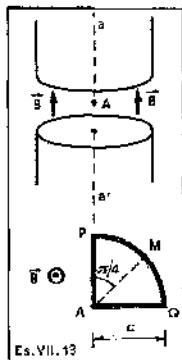
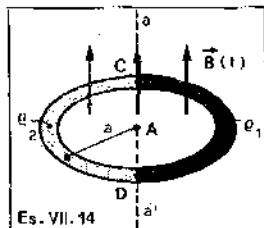
(Risposte: $I = 3$ mA, $P = 9 \cdot 10^{-4}\ w$)

VII.5. Una spira conduttrice rettangolare *MNPQ*, di lati *l* ed *h*, costituita da filo omogeneo di sezione costante, ruota intorno al suo lato *MN* con velocità angolare ω. Nella zona di spazio in cui la spira ruota è presente un campo magnetico uniforme e costante nel tempo, di vettore induzione magnetica $\vec{B}$ perpendicolare all'asse di rotazione *MN* della spira. Calcolare il valore massimo della d.d.p. tra i punti *P* e *Q* della spira nel caso in cui sia $l = 20$ cm, $h = 10$ cm, $B = 0{,}5$ T, $\omega = 150$ rad/s. (Risposta: 1 V)

VII.6. In una zona di campo $\vec{B}$ uniforme e costante nel tempo (diretto orizzontalmente in figura) ruota, con velocità angolare ω intorno al diametro orizzontale *MO*, una spira conduttrice chiusa *MNOM*, a forma di semicirconferenza rigida di raggio *R*. Calcolare il valore della corrente che circola nel circuito e la d.d.p. tra i punti *M* ed *N*, per effetto della sola forza di Lorentz.

(Risposte: $i = 0$; $V_M - V_N = \omega B R^2/2$)

VII.7. Una spira rigida, rettangolare con lati di lunghezza a e b, massa m e resistenza R, si muove di moto traslatorio con velocità costante $\vec{v}_0$, su un piano orizzontale. La velocità $\vec{v}_0$ è parallela al lato della spira di lunghezza a. Sulla spira non si esercitano forze fino a che non incontra una regione di spazio ($x \geq 0$ nella figura) in cui è presente un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ uniforme, costante nel tempo ed ortogonale al piano della spira. Ricavare l'espressione della velocità della spira quando il lato CD è penetrato nella zona di campo magnetico per un tratto $l = a/2$. Trascurare fenomeni di autoinduzione e supporre che sia molto brusca la transizione dalla zona priva di campo ($x < 0$) alla zona con $B \neq 0$ ($x \geq 0$)

$$\left(\text{Risposta: } v = v_0 - \left(\frac{B^2 b^2}{mR}\right) l\right)$$

VII.8. Una spira conduttrice rettangolare, rigida, di vertici $CDEF$, lati di lunghezza $CD = a = 20$ cm e $CF = b = 10$ cm, resistenza $R = 2\ \Omega$, è posta, nel vuoto, nel campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito, posto nel piano della spira, parallelo al lato CD ed a distanza $l = 15$ cm da esso, percorso da corrente costante $I = 10$ A. Ad un certo istante, con legge temporale non nota, la spira viene fatta ruotare di 180° intorno alla direzione CD. Calcolare la carica totale Q che si sposta nel circuito rettangolare per effetto della rotazione descritta. (Risposta: $Q = 0{,}18\ \mu$C)

VII.9. In una spira circolare fissa, di raggio $R = 10$ cm, passa una corrente $I = 20$ A. Sull'asse di questa spira (asse x), è disposta, nel vuoto, una piccola spira circolare di raggio $r = 0{,}2$ cm, con centro sull'asse della spira fissa e con il suo piano parallelo a quella. La spira piccola si muove di moto traslatorio lungo l'asse x con velocità costante $v = 3$ m/s. Calcolare la f.e.m. indotta sulla spira mobile quando la distanza tra le due spire è $d = 5$ cm. (Risposta: $f_i = 4{,}06 \cdot 10^{-8}\ V$)

VII.10. Un circuito triangolare CDE, di resistenza R, è posto, nel vuoto, nel campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da una corrente $I(t)$ che, in un certo intervallo di tempo, è rappresentata dalla relazione $I(t) = \alpha t^2$ con α costante. Il filo rettilineo giace nel piano individuato dal circuito secondo la geometria indicata in figura. Trascurando fenomeni di autoinduzione, ricavare l'espressione della corrente $i(t)$ circolante nel circuito.

$$\left(\text{Risposta: } i(t) = \frac{2A\alpha}{R} t \quad \text{con} \quad A = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\left[1 - \left(1 + \frac{l}{b}\right)\ln\left(\frac{l+b}{l}\right)\right]\right)$$

VII.11. In una zona di spazio è presente un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$ uniforme, che passa dal valore iniziale $B = 0$ per $t = 0$, al valore massimo $B(\infty) = 1$ T con salita esponenziale di costante di tempo $\tau = 3$ s. Su un piano perpendicolare alle linee di forza $\vec{B}$ è posta una spira di area $A = 40$ cm^2 e resistenza $R = 0{,}5\ \Omega$. Trascurando l'induttanza della spira, calcolare la quantità totale di calore Q che si sviluppa in essa dal tempo $t = 0$ al tempo $t^* = 2$ s. (Risposta: $9{,}8 \cdot 10^{-4}$ J)

VII.12. Un solenoide toroidale in aria è costituito da $N = 5 \cdot 10^4$ spire circolari di area $A = 2$ cm^2 ed ha raggio $a = 10$ cm, mentre la sua resistenza elettrica è $R = 50\ \Omega$. Lungo l'asse del solenoide (vedi figura) si muove con velocità costante $v = 10^5$ m/s, un pacchetto di particelle praticamente puntiformi di carica complessiva $q = 5 \cdot 10^{-8}$ C. Calcolare la carica totale Q che passa nel solenoide tra un istante iniziale, in cui la carica q è molto lontana, e l'istante in cui essa passa per il centro O del solenoide. Nello sviluppo trascurare il fenomeno dell'autoinduzione. (Risposta: $Q = 10^{-8}$ C)

Es. VII. 13

VII.13. Nella zona in aria al centro delle espansioni polari, di forma cilindrica di asse aa', di un elettromagnete, è presente un campo di induzione magnetica $\vec{B}$, praticamente uniforme nell'intorno dell'asse di simmetria aa' e parallelo a questo, variabile, in un certo intervallo di tempo, secondo la legge $B(t) = \alpha t$, con α costante di valore $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ T/s, per $t \geq 0$. Al centro del traferro ed interamente immerso nel campo $\vec{B}$ è posto, su un piano perpendicolare all'asse aa', il circuito filiforme rappresentato in figura. Il filo, di cui è costituito il circuito, è omogeneo ed ha sezione costante e forma il contorno di un quarto di cerchio di raggio $c = 10$ cm. Calcolare la d.d.p. che si stabilisce tra i punti P ed M del circuito, mentre $\vec{B}$ varia con la legge temporale data.

(Risposta: $-4{,}4 \cdot 10^{-5}$ V)

Es. VII. 14

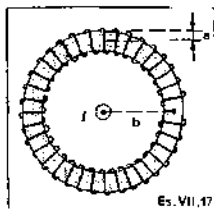
VII.14. Nella stessa posizione della spira a quarto di cerchio dell'esercizio VII.13 e con la stessa situazione per il campo di induzione magnetica $B(t) = \alpha t$ (con $\vec{B}$ uniforme), è posta, perpendicolarmente alle linee di forza di $\vec{B}$, una sottile spira circolare conduttrice, di raggio a e sezione costante. La spira è costituita da due parti di uguale lunghezza e differenti resistività ρ_1 e ρ_2 rispettivamente. Ricavare l'espressione della d.d.p. tra i punti C e D di giunzione dei due materiali.

$$\left(\text{Risposta: } V(C) - V(D) = \frac{\pi a^2 \alpha}{2}\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)\right)$$

VII.15. In un solenoide cilindrico molto lungo, di raggio $a = 5$ cm ed avvolto con $n = 20$ spire/cm, circola una corrente sinusoidale $i(t) = I \operatorname{sen} \omega t$, con $I = 10$ A ed $\omega = 100\ \text{s}^{-1}$. Calcolare il valore massimo del campo elettrico a distanza $r = 2$ cm dall'asse del solenoide, nell'ipotesi che il solenoide sia posto nel vuoto.

$$\left(\text{Risposta: } E_{\text{MAX}} = \frac{\mu_0 n I \omega r}{2} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{V/m}\right)$$

VII.16. Una differenza di potenziale $V(t) = V_0 \operatorname{sen} \omega t$ è applicata tra le armature di un condensatore a facce piane e parallele, di forma circolare e distanti δ, poste nel vuoto. Ricavare l'espressione del valor massimo del vettore induzione magnetica che si stabilisce internamente al condensatore a distanza r dal suo asse di simmetria.

(Risposta: $B_{\text{MAX}} = (\mu_0 \varepsilon_0 V_0 \omega r)/2\delta$)

Es. VII.17

VII.17. Un solenoide toroidale in aria è costituito da N spire circolari di raggio a, ha raggio medio $b >> a$ e resistenza elettrica complessiva R. Sull'asse di simmetria del toro è posto un filo rettilineo indefinito (perpendicolare al piano della figura) percorso da una corrente $I(t) = 0$ per $t \leq 0$, $I(t) = kt$ per $t > 0$, con k costante. Ricavare l'espressione della corrente i che circola nel solenoide toroidale.

$$\left(\text{Risposta: } i(t) = -\frac{\mu_0 N a^2 k}{2bR}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \text{ con } \tau = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2bR}\right)$$

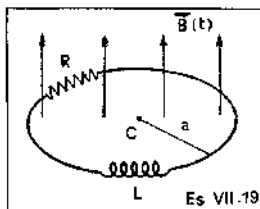
VII.18. Un circuito costituito da un filo rettilineo indefinito ed un altro circuito costituito da un solenoide toroidale di raggio medio b con N spire circolari di raggio $a << b$, sono disposti con la stessa geometria dell'esercizio VII.17. Qual'è l'espressione del coefficiente di mutua induzione M tra i due circuiti?

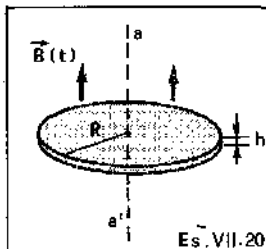
(Risposta: $M = (\mu_0 N a^2)/2b$)

VII.19. Un circuito circolare di raggio a, resistenza R ed induttanza L, si trova, nel vuoto, in una zona sede di campo magnetico uniforme per il quale l'induzione magnetica B è ortogonale al piano della spira ed ha il seguente andamento temporale:

$$B = 0 \qquad \text{per} \quad t \leq 0$$
$$B = kt \qquad \text{per} \quad t > 0, \quad \text{con } k \text{ costante.}$$

Ricavare l'espressione dell'induzione magnetica $B(C)$ al centro della spira in funzione del tempo ($t > 0$).

$$\left(\text{Risposta: } B(C) = kt - \frac{\mu_0 \pi k a}{2R}(1 - e^{-t/\tau}),\ \tau = \frac{L}{R}\right)$$

VII.20. Nella stessa posizione della spira circolare dell'esercizio VII.14 e con la stessa situazione per la geometria del campo magnetico, è posto un disco di rame di raggio $R = 20$ cm ed altezza $h = 1$ cm, il cui asse coincide con l'asse di simmetria aa' del campo magnetico. Il vettore induzione magnetica è uniforme su tutto il disco, parallelo al suo asse e varia nel tempo, in un certo intervallo, con la legge $B(t) = kt$, con k costante di valore $k = 0{,}1$ T/s. Sapendo che la resistività del rame è $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m, calcolare la potenza dissipata nel disco per effetto delle correnti parassite.

(Risposta: 3,7 w)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del VII capitolo

VII.1. Ricavare la f.e.m. indotta nel circuito e quindi la corrente che vi circola. Nel tratto CD il passaggio di tale corrente causa una forza magnetica in verso opposto a $\vec{v}$. Per mantenere CD in moto uniforme è necessario applicare dall'esterno una forza uguale e contraria a tale forza magnetica.

VII.2. Calcolare la corrente che circola nel circuito e di qui la potenza Joule dissipata su R. Dal risultato dell'esercizio VII.1 riguardo alla forza F applicata dall'esterno, essendo nota la velocità $\vec{v}$ del suo punto di applicazione, si ricava la potenza meccanica P.

VII.3. Nell'esercizio VII.1 abbiamo visto che la forza magnetica frenante è proporzionale alla velocità con costante di proporzionalità negativa. Applicare il secondo principio della dinamica ed imporre le condizioni iniziali date.

VII.4. Sui portatori liberi della sbarra ruotante in campo magnetico è attiva la forza di Lorentz che funge da campo elettromotore E_L. La f.e.m. che ne deriva causa il passaggio di corrente nella resistenza R. Tale f.e.m. si ottiene con l'integrale di linea di $\vec{E}_L$ lungo la sbarra (da O a C).

VII.5. Ricavare il campo elettromotore sulla spira e, tenendo conto che lungo il filo la resistività è uniforme, usare la legge di Ohm generalizzata per calcolare $(V_P - V_Q)$.

VII.6. Per il calcolo della f.e.m. indotta, valutare il flusso di $\vec{B}$ concatenato con la spira tenendo conto dell'orientazione della normale al piano della spira rispetto alla direzione di $\vec{B}$. Per quanto riguarda la d.d.p. tra i punti M ed N, calcolare il campo elettromotore attivo sui portatori di carica e valutarne l'integrale di linea tra M ed N.

VII.7. La f.e.m. indotta nel circuito fa circolare una corrente che genera, sul tratto CD, una forza magnetica frenante di cui occorre tener conto nello scrivere l'equazione del moto del circuito.

VII.8. Applicare la legge di Felici, in base alla quale ciò che conta è la variazione netta di flusso di $\vec{B}$ tra situazione iniziale e situazione finale.

VII.9. Calcolare il campo $B = B(x)$ sull'asse della spira fissa ed assumere che su tutta l'area della spira piccola tale campo B sia uniforme ($r << R$). Applicare la legge di Faraday, tenendo conto che $B = B[x(t)]$.

VII.10. Valutare il flusso di $\vec{B}$ attraverso la superficie triangolare CDE e quindi applicare la legge di Faraday.

VII.11. Tramite la legge di Faraday calcolare la corrente $i(t)$ che scorre nel circuito e quindi la potenza dissipata per effetto Joule. L'integrale sul tempo della potenza, da $t = 0$ a $t = t^*$, fornisce la quantità di calore richiesta.

VII.12. Ricordare che il campo di induzione generato a distanza $\vec{r}$ da una carica in moto con velocità $\vec{v}$ vale $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$ con $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Applicare la legge di Felici per il calcolo della carica totale spostata dal campo elettromotore nel circuito.

VII.13. Tenendo conto della simmetria cilindrica del sistema considerare il campo elettromotore indotto sulla spira e porre l'attenzione sulla localizzazione della f.e.m. indotta nei tre rami della spira stessa (AP, PQ, QA). Schematizzando poi la spira come una maglia con resistenze e f.e.m. in serie, applicare la legge di Ohm generalizzata al ramo PM.

VII.14. La f.e.m. indotta è distribuita su tutta la spira. Schematizzare la spira come la serie di due rami, ciascuno contenente una f.e.m. ed una resistenza, ed applicare la legge di Ohm generalizzata.

VII.15. Applicare la terza equazione di Maxwell nello spazio vuoto interno al solenoide, scrivendola in forma integrale e tenendo conto della simmetria cilindrica della configurazione.

VII.16. Applicare la quarta equazione di Maxwell nello spazio vuoto interno al condensatore, scrivendola in forma integrale e tenendo conto della simmetria cilindrica della configurazione. Il problema è sostanzialmente simmetrico rispetto all'esercizio VII.15.

VII.17. Calcolare la f.e.m. impulsiva indotta che si genera sul solenoide e, nello scrivere l'equazione del circuito costituito dal solenoide, tenere conto che non è trascurabile il contributo di autoinduzione.

VII.18. Esprimere il coefficiente di mutua induzione come rapporto tra il flusso, concatenato con il solenoide, del vettore $\vec{B}$ generato dal filo rettilineo percorso da una corrente I, e la corrente I stessa.

VII.19. Applicare la legge di Faraday per calcolare la f.e.m. indotta nel circuito. Scrivere l'equazione del circuito e calcolare la corrente indotta circolante nella spira circolare e quindi il contributo di questa corrente al campo magnetico al centro della spira.

VII.20. La simmetria cilindrica del problema permette di spezzare il disco di rame in un insieme di corone circolari elementari, ciascuna delle quali costituisce un circuito con propria resistenza e con propria f.e.m. indotta. Calcolare la potenza Joule per ciascun circuito elementare e poi integrare su tutto il disco.

Capitolo ottavo

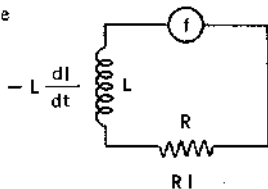
Correnti alternate

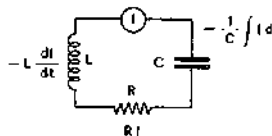
VIII.1. Considerazioni introduttive

Abbiamo visto che un circuito RL è descritto – nell'approssimazione quasi-stazionaria – dall'equazione differenziale [VII.23]:

$$f - L\frac{dI}{dt} = RI$$

ovvero:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = f$$

È questa una equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti (non omogenea per la presenza del termine noto f) nella funzione incognita $I(t)$. Negli esempi che abbiamo visto fino a qui il termine noto f era assunto come costante (generatore in continua); ma abbiamo visto che esistono anche generatori in alternata, ed in generale si avrà che f è una funzione – nota – del tempo.

Spesso il generatore è chiuso su un circuito più complesso di una semplice serie RL. Se, ad esempio, il circuito comprende anche un condensatore in serie (circuito RLC), allora la differenza di potenziale (d.d.p.) agente ai capi della resistenza non è pari alla forza elettromotrice totale agente nel circuito $\left(f - L\frac{dI}{dt}\right)$. A questa va infatti sottratta la d.d.p. ΔV presente ai capi del condensatore,

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = +\frac{1}{C}\int I\,dt$$

(dove $Q = +\int I\,dt$ è la carica presente sulle armature, vedi eq. [IV.57]);

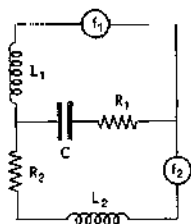
l'equazione del circuito è allora:

$$RI = f - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}\int I dt$$

ovvero

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I dt = f \qquad \text{[VIII.1]}$$

che è una equazione integro-differenziale lineare a coefficienti costanti. Quest'ultima è a sua volta equivalente a una equazione differenziale. Per convincersene, basta derivare la [VIII.1], ottenendo:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{df}{dt} \qquad \text{[VIII.2]}$$

Questa è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea per la presenza del termine noto df/dt.

Molto spesso, uno o più generatori sono collegati a un circuito costituito da più maglie comprendenti elementi R, L, C. È facile convincersi che, in questi casi, il circuito è descritto da un sistema di equazioni del tipo [VIII.1] (ovvero del tipo [VIII.2]). Per ogni maglia, infatti, si può scrivere un'equazione analoga alla [VIII.2], mentre le correnti circolanti nelle varie maglie sono legate le une alle altre dalla legge di Kirchhoff [IV.17] per i nodi, che nell'approssimazione quasi stazionaria [IV.13] è applicabile anche al caso di correnti variabili nel tempo.

A un sistema di equazioni differenziali lineari dello stesso tipo si perviene anche quando si abbia a che fare con circuiti elettricamente separati ma accoppiati magneticamente (vedi eq. [VII.34]).

Del tutto in generale, possiamo dire che in condizioni quasi stazionarie l'analisi di circuiti elettrici comprendenti componenti R, L, C richiede la soluzione di sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Spesso, nella pratica, le forze elettromotrici agenti nei circuiti possono essere considerate in buona approssimazione come sinusoidali (vedi eq. [VII.56]); in questo caso l'equazione [VIII.2], che è l'equazione-tipo che compone il sistema che descrive anche le maglie più complesse, diviene formalmente identica a quella di un oscillatore forzato di tipo meccanico. Dopo una fase transitoria iniziale che succede all'istante di chiusura del circuito, la soluzione si stabilizza in forma di oscillazione forzata di ampiezza, pulsazione e fase costanti; e queste caratteristiche possono essere determinate in modo semplice – anche se alquanto laborioso – attraverso passaggi puramente algebrici, così come abbiamo visto in meccanica per il caso dell'oscillatore forzato di tipo meccanico.

Tuttavia i sistemi di equazioni differenziali lineari sono alla base della trattazione teorica di una grande varietà di fenomeni appartenenti agli ambiti fisici più disparati: dalla meccanica all'ottica, dalla struttura della materia alle onde elettromagnetiche, dall'elettronica all'acustica, tanto per citare alcuni esempi fra gli innumerevoli possibili. Preferiamo pertanto approfittare dell'occasione che ci è fornita in questo capitolo dalla trattazione dei circuiti in corrente alternata per introdurre alcuni metodi matematici e alcune tecniche formali che consentono di trattare in termini compatti ed efficaci le equazioni di questo tipo: strumenti che potranno tornare utili allo studente anche in campi di applicazione molto diversi da quello cui noi limitiamo la nostra attenzione in questo capitolo.

VIII.2. Generalità sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Una operazione da eseguirsi su una funzione, indicata a prescindere dalla funzione su cui tale operazione verrà eseguita, è detta *operatore*. Ad esempio l'operatore di traslazione $T(d)$ compie l'operazione di incrementare la variabile x della funzione di una quantità d: $T(d)f(x) = f(x + d)$. Se l'operazione è una operazione differenziale, l'operatore è detto un *operatore differenziale*. L'*ordine* di un operatore differenziale è l'ordine massimo delle derivate che in esso compaiono. Esempi di operatori differenziali sono:

Operatore

Operatore differenziale

Ordine dell'operatore differenziale

$$\frac{d}{dx} \equiv D_x \quad \text{operatore derivata (rispetto alla variabile } x)$$

$$\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} \quad \text{operatore nabla}$$

L'insieme di tutte le funzioni su cui un operatore può operare è detto *spazio* (funzionale) *di definizione dell'operatore*. Ad esempio lo spazio di definizione dell'operatore nabla è l'insieme di tutte le funzioni derivabili rispetto a x, y, z.

Spazio di definizione di un operatore

La somma $A + B$ di due operatori A, B è un operatore definito dalla relazione:

$$(A + B)f(x) = Af(x) + Bf(x)$$

Somma di operatori

Il prodotto di un operatore A per un numero a è un operatore, definito dalla relazione:

$$aAf(x) = a(Af(x))$$

Prodotto di un operatore per un numero

Il prodotto AB di due operatori A, B è a sua volta un operatore, consistente nella applicazione successiva dei due operatori, prima quello di destra poi quello di sinistra

$$ABf(x) = A(Bf(x))$$

Prodotto di due operatori

Esempi sono D_xD_y (derivata rispetto a x della derivata rispetto a y); $D_x \cdot D_x = (D_x)^2$ (derivata seconda rispetto a x); ecc.

Se $AB = BA$, cioè se il risultato è indipendente dall'ordine di applicazione dei due operatori, si dice che *i due operatori commutano*: ad esempio $D_xD_y = D_yD_x$ (teorema di Schwartz); ma la derivata non commuta col quadrato $D[f(x)]^2 \neq [Df(x)]^2$. L'operatore $AB - BA$ è detto *commutatore* di A e B, e si indica anche con $[A, B]$. Se due operatori commutano, il loro commutatore è nullo.

Operatori che commutano

Commutatore

La notazione degli operatori consente di indicare in maniera compatta i calcoli da applicarsi alle funzioni, e dunque anche le equazioni fra funzioni (in particolare le equazioni differenziali). Ad esempio indicando con A l'operatore:

$$A = \left(L\frac{d}{dt} + R + \frac{1}{C}\int dt\right) \qquad \text{[VIII.3]}$$

l'equazione [VIII.1], nella funzione incognita $I(t)$, può essere scritta come:

$$A\,I(t) = f(t) \qquad \text{[VIII.3.a]}$$

Analogamente la [VIII.2] può essere indicata come

$$B\,I(t) = \frac{df}{dt} \qquad \text{[VIII.4.a]}$$

avendo indicato con B l'operatore

$$B = \left(L\frac{d^2}{dt^2} + R\frac{d}{dt} + \frac{1}{C}\right) \qquad \text{[VIII.4]}$$

Operatore lineare

Un *operatore* si dice *lineare* se vale la relazione:

$$A(af + bg) = aAf + bAg \qquad \text{[VIII.5]}$$

con a, b costanti qualunque e f, g funzioni qualsiansi appartenenti allo spazio di definizione di A. Ad esempio l'operatore derivata è un operatore lineare

$$\frac{d}{dt}(af(t) + bg(t)) = a\frac{df}{dt} + b\frac{dg}{dt},$$

così come sono lineari l'operatore nabla, l'operatore A definito dalla [VIII.3] e l'operatore B definito dalla [VIII.4]. Non sono lineari, ad esempio, gli operatori «quadrato di una funzione» o l'operatore «prodotto di una funzione per la sua derivata».

Noi limiteremo da qui in avanti la nostra attenzione, in questo capitolo, agli operatori lineari, e più particolarmente agli operatori lineari differenziali di ordine non superiore al secondo.

Se A è un operatore differenziale lineare nella variabile t, la equazione

Equazione differenziale lineare

$$A\,I(t) = f(t) \qquad \text{[VIII.6]}$$

con $I(t)$ funzione incognita e $f(t)$ funzione nota (vedi eq. [VIII.3.a] o [VIII.4.a]) è detta una *equazione differenziale lineare* nella incognita $I(t)$. Se $f(t) = 0$,

Equazione differenziale lineare omogenea

$$A\,I(t) = 0 \qquad \text{[VIII.7]}$$

Equazione omogenea associata

è detta una *equazione differenziale lineare omogenea*. La [VIII.7] è detta anche *equazione omogenea associata* alla [VIII.6].

Se I_1 e I_2 sono due soluzioni della [VIII.7] una qualunque loro combinazione lineare (con a e b costanti arbitrarie)

$$I_g = aI_1 + bI_2 \qquad \text{[VIII.8]}$$

è anch'essa soluzione. Ciò discende immediatamente dalla definizione [VIII.5] di operatore lineare.

Soluzione generale

Se I_1 e I_2 sono fra di loro linearmente indipendenti, la [VIII.8] è detta *soluzione generale dell'equazione differenziale lineare omogenea* (del secondo

ordine). Una soluzione non contenuta nella soluzione generale (non ottenibile dalla soluzione [VIII.8] per opportuna scelta delle costanti) è detta *soluzione singolare.* Molte equazioni differenziali non hanno soluzioni singolari, cioè tutte le soluzioni sono contenute nella soluzione generale: ciò accade in particolare alle equazioni omogenee associate della [VIII.3.a] (o [VIII.4.a]) che qui ci interessa.

Soluzione singolare

Se I_p è soluzione dell'equazione non omogenea [VIII.6], e I_o è soluzione dell'omogenea associata [VIII.7], la funzione somma $I_p + I_o$ è anch'essa soluzione dell'equazione non omogenea [VIII.6]. Ciò discende immediatamente dalla linearità di A:

$$A(I_p + I_o) = AI_p + AI_o = f + 0 = f$$

La somma di una qualunque soluzione (particolare) I_p della equazione non omogenea e della soluzione generale [VIII.8] della omogenea associata rappresenta la soluzione generale I_{gn} della equazione non omogenea [VIII.6].

Soluzione generale della non omogenea

$$I_{gn} = I_p + aI_1 + bI_2 \qquad \text{[VIII.9]}$$

Fisicamente, a partire dalla soluzione generale [VIII.8] o [VIII.9], il valore delle costanti a e b affinché la soluzione rappresenti il particolare fenomeno fisico considerato, deve essere determinato assegnando le condizioni iniziali.

Per la soluzione dei circuiti in corrente alternata vanno risolte equazioni non omogenee del tipo [VIII.4.a]; poiché tuttavia la soluzione generale [VIII.9] contiene la soluzione generale della omogenea associata, cominciamo col discutere quest'ultima

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \qquad \text{[VIII.10]}$$

Poniamo nella [VIII.10] $I = e^{\alpha t}$; si ha allora

$$\left(L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C}\right)e^{\alpha t} = 0$$

Poiché per qualunque valore dell'esponente è $e^{\alpha t} \neq 0$, questa equazione equivale all'equazione algebrica:

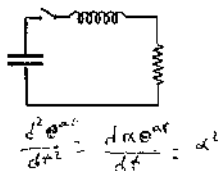
$$L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0 \qquad \text{[VIII.11]}$$

La [VIII.11] è detta *equazione algebrica associata* della equazione differenziale [VIII.10]. Le soluzioni α_1, α_2 della [VIII.11] sono:

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} \qquad \alpha_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} \qquad \text{[VIII.12]}$$

Le funzioni $e^{\alpha_1 t}$ e $e^{\alpha_2 t}$ rappresentano dunque due soluzioni della equazione differenziale [VIII.10], e così pure una qualunque loro combinazione lineare:

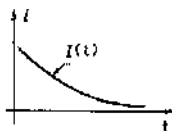
$$I(t) = ae^{\alpha_1 t} + be^{\alpha_2 t} \qquad \text{[VIII.13]}$$

con a e b costanti arbitrarie. A meno che sia $\alpha_1 = \alpha_2$ (caso che discuteremo fra poco), $e^{\alpha_1 t}$ e $e^{\alpha_2 t}$ sono fra di loro linearmente indipendenti, e la [VIII.13]

rappresenta la soluzione generale della [VIII.10]. Osserviamo che in generale α_1 e α_2 dati dalla [VIII.12] sono due numeri complessi; e dunque anche $e^{\alpha_1 t}$ e $e^{\alpha_2 t}$ sono due funzioni complesse della variabile reale t. Anche le costanti a e b nella [VIII.13] sono pertanto da assumersi come numeri complessi. Se però $I(t)$ rappresenta una grandezza fisica reale (nel caso in esame, una corrente) per ragioni fisiche a e b dovranno essere tali che la combinazione [VIII.13], nel suo insieme, risulti reale.

Discutiamo ora le caratteristiche della soluzione [VIII.13] al variare dei parametri che compaiono nelle [VIII.12], che riscriviamo nella forma:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\Delta} \\ \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\Delta} \end{cases} \quad \text{dove } \gamma = \frac{R}{2L}; \quad \Delta = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL} \qquad \text{[VIII.14]}$$

Se $\Delta > 0$ (cioè $R^2 > 4L/C$) allora α_1, α_2 sono entrambe reali e negative (è infatti $\sqrt{\Delta} < \gamma$). La soluzione [VIII.13] è la somma dei due esponenziali decrescenti

$$I(t) = a e^{-|\alpha_1| t} + b e^{-|\alpha_2| t} \qquad \text{[VIII.15]}$$

A partire dall'istante iniziale in cui il circuito viene chiuso, la corrente $I(t)$ decade verso zero con una costante tempo dell'ordine della più grande fra le due quantità L/R e RC.

Se $\Delta = 0$ ($R^2 = 4L/C$) le due radici sono coincidenti e negative ($\alpha_1 = \alpha_2 = -R/2L$). Si dimostra allora che la soluzione generale è del tipo:

$$I(t) = (c + kt)\, e^{-\frac{R}{2L}t} \qquad \text{[VIII.16]}$$

(con c e k costanti arbitrarie) ed ha un andamento temporale simile a quello del caso precedente.

Se finalmente $\Delta < 0$ ($R^2 < 4L/C$), ponendo

$$\omega^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} \qquad \text{[VIII.17]}$$

si ha

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm j\omega$$

dove j è l'unità immaginaria ($j^2 = -1$). Inserendo questa espressione per α_1 e α_2 nella [VIII.13] si ha:

$$I(t) = a e^{-\gamma t} e^{j\omega t} + b e^{-\gamma t} e^{-j\omega t}$$

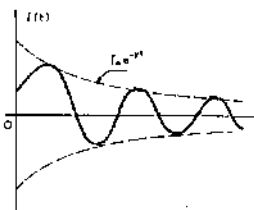
con $\gamma = \dfrac{R}{2L}$ e $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{CL} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$. Ricordando che $e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j \sin\omega t$, la precedente relazione diviene:

$$I(t) = e^{-\gamma t}[(a + b)\cos\omega t + j(a - b)\sin\omega t]$$

e ponendo $(a + b) = I_0 \sin\varphi$; $j(a - b) = I_0 \cos\varphi$:

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t}(\cos\omega t \sin\varphi + \sin\omega t \cos\varphi) = I_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{[VIII.18]}$$

La [VIII.18] rappresenta una sinusoide la cui ampiezza $I_0 e^{-\gamma t}$ decresce esponenzialmente nel tempo, con costante tempo $1/\gamma = 2L/R$.

In tutti e tre i casi ($\Delta \gtreqless 0$), dunque, la soluzione generale [VIII.13] (o [VIII.16]), quali che siano le condizioni iniziali (cioè per qualunque valore delle costanti a e b (ovvero c e k)), si approssima a zero entro un tempo dell'ordine di alcune unità di $1/\gamma$. Da allora in poi, la soluzione generale [VIII.9] della equazione non omogenea si riduce alla soluzione particolare $I_p(t)$ della equazione non omogenea stessa. *Escluso dunque un fenomeno transiente immediatamente successivo alla chiusura del circuito, la corrente circolante in un circuito alimentato da generatori di forza elettromotrice (f.e.m.) variabile nel tempo è descritta dalla soluzione particolare della equazione non omogenea*, soluzione non dipendente dalle condizioni iniziali. Nel seguito descriveremo alcune tecniche convenienti per la ricerca di tale soluzione particolare.

VIII.3. Grandezze alternate

Grandezze periodiche

Si dicono *periodiche* quelle grandezze – funzioni del tempo t – che assumono valori ed andamenti uguali ad intervalli regolari di tempo. Più precisamente, se $f_p(t)$ è una grandezza periodica, deve esistere una costante T (che rappresenta un opportuno intervallo di tempo) tale che per ogni t sia

$$f_p(t) = f_p(t + T) \qquad \text{[VIII.19]}$$

La costante T per cui vale la [VIII.19] è detta *periodo* della grandezza periodica. L'inverso del periodo $\nu = 1/T$ è detto *frequenza* della grandezza periodica. Si possono avere *grandezze vettoriali periodiche*: ciò accade, per definizione, quando la [VIII.19] vale per tutte le componenti del vettore (con lo stesso periodo per ognuna di esse).

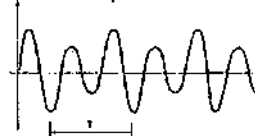
Una grandezza si dice *alternata* se essa è periodica e *se il suo valor medio su un periodo è nullo*. In formule:

$$\begin{cases} f_a(t) = f_a(t + T) \\ \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} f_a(t)\, dt = 0 \end{cases} \qquad \text{[VIII.20]}$$

Graficamente, per una grandezza alternata devono essere fra di loro uguali le due aree tratteggiate in figura. È evidente dalla definizione che, sottraendo a una grandezza periodica $f_p(t)$ il suo valor medio $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} f_p\, dt$, si ottiene una grandezza alternata.

Può capitare che una grandezza periodica abbia segno definito (cioè sia sempre positiva o sempre negativa). Ma una grandezza alternata deve, evidentemente, cambiar segno almeno una volta nel corso di un periodo: affinché il suo valor medio sia nullo, il valor medio della sua parte positiva deve essere pari al valor medio della sua parte negativa. Per conseguenza, una grandezza alternata si annulla almeno due volte nel corso di un periodo.

Esempio di grandezza periodica definita positiva

Con *valor massimo* di una grandezza alternata si intende, in generale, il valor massimo assunto dal suo valore assoluto (o dal suo modulo se si tratta di una grandezza complessa); naturalmente, tale valore viene assunto almeno una volta nel corso di ogni periodo.

La forza elettromotrice che si genera in una spira rotante in un campo magnetico uniforme $F(t) = F_0 \sin \omega t$ (vedi eq. [VII.56]) soddisfa, evidentemente, le condizioni [VIII.20]: si tratta dunque di una grandezza alternata. Le grandezze alternate del tipo

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \qquad [VIII.21]$$

Grandezze alternate sinusoidali

sono dette *grandezze alternate sinusoidali*. Per una tale grandezza alternata, il valor massimo coincide con l'ampiezza I_0; mentre il periodo T e la frequenza ν sono legati alla pulsazione ω dalle relazioni:

$$T = 2\pi/\omega \qquad \nu = \omega/2\pi \qquad [VIII.22]$$

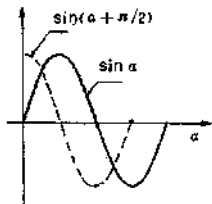
Per le grandezze alternate di tipo elettrico (correnti, tensioni, ecc.) il periodo è usualmente molto minore della costante-tempo della maggior parte degli strumenti di misura di uso più comune: ad esempio la tensione elettrica (alternata) distribuita per usi civili e industriali nei paesi industrializzati ha un periodo dell'ordine del cinquantesimo di secondo, mentre la costante-tempo dei comuni voltmetri e amperometri è dell'ordine del secondo. Pertanto questi strumenti non sono in grado di misurare il valor massimo di tali grandezze, eseguendone una media su un tempo pari a molti periodi; e il valor medio, per la definizione stessa di grandezze alternate, è nullo. Per superare questo limite sono stati sviluppati strumenti estremamente pronti (oscillografi) che sono tuttavia comuni solo negli ambienti specialistici.

Sono invece largamente disponibili strumenti assai semplici in grado di misurare, di una grandezza alternata $I(t)$, il *valor quadratico medio* o *valore efficace* I_{eff}

Valore efficace I_{eff}

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} I^2(t)\,dt} \qquad \text{ovvero} \qquad I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} I^2(t)\,dt \qquad [VIII.23]$$

Il valore efficace di una grandezza elettrica alternata (corrente o tensione) ha grande rilievo non solo perché esso è direttamente legato – come meglio vedremo – alla potenza che tale grandezza è in grado di trasferire al carico; ma anche perché quando la grandezza alternata è sinusoidale, il suo valore efficace è direttamente legato, da una semplice relazione di proporzionalità, al suo valore massimo. È infatti immediato verificare che

$$I_{eff} = \left[\frac{1}{T}\int_t^{t+T} I_0^2 \sin^2 \omega t\,dt\right]^{1/2} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad [VIII.24]$$

In virtù del teorema di Fourier che enunceremo nel par. VIII.4, e delle altre considerazioni che presentiamo in questo paragrafo e nel prossimo, le grandezze sinusoidali come la [VIII.21] (che per opportuna scelta della costante φ contengono al loro interno anche le grandezze cosinusoidali) rivestono particolare importanza fra le grandezze alternate. In effetti spesso, nella pratica, con la locuzione «grandezza alternata» si intende in realtà «grandezza sinusoidale». Osserviamo che la derivata della grandezza sinusoidale [VIII.21] è:

$$\frac{dI}{dt} = \omega I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \omega I_0 \sin(\omega t + \varphi + \pi/2) \qquad [VIII.25]$$

Dunque: *la derivata temporale* di una grandezza sinusoidale *è una nuova grandezza sinusoidale, la cui ampiezza è moltiplicata per la pulsazione* ω *e la cui fase è incrementata di* $\pi/2$.

Analogamente, integrando la [VIII.21] si ha:

$$\int I\,dt = -\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi - \pi/2) \qquad \text{[VIII.26]}$$

Dunque: *l'integrale temporale* di una grandezza sinusoidale *è una nuova grandezza sinusoidale la cui ampiezza è divisa per la pulsazione* ω *e la cui fase è diminuita di* $\pi/2$.

Tenuto conto che $L\frac{dI}{dt}$, RI, e $\frac{\int I\,dt}{C}$ rappresentano le espressioni che legano la corrente $I(t)$ alla differenza di potenziale presente rispettivamente ai capi di una induttanza, di una resistenza e di un condensatore, con l'aiuto della [VIII.25] e della [VIII.26] ricaviamo la seguente tabella:

Elemento	Corrente sinusoidale		Tensione sinusoidale	
	Ampiezza	fase	ampiezza	fase
Resistenza	I_0	φ	$I_0 R$	φ
Induttanza	I_0	φ	$I_0 \omega L$	$\varphi + \pi/2$
Capacità	I_0	φ	$\frac{I_0}{\omega C}$	$\varphi - \pi/2$

Queste proprietà delle grandezze sinusoidali facilitano la soluzione delle equazioni lineari differenziali e integro-differenziali a coefficienti costanti qualora il termine noto $f(t)$ sia una funzione alternata sinusoidale.

Esempi

E.VIII.1. *Calcolare per quali valori delle costanti* I_0 *e* φ *la funzione* $I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ *risolve l'equazione integro-differenziale*

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = F_0 \sin\omega t \qquad \text{[VIII.27]}$$

Sostituendo la [VIII.25] e la [VIII.26] nella [VIII.27] abbiamo:

$$L\omega I_0 \cos(\omega t + \varphi) + RI_0 \sin(\omega t + \varphi) - \frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t + \varphi) = F_0 \sin\omega t$$

Sviluppando il seno della somma e il coseno della somma:

$$L\omega I_0(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) + RI_0(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi) -$$

$$- \frac{I_0}{\omega C}(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) = F_0 \sin\omega t$$

Da cui:

$$I_0\left[\left(L\omega-\frac{1}{\omega C}\right)\cos\varphi+R\sin\varphi\right]\cos\omega t+$$
$$+I_0\left[\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)\sin\varphi+R\cos\varphi\right]\sin\omega t=F_0\sin\omega t$$

Questa relazione deve valere per qualunque valore di t; e affinché ciò accada devono essere fra di loro uguali i coefficienti di $\sin\omega t$ e di $\cos\omega t$ al primo e al secondo membro. Dunque:

$$\begin{cases} I_0\left[\left(L\omega-\dfrac{1}{\omega C}\right)\cos\varphi+R\sin\varphi\right]=0 \\ I_0\left[\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)\sin\varphi+R\cos\varphi\right]=F_0 \end{cases}$$

Dalla prima di queste relazioni ricaviamo

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)}{R};$$

da cui anche

$$\sin\varphi=\frac{\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}}\quad \text{e}\quad \cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}}$$

che sostituiti nella seconda relazione consentono di ricavare I_0 ottenendo in definitiva

$$\begin{cases} \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)}{R} \\ I_0=\dfrac{F_0}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}} \end{cases} \qquad \text{[VIII.28]}$$

che rappresentano le relazioni cercate.

E.VIII.2. *Un circuito RLC è percorso da corrente alternata sinusoidale $I(t)=I_0\sin(\omega t+\varphi_1)$. Calcolare la potenza che si dissipa in media in ciascuno dei tre componenti*

Se V è la d.d.p. ai capi del componente, e $dq=I\,dt$ è la carica che transita ai capi del componente nel tempo elementare dt, il lavoro prodotto dal campo elettrico nel tempo dt è $dL=V\,dq=VI\,dt$; per cui la potenza è:

$$W=\frac{dL}{dt}=VI\,.$$

Poiché I è sinusoidale, anche V ai capi di ciascun componente è sinusoidale. Poniamo dunque, in W, $I = I_o \sin(\omega t + \varphi_1)$ e $V = V_o \sin(\omega t + \varphi_2)$ e calcoliamo il valor medio su un periodo:

$$\bar{W} = \frac{1}{T}\int_0^T V_o I_o \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2)\, dt$$

Tenendo conto della identità trigonometrica $2 \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, la precedente relazione diviene:

formula di Werner

$$\bar{W} = \frac{V_o I_o}{2T}\int_0^T [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)]\, dt$$

L'integrale da 0 a T della funzione $\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$, che è alternata con periodo $T/2$, è nullo; si ha dunque:

$$\bar{W} = \frac{V_o I_o}{2T}\int_0^T \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\, dt = \frac{V_o I_o}{2T}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\int_0^T dt = \frac{V_o I_o}{2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

L'espressione della potenza media è pertanto:

$$\bar{W} = \frac{V_o I_o}{2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad \text{[VIII.29]}$$

Legge di Galileo Ferraris

avendo tenuto conto della espressione [VIII.24] del valore efficace di una grandezza alternata. Questa relazione va sotto il nome di legge di Galileo Ferraris.

Nel caso dei componenti del circuito *RLC* si ha:

Componente	V_o	$\varphi_1 - \varphi_2$	$\bar{W}$
Resistenza	$I_o R$	0	$\frac{V_o I_o}{2} = \frac{I_o^2 R}{2} = \frac{V_o^2}{2R}$
Induttanza	$I_o \omega L$	$-\pi/2$	0
Capacità	$I_o/(\omega C)$	$\pi/2$	0

L'esempio E.VIII.1 mostra come, nel caso in cui il termine noto di una equazione integro-differenziale lineare a coefficienti costanti sia rappresentato da una funzione sinusoidale, la soluzione possa essere trovata attraverso passaggi assai semplici, anche se alquanto laboriosi. Va osservato che il circuito *RLC* trattato nell'esempio E.VIII.1 era costituito da una sola maglia; nella pratica, quando si devono risolvere circuiti in corrente alternata, si ha spesso a che fare con reti costituite da molte maglie. Ed in tal caso la procedura illustrata con l'esempo E.VIII.1 può divenire assai elaborata e lunga.

Più semplice e immediata si presenta la soluzione qualora il termine noto, anziché essere costituito da una funzione sinusoidale, sia rappresentato da un esponenziale $F_o e^{\alpha t}$, con F_o e α numeri complessi qualunque. Noi tuttavia limitiamo la nostra attenzione al caso in cui α sia un numero immaginario puro, e poniamo pertanto $\alpha = j\omega$ (j unità immaginaria, $j^2 = -1$; ω numero reale positivo). Quando l'esponente è immaginario puro, la funzione $F_o e^{\alpha t} = F_o e^{j\omega t}$ rappresenta una grandezza alternata.

È immediato verificare che l'equazione

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = F_0 e^{j\omega t} \qquad \text{[VIII.30]}$$

ammette soluzione del tipo $I_0 e^{j\omega t}$, pur di scegliere opportunamente il numero complesso I_0.

Ponendo infatti $I = I_0 e^{j\omega t}$ si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{d}{dt}(I_0 e^{j\omega t}) = j\omega I_0 e^{j\omega t} = j\omega I \\ \displaystyle\int I\,dt = \int I_0 e^{j\omega t}\,dt = \frac{1}{j\omega} I_0 e^{j\omega t} = -\frac{j}{\omega} I_0 e^{j\omega t} = -\frac{j}{\omega} I \end{cases} \qquad \text{[VIII.31]}$$

Sostituendo le [VIII.31] nella [VIII.30] si ha:

$$I_0\left[j\omega L + R - \frac{j}{\omega C}\right] e^{j\omega t} = F_0 e^{j\omega t}$$

Affinché questa relazione sia valida per qualunque valore di t, devono essere fra di loro uguali i coefficienti di $e^{j\omega t}$ al primo e al secondo membro; cioè deve essere:

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{F_0}{Z} \\ \text{dove} \quad Z = R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) \end{cases} \qquad \text{[VIII.32]}$$

Come vediamo, quando il termine noto dell'equazione integro-differenziale è una funzione esponenziale del tipo $F_0 e^{j\omega t}$, la soluzione è una funzione del tipo $I_0 e^{j\omega t}$ in cui il numero complesso I_0 è ottenibile dividendo F_0 per un opportuno numero complesso Z immediatamente calcolabile a partire dai coefficienti dell'equazione integro-differenziale.

Questa constatazione è, come vedremo nel paragrafo VIII.5, alla base del «*metodo simbolico*» per la soluzione dei circuiti in corrente alternata.

VIII.4. Sviluppo in serie di Fourier delle grandezze periodiche

Le considerazioni da noi fatte nel paragrafo precedente a proposito delle grandezze alternate di tipo sinusoidale o esponenziale (con esponente immaginario puro) assumono rilevanza del tutto generale, per le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti con termine noto periodico, in virtù delle seguenti proprietà:

a) Ogni grandezza periodica, sotto ipotesi assai generali che fra poco specificheremo, è esprimibile come serie di funzioni sinusoidali o di funzioni esponenziali a esponente immaginario puro (teorema di Fourier).

b) Sia data una equazione differenziale del tipo:

$$D\,I(t) = \sum f_i(t) \qquad \text{[VIII.33]}$$

con D operatore lineare. Se $I_i(t)$ è soluzione dell'equazione

$$DI(t) = f_i(t)$$

allora la funzione $I(t) = \Sigma I_i(t)$ rappresenta una soluzione della [VIII.32]

La proprietà b) che abbiamo appena enunciata è conseguenza immediata della definizione di operatore lineare (eq. [VIII.5]); dedichiamo pertanto la nostra attenzione unicamente alla proprietà a), cioè al teorema di Fourier.

Condizioni di Dirichlet

Sia data una funzione $f(t)$ generalmente continua nell'intervallo $[0, T]$: cioè una funzione che ammette in $[0, T]$ al più un numero finito di discontinuità finite. Indichiamo con $f(t+0)$ e $f(t-0)$ i limiti, rispettivamente destro e sinistro, di $f(t)$ nel punto di discontinuità t. Fuori dall'intervallo $[0, T]$, la funzione soddisfa alla relazione $f(t+T) = f(t)$: si tratta cioè di una funzione periodica con periodo T.

Sia, inoltre, generalmente continua in $[0, T]$ anche la derivata $f'(t)$ che esiste per ipotesi in tutti i punti in cui $f(t)$ è continua.

Esempi di funzioni siffatte sono graficate a lato.

Se le ipotesi suddette sono verificate (condizioni di Dirichlet), allora la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,\omega t + b_n \sin n\,\omega t)$$

con

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos(n\,\omega t)\, dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin(n\,\omega t)\, dt \end{aligned} \right\} \qquad \text{[VIII.34]}$$

Serie di Fourier

converge, e vale $f(t)$ nei punti di continuità, mentre vale

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

nei punti di discontinuità della $f(t)$. La [VIII.34] va sotto il nome di *serie di Fourier* o *sviluppo di Fourier* della $f(t)$.

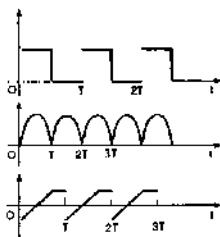
I coefficienti della serie di Fourier soddisfano la relazione:

$$\frac{2}{T}\int_0^T [f(t)]^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \qquad \text{[VIII.35]}$$

Uguaglianza di Parseval

detta *uguaglianza di Parseval*. Osserviamo che secondo la definizione [VIII.34], per $n = 0$ si ha

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt\,,$$

cioè $a_0/2$ è pari al valor medio della funzione periodica $f(t)$. Pertanto, $f(t) - a_0/2$ rappresenta una funzione alternata; ed anzi tutte le grandezze

alternate possono essere poste in questa forma, cosicché il loro sviluppo di Fourier è del tipo:

$$f_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,\omega t + b_n \sin n\,\omega t) \qquad \text{[VIII.34.a]}$$

Esempio

E.VIII.3. *Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(t) = t^2$ per t compreso nell'intervallo $[0, 2\pi]$, se il periodo T vale $T = 2\pi$.*

Il grafico della funzione è quello mostrato a lato.
Essendo $T = 2\pi$, si ha $\omega = 1$, per cui dalle [VIII.34] abbiamo:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2 \cos nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t^2\left(\frac{\sin nt}{n}\right) - 2t\left(-\frac{\cos nt}{n^2}\right) + 2\left(-\frac{\sin nt}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2} \qquad (n \neq 0)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{8\pi^3}{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2 \sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t^2\left(-\frac{\cos nt}{n}\right) - 2t\left(-\frac{\sin nt}{n^2}\right) + 2\left(\frac{\cos nt}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}$$

Pertanto, in definitiva, si ha:

$$f(t) = t^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nt - \frac{4\pi}{n}\sin nt\right) \qquad \text{per } 0 < t < 2\pi$$

Nella figura abbiamo graficato la funzione $f(t) = t^2$ (tratto continuo); lo sviluppo di Fourier calcolato fino al termine $n = 1$ (linea tratteggiata); e lo sviluppo calcolato fino al termine $n = 2$ (linea a tratto-punto) che, come si vede, si approssima già abbastanza bene alla funzione da sviluppare.

Considerato che l'esponenziale a esponente immaginario puro è definito come combinazione di seni e coseni, ci aspettiamo che le funzioni periodiche possano essere sviluppate, oltre che in serie di funzioni sinusoidali, anche in serie di funzioni esponenziali con esponente immaginario.

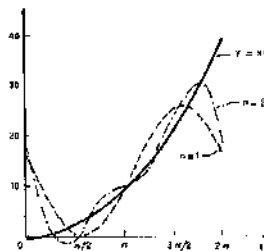
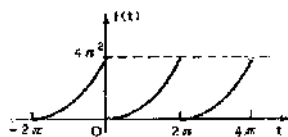
Identità di Eulero

In effetti, tenendo conto delle *identità di Eulero*

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \qquad \text{[VIII.36]}$$

è immediato verificare che la serie di Fourier [VIII.34] equivale alla serie

Serie esponenziale

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} \\ \text{con} \quad C_n = \displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-jn\omega t}\,dt \end{cases} \qquad \text{[VIII.37]}$$

Pertanto, quando sono soddisfatte le condizioni di Dirichlet, la serie [VIII.37] converge alla funzione periodica $f(t)$ nei suoi punti di continuità; mentre negli eventuali punti di discontinuità essa converge al valor medio $[f(t+0)+f(t-0)]/2$.

I termini dello sviluppo di Fourier [VIII.34] o [VIII.37] corrispondenti al valore $n\omega$ della pulsazione costituiscono quella che si dice l'*armonica di ordine n* della funzione periodica $f(t)$; in particolare, per $n=1$ si ha la cosiddetta *armonica fondamentale*.

Armoniche e armonica fondamentale

Tenuto conto di quanto abbiamo visto in questo paragrafo, la trattazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti con termine noto rappresentato da una funzione periodica (e generalmente continua) può essere ridotta senza perdita di generalità al caso in cui tale termine noto sia sinusoidale (o, equivalentemente, sia esponenziale con esponente immaginario puro). Nel prosieguo di questo capitolo, noi limiteremo in effetti la nostra attenzione a questi tipi di funzione.

Resta inteso che qualora il termine noto $f(t)$ sia periodico ma non sinusoidale (né esponenziale), la procedura da seguire è quella di sviluppare in serie di Fourier la $f(t)$, di risolvere l'equazione corrispondente a ciascuna armonica, e di combinare infine linearmente tali soluzioni coi coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della $f(t)$.

VIII.5. Il metodo simbolico

Va sotto il nome di *metodo simbolico* un metodo di analisi che consente di risolvere le reti in corrente alternata sinusoidale in modo formalmente analogo alle reti in corrente continua.

Metodo simbolico

Il metodo simbolico si basa sulle seguenti posizioni – che qui specifichiamo per le correnti, ma che del tutto analogamente vengono assunte anche per le tensioni:

a) ogni grandezza sinusoidale viene scritta, mediante opportuna scelta della fase φ, come grandezza cosinusoidale

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{[VIII.38]}$$

I_0 e φ (ampiezza e fase della grandezza considerata) sono, naturalmente, due numeri reali;

b) alla grandezza cosinusoidale [VIII.38] si associa la grandezza complessa

$$I_c(t) = I_0[\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)].$$

Questa grandezza complessa, utilizzando le identità di Eulero [VIII.36], può essere posta nella forma

$$I_c(t) = I_0[\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)] = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (I_0 e^{j\varphi})\, e^{j\omega t}$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned} & I_c(t) = I_{0c} e^{j\omega t} \\ \text{dove} \qquad & I_{0c} = I_0 e^{j\varphi} = I_0(\cos\varphi + j\sin\varphi) = a + jb \end{aligned}\right\} \qquad \text{[VIII.39]}$$

Come risulta dal confronto fra la [VIII.39] e la [VIII.38], il significato fisico della grandezza complessa $I_c(t) = I_{oc}e^{j\omega t}$ è così contenuto nei parametri che la caratterizzano:

- ω rappresenta la pulsazione della grandezza alternata $I(t)$;
- il modulo del numero complesso I_{oc} ($I_o = \sqrt{a^2 + b^2}$) rappresenta l'ampiezza della grandezza alternata $I(t)$;

Interpretazione fisica della forma complessa delle grandezze alternate

- la fase del numero complesso I_{oc} rappresenta la fase φ della grandezza alternata $I(t)$. Si ha dunque $\mathrm{tg}\,\varphi = b/a$; poiché tuttavia l'angolo φ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ non è completamente individuato dalla sua tangente, il quadrante in cui si trova φ va individuato analizzando separatamente il segno della parte reale a e del coefficiente dell'immaginario b del numero complesso I_{oc}.

Il vantaggio di porre la grandezza alternata [VIII.38] nella forma complessa [VIII.39] risulta evidente ricordando le [VIII.31], dalle quali si ricava immediatamente che fra tensione e corrente ai capi di ogni componente di un circuito in alternata – se corrente e tensione vengono espresse nella forma complessa [VIII.39] – sussiste una semplice relazione di proporzionalità, così come accadeva per le resistenze nei circuiti in corrente continua. Si ha infatti:

$$\left.\begin{aligned} V_L(t) &= L\frac{dI}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_{oc}e^{j\omega t}) = j\omega L\,(I_{oc}e^{j\omega t}) = j\omega L\,I(t) \\ V_C(t) &= \frac{1}{C}\int I\,dt = \frac{1}{C}\int (I_{oc}e^{j\omega t})\,dt = \frac{1}{j\omega C}(I_{oc}e^{j\omega t}) = -\frac{j}{\omega C}I(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{[VIII.40]}$$

$$V_R(t) = R\,I(t)$$

Impedenza

avendo indicato con V_L, V_C, V_R la differenza di potenziale ai capi, rispettivamente, di una induttanza, di una capacità e di una resistenza. Le [VIII.40] mostrano che, per un qualunque componente semplice, vale una relazione del tipo

$$V = ZI \qquad \text{[VIII.41]}$$

del tutto analoga alla legge di Ohm [IV.18]. V e I indicano, rispettivamente, tensione e corrente (grandezze complesse) ai capi del componente; e la costante Z detta *impedenza* del componente, vale rispettivamente:

Impedenza dei componenti semplici

$$\begin{cases} Z_L = j\omega L & \text{induttanza} \\ Z_C = -\dfrac{j}{\omega C} & \text{condensatore} \\ Z_R = R & \text{resistenza} \end{cases} \qquad \text{[VII.42]}$$

Reattanza

L'impedenza è una grandezza reale nel caso della resistenza; è un numero immaginario puro (detto anche *reattanza*) nel caso di induttanza e condensatore. In ogni caso l'impedenza ha le dimensioni di una resistenza, e il suo modulo si misura in Ohm. Osserviamo anche che nel caso di induttanza e condensatore l'impedenza dipende dalla pulsazione ω della corrente che circola nel componente (pari anche alla pulsazione della tensione presente ai suoi capi).

Tenuto conto della [VIII.41], e considerato inoltre che anche nel caso di corrente alternata (lentamente variabile) valgono sia la legge di Ohm generalizzata che l'equazione di continuità nella forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ – e dunque valgono le leggi di Kirchhoff – *l'analisi delle reti in corrente alternata procede in maniera del tutto analoga al caso di corrente continua*, con l'unico accorgimento di usare, per ogni componente semplice, le impedenze [VIII.42] al posto della resistenza R. In particolare, valgono le leggi di combinazione di impedenze in serie e in parallelo:

L'impedenza di una serie di più componenti è pari alla somma delle impedenze di ciascun componente

$$\vec{Z}_S = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3 + \ldots = \sum \vec{Z}_i \qquad \text{[VIII.43]}$$

Impedenza di una serie

Nello scrivere la [VIII.43] ci siamo adeguati a una convenzione generalmente adottata, e che anche noi seguiremo da qui in poi, di indicare con una freccetta sopraimposta le grandezze complesse; usando la stessa lettera senza freccia a indicare il modulo.

Quando si abbiano *due o più componenti in parallelo, l'inverso della loro impedenza è pari alla somma degli inversi delle impedenze di ogni componente*

$$1/\vec{Z}_P = 1/\vec{Z}_1 + 1/\vec{Z}_2 + 1/Z_3 + \ldots = \sum (1/\vec{Z}_i) \qquad \text{[VIII.44]}$$

Impedenza di un parallelo

Osserviamo che in generale, per $\vec{Z}_S$ e $\vec{Z}_P$ è non nulla sia la parte reale (detta *resistenza*, e indicata con R) che il coefficiente dell'immaginario (detto *reattanza*, e indicato con X). Usando la [VIII.43] e la [VIII.44] per il calcolo dell'impedenza, la [VIII.41] vale dunque non solo per ogni componente semplice; ma anche per qualunque loro combinazione:

$$\vec{V} = \vec{Z} \cdot \vec{I} \qquad \text{con } \vec{Z} \equiv R + jX \qquad \text{[VIII.41.a]}$$

Una volta determinata, a partire dalla conoscenza delle tensioni $\vec{V}$ e delle impedenze $\vec{Z}$ la corrente $\vec{I}$ circolante in ogni maglia, l'interpretazione fisica del risultato (complesso) viene eseguita seguendo le regole da noi enunciate a commento della [VIII.39]; e lo stesso vale per la tensione $\vec{V}$ quando sia questa l'incognita a partire dalla conoscenza della corrente.

Esempi

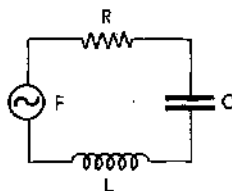
E.VIII.4. *Nel circuito RLC mostrato a fianco, la forza elettromotrice applicata dal generatore ha valore efficace $F_{eff} = 220\,V$ e frequenza $\nu = 50\,s^{-1}$. Determinare la tensione ai capi di ciascun componente ($R = 200\,\Omega$; $C = 5\,\mu F$; $L = 0{,}5\,H$).*

Scriviamo la forza elettromotrice nella forma

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_0 e^{j\omega t} = \sqrt{2}\, F_{eff} e^{j\omega t}$$

Essendo $\vec{F}_0 = F_{eff}\sqrt{2}$ reale, ciò equivale a scegliere l'origine dei tempi in modo tale che la fase iniziale della tensione $\vec{F}(t)$ sia nulla.

Poiché i tre componenti sono in serie, l'impedenza totale del circuito è pari alla somma delle impedenze:

$$\vec{Z} = (R + j\omega L - j/\omega C) = R + j(\omega L - 1/\omega C)$$

La corrente circolante nel circuito è:

$$\vec{I}(t) = \frac{\vec{F}}{\vec{Z}} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \vec{I}_0 e^{j\omega t}$$

con

$$\vec{I}_0 = \frac{F_0}{(R + j(\omega L - 1/\omega C))}$$

Per determinare le caratteristiche fisiche della corrente, conviene porre l'ampiezza

$$\vec{I}_0 = \frac{F_0}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

nella forma «canonica» $a + jb$; ciò si fa semplicemente moltiplicando numeratore e denominatore di $\vec{I}_0$ per il complesso coniugato del denominatore $(R - j(\omega L - 1/\omega C)$:

$$\vec{I}_0 = F_0 \frac{R - j(\omega L - 1/\omega C)}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

Da cui segue

$$\begin{cases} I_0 = |\vec{I}_0| = \dfrac{F_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \dfrac{F_0}{Z} \\ \operatorname{tg} \varphi_I = - \dfrac{(\omega L - 1/\omega C)}{R} \end{cases} \qquad \text{[VIII.45]}$$

dove φ_I è la fase della corrente, e I_0 la sua ampiezza. Abbiamo così riottenuto le [VIII.28]

Una volta nota la corrente, la tensione ai capi di ciascun componente si ottiene semplicemente moltiplicando per le rispettive impedenze:

$$\vec{V}_L(t) = j\omega L\, \vec{I}(t) \Rightarrow V_{0L} = \omega L\, I_0;\ \ \varphi_L = \varphi_I + \pi/2$$

$$\vec{V}_R(t) = R\, \vec{I}(t) \quad \Rightarrow V_{0R} = R\, I_0;\ \ \varphi_R = \varphi_I$$

$$\vec{V}_C(t) = -j\frac{\vec{I}(t)}{\omega C} \Rightarrow V_{0C} = \frac{I_0}{\omega C};\ \ \varphi_C = \varphi_I - \pi/2$$

dove V_{0L}, φ_L rappresentano rispettivamente ampiezza e fase della tensione ai capi della induttanza (e analogamente per V_{0R}, φ_R e V_{0C}, φ_C). Numericamente abbiamo:

$$F_0 = \sqrt{2}\, F_{eff} = 310 \text{ Volt}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 315 \text{ s}^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{Z}_L &= j\omega L = j\,158\ \Omega \\ \vec{Z}_R &= R = 200\ \Omega \\ \vec{Z}_C &= -\frac{j}{\omega C} = -j\,635\ \Omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \simeq 517\ \Omega \\ &\operatorname{tg}\varphi_I = -\frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R} = 2{,}38 \end{aligned}$$

E dunque

$$I_0 = \frac{F_0}{Z} = \frac{310\text{ V}}{517\ \Omega} = 0{,}6\text{ A}; \quad \varphi_I = \operatorname{artg} 2{,}38 = 67{,}2^\circ$$

Si ha inoltre:

$$V_{oL} = 94{,}8\ \text{V}\,; \qquad V_{oR} = 120\ \text{V}\,; \qquad V_{oC} = 381\ \text{V}$$
$$\varphi_L = 157{,}2° \qquad \varphi_R = 67{,}2 \qquad \varphi_C = -22{,}8°$$

Osserviamo che $V_o \neq V_{oL} + V_{oR} + V_{oC}$: non si possono sommare semplicemente i moduli delle tensioni ai capi di ciascun componente per ottenere la tensione ai capi di una serie, poiché tali tensioni hanno in generale diversa fase.

E.VIII.5. *Nel circuito rappresentato in figura, in cui il generatore di forza elettromotrice è sinusoidale ($F(t) = F_o \cos\omega t$), calcolare la corrente nel condensatore e nell'induttanza.*

R
F(t)
C
L

L'impedenza $\vec{Z}_P$ del parallelo LC fra condensatore e induttanza è data da:

$$\frac{1}{\vec{Z}_P} = \frac{1}{\vec{Z}_C} + \frac{1}{\vec{Z}_L} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = j\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}$$

da cui:

$$\vec{Z}_P = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

L'impedenza complessiva Z del circuito è dunque:

$$\vec{Z} = \vec{Z}_R + \vec{Z}_P = R + j\,\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

Si può così calcolare la corrente $I(t)$ circolante nel circuito:

$$\vec{I}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{\vec{Z}} = \frac{F_o e^{j\omega t}}{R + j\,\dfrac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}} = \frac{F_o\left(R - j\,\dfrac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)}{R^2 + \left(\dfrac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2}\, e^{j\omega t} \qquad \text{[VIII.46]}$$

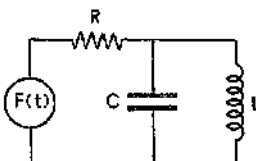
da cui segue:

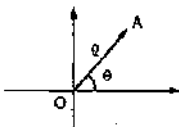
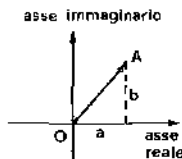
$$I_o = \frac{F_o}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi_I = -\frac{\omega L}{R\,(1 - \omega^2 LC)} \qquad \text{[VIII.46.a]}$$

La tensione $\vec{V}_P(t)$ presente ai capi del parallelo (pari alla tensione che agisce sia ai capi della capacità che ai capi dell'induttanza) è data da:

$$\vec{V}_P(t) = \vec{Z}_P\,\vec{I}(t) = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}\,\vec{I}(t)$$

La corrente circolante rispettivamente nel condensatore e nell'induttanza è infine:

$$\begin{cases} \vec{I}_C = \dfrac{\vec{V}_P(t)}{\vec{Z}_C} = \dfrac{\vec{V}_P(t)}{1/j\omega C} = j\omega C\,\vec{V}_P(t) = -\left(\dfrac{\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}\right)\vec{I}(t) \\[2ex] \vec{I}_L = \dfrac{\vec{V}_P(t)}{\vec{Z}_L} = \dfrac{\vec{V}_P(t)}{j\omega L} = \dfrac{1}{(1 - \omega^2 LC)}\,\vec{I}(t) \end{cases}$$

In queste espressioni, al posto di $\vec{I}(t)$ va inserita la sua espressione [VIII.46]. Poiché, come vediamo, $\vec{I}_C$ è pari a $\vec{I}(t)$ moltiplicato per il numero reale $-\left(\frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC}\right)$, l'ampiezza di $\vec{I}_C$ è pari all'ampiezza I_0 di $\vec{I}$ moltiplicata per il valore assoluto $\left|\frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC}\right|$ di tale numero reale; mentre la fase φ_C di $\vec{I}_C$ è pari alla fase φ_I di $\vec{I}$ se $-\left(\frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC}\right) > 0$, e pari a $\varphi_I + \pi$ se $-\left(\frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC}\right) < 0$. Analogamente la discussione per $\vec{I}_L$, che è pari a $\vec{I}$ moltiplicata per il numero reale $\frac{1}{1-\omega^2 LC}$.

Rappresentazione grafica del metodo *simbolico*

Come risulta dagli esempi E.VIII.4 ed E.VIII.5, il metodo simbolico consente di impostare e risolvere i circuiti in corrente alternata attraverso una procedura assai semplice e lineare, anche se i relativi calcoli possono risultare alquanto elaborati. Per facilitare i conti, e per eseguire un controllo almeno qualitativo sui risultati, può essere conveniente ricorrere alla rappresentazione grafica delle grandezze complesse che intervengono nel metodo simbolico stesso.

Piano di Gauss

A tal riguardo, ricordiamo che nel piano complesso («piano di Gauss»), ogni numero complesso

$$A \equiv (a + jb) \equiv \rho\,(\cos\theta + j\sin\theta)$$

è rappresentato da un vettore. Le componenti cartesiane del vettore rappresentano rispettivamente la parte reale a e il coefficiente dell'immaginario b del numero complesso; mentre in coordinate polari, modulo e anomalia del vettore rappresentano rispettivamente modulo ρ e fase θ del numero complesso. Ciò considerato, una grandezza alternata nella forma complessa [VIII.39]

$$\vec{I}(t) = \vec{I}_0 e^{j\omega t} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Fasore

è rappresentata da un vettore la cui fase $\theta = \omega t + \varphi$ aumenta linearmente nel tempo, con $d\theta/dt = \omega = \text{cost}$. Si tratta dunque di un vettore ruotante con velocità angolare costante pari alla pulsazione della grandezza alternata. Tale vettore ruotante è detto «fasore»; la grandezza elettrica rappresentata dal vettore coincide, istante per istante, con la proiezione del fasore sull'asse reale.

In un circuito, comunque complicato, in cui agiscano uno o più alimentatori sinusoidali caratterizzati tutti dalla stessa pulsazione ω, tutte le correnti (circolanti in qualunque ramo) e tutte le tensioni (ai capi di qualunque componente) hanno la stessa pulsazione ω, e sono dunque rappresentate da fasori ruotanti tutti con la stessa velocità angolare.

La loro configurazione geometrica relativa (cioè il modulo di ciascuno di essi, nonché gli angoli che ciascuno di essi forma con tutti gli altri) resta pertanto invariata nel tempo, ed è pari alla configurazione che essi hanno all'istante $t = 0$. La configurazione all'istante $t = 0$ (in cui $e^{j\omega t} = e^0 = 1$) è d'altra parte rappresentata dall'insieme dei vettori rappresentativi dei numeri complessi a fattore di $e^{j\omega t}$ (dai vettori del tipo $\vec{I}_0$ nella [VIII.39]).

Rappresentando graficamente tali numeri complessi nel piano di Gauss, risulta facilitata l'interpretazione dei calcoli, la loro stessa esecu-

zione e la loro verifica almeno qualitativa. La stessa rappresentazione grafica può essere naturalmente usata per indicare graficamente anche le impedenze.

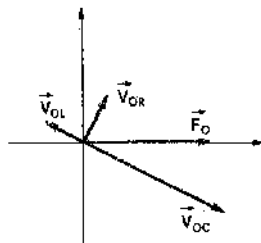
Va peraltro osservato che mentre la somma (e differenza) di numeri complessi trova immediato riscontro nella rappresentazione grafica (somma o differenza di vettori), non vi è invece alcuna tecnica semplice per rappresentare graficamente il prodotto e il quoziente fra numeri complessi.

Esempio

E.VIII.6. *Rappresentare graficamente la configurazione delle tensioni nel circuito di cui all'esempio E.VIII.4.*

Ricordiamo che il modulo e la fase dei vettori rappresentativi delle tensioni in oggetto sono:

$$\vec{F}_o : \quad F_o = 310\ \text{V};\ \varphi = 0$$
$$\vec{V}_{oL} : \quad V_{oL} = 95\ \text{V};\ \varphi_L = 157{,}2°$$
$$\vec{V}_{oR} : \quad V_{oR} = 120\ \text{V};\ \varphi_R = 67{,}2°$$
$$\vec{V}_{oC} : \quad V_{oC} = 381\ \text{V};\ \varphi_C = -22{,}8°$$

Questi vettori sono rappresentati nella figura. Osserviamo che $\vec{F}_o$ è pari alla *somma vettoriale* (risultante) di $\vec{V}_{oL}$, $\vec{V}_{oR}$, $\vec{V}_{oC}$; e poiché tali vettori non sono tutti fra di loro paralleli, è questo il motivo per cui, come osservato alla fine dell'esempio E.VIII.4, è $F_o \neq V_{oL} + V_{oR} + V_{oC}$.

VIII.6. Il fenomeno della risonanza

Condizioni di risonanza

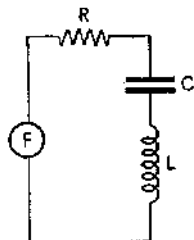
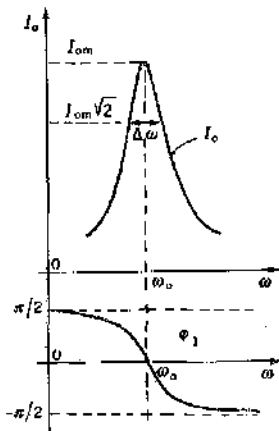
In un circuito *RLC* in serie, la relazione che lega fra di loro la corrente I circolante nel circuito e la tensione F applicata è data dalle [VIII.45], che qui riscriviamo per comodità:

$$I = I_o \cos(\omega t + \varphi_I) \qquad\qquad F = F_o \cos \omega t$$

con

$$\begin{cases} I_o = \dfrac{F_o}{Z} = \dfrac{F_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi_I = -\dfrac{(\omega L - 1/\omega C)}{R} \end{cases} \qquad \text{[VIII.45]}$$

Poiché l'impedenza $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ dipende dalla pulsazione ω della tensione applicata, anche la corrente I ha ampiezza F_o/Z che, a parità di F_o, dipende da ω. I_o diviene massima quando $(\omega L - 1/\omega C) = 0$; cioè quando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o \qquad \text{[VIII.47]}$$

Si dice allora che il circuito si trova in *condizioni di risonanza*; la pulsazione $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$ viene detta *pulsazione di risonanza*. Quando $\omega = \omega_o$ si ha $Z = R$, $I_o = F_o/R$ e $\varphi_I = 0$.

Al variare di ω intorno a ω_o, mantenendo F_o costante, I_o e φ hanno un andamento caratteristico come quello mostrato in figura. La larghezza $\Delta\omega$ della curva a campana caratteristica della risonanza dipende, naturalmente, dai valori dei parametri L, C, R che caratterizzano il circuito. Si usa convenzionalmente misurare la larghezza $\Delta\omega$ in corrispondenza del punto in cui I_o si è ridotto di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al valore I_{om} che esso assume alla risonanza, cioè per $\omega = \omega_o$. Si definisce il *fattore di merito Q* (o semplicemente *fattore Q*) della risonanza attraverso la relazione:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \qquad \text{[VIII.48]}$$

Non è difficile dimostrare che il fattore adimensionale Q è legato, in buona approssimazione, ai parametri caratteristici del circuito dalla relazione:

$$\frac{1}{Q} \simeq R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \text{[VIII.49]}$$

Esempio

E.VIII.7. *Dimostrare la relazione [VIII.49].*

Poniamo $\Delta\omega = 2(\bar{\omega} - \omega_o)$. Tenuto conto della definizione di $\Delta\omega$, $\bar{\omega}$ rappresenta quel valore della pulsazione ω per cui $I_o = I_{om}/\sqrt{2}$. Considerato che $I_o = F_o/Z$, $\bar{\omega}$ è anche quel valore di ω per cui Z passa dal valore $Z = R$ al valore $Z = \sqrt{2}R$; ovvero $Z^2(\bar{\omega}) = 2R^2$. Deve essere pertanto:

$$R^2 + (\bar{\omega}L - 1/\bar{\omega}C)^2 = 2R^2$$

da cui

$$(\bar{\omega}L - 1/\bar{\omega}C)^2 = R^2$$

$$\bar{\omega}L - 1/\bar{\omega}C = R$$

ovvero:

$$R = \bar{\omega}L\left(1 - \frac{1}{\bar{\omega}^2 LC}\right) = \bar{\omega}L\left(1 - \frac{\omega_o^2}{\bar{\omega}^2}\right) = L\bar{\omega}\left(1 + \frac{\omega_o}{\bar{\omega}}\right)\left(1 - \frac{\omega_o}{\bar{\omega}}\right) =$$

$$= L(\bar{\omega} + \omega_o)\left(1 - \frac{\omega_o}{\bar{\omega}}\right)$$

Nell'approssimazione $\omega_o \simeq \bar{\omega}$, la precedente relazione diviene

$$\frac{R}{L} \simeq 2\bar{\omega}\left(1 - \frac{\omega_o}{\bar{\omega}}\right) = 2(\bar{\omega} - \omega_o) = \Delta\omega$$

da cui infine:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o} \simeq \frac{R}{L}\frac{1}{\omega_o} = \frac{R}{L}\sqrt{LC} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

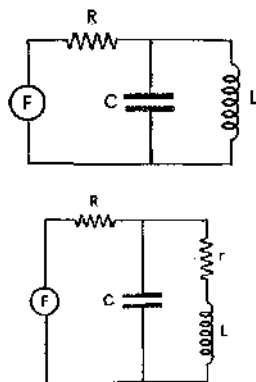
che è quanto era stato chiesto di dimostrare.

Qualora, in un circuito RLC, l'induttanza e la capacità siano fra di loro in parallelo anziché in serie, allora intorno a $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ si verifica il fenomeno cosiddetto della *antirisonanza*: quando $\omega = \omega_0$ la corrente passa cioè per un minimo anziché per un massimo.

Come si vede dalla [VIII.46.a], per $\omega = 1/\sqrt{LC}$ l'impedenza del parallelo LC (la cui espressione è $j\omega L/(1-\omega^2 LC)$ tende a ∞; e dunque la corrente tende a zero. In realtà, una induttanza presenta sempre anche una resistenza-serie non nulla; per cui una rappresentazione del circuito più aderente alla realtà è quella mostrata nella figura a lato. È facile verificare, allora, che per $\omega = \omega_0$ l'impedenza del parallelo passa per un valore massimo pari approssimativamente a

$$|Z_P|_{max} \simeq \frac{L}{rC},$$

e dunque

$$I_{0min} = \frac{F_0}{R + \dfrac{L}{rC}} \neq 0$$

VIII.7. Potenza assorbita dai circuiti in corrente alternata

Riprendiamo brevemente, al fine di approfondirle e generalizzarle, le considerazioni da noi svolte nell'esempio E.VIII.2 a proposito della potenza dissipata in un circuito in corrente alternata. Sia $I(t) = I_0 \cos\omega t$ la corrente circolante nel circuito (abbiamo scelto l'origine dei tempi in modo che sia nulla la fase iniziale della corrente); sia $\vec{Z} = R + jX = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi$ l'impedenza del circuito ($Z\cos\varphi = R$ è la parte resistiva, e $Z\sin\varphi = X$ è la reattanza). La tensione agente ai capi di $\vec{Z}$ è allora $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi) = I_0 Z \cos(\omega t + \varphi)$.

$$\begin{cases} I(t) = I_0 \cos\omega t \qquad V(t) = V_0\cos(\omega t+\varphi) = I_0 Z\cos(\omega t + \varphi) \\ \qquad\qquad \vec{Z} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = R + jX \end{cases} \qquad \text{[VIII.50]}$$

La potenza istantanea $W(t)$ che l'impedenza scambia col generatore è allora:

Potenza istantanea

$$W(t) = V(t)\cdot I(t) = I_0^2 Z\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi) = I_0^2 Z\cos\varphi\cos^2\omega t +$$
$$+ I_0^2 Z\sin\varphi\sin\omega t\cos\omega t = I_0^2 Z\cos\varphi\cos^2\omega t - \frac{I_0^2 Z}{2}\sin\varphi\sin 2\omega t$$

Possiamo dunque porre $W(t)$ nella forma:

$$W(t) = P(t) + Q(t)$$

con

$$\begin{cases} P(t) = I_0^2 Z\cos\varphi\cos^2\omega t = I_0^2 R\cos^2\omega t \\ Q(t) = -\dfrac{I_0^2 Z}{2}\sin\varphi\sin 2\omega t = -\dfrac{I_0^2 X}{2}\sin 2\omega t \end{cases} \qquad \text{[VIII.51]}$$

Potenza reale
Potenza reattiva

I termini $P(t)$ e $Q(t)$ della potenza istantanea vengono detti rispettivamente *potenza reale* e *potenza reattiva.* Benché essi abbiano, ovviamente, le stesse dimensioni, l'unità di misura Watt coi suoi multipli (w, kw, ecc.) viene di solito usata solo per indicare la potenza reale $P(t)$; mentre la potenza reattiva $Q(t)$ (nonché la potenza istantanea $P(t) + Q(t)$) viene nell'uso comune indicata in Voltampere (VA) e suoi multipli.

Voltampere VA

Il valor medio su un periodo di $P(t)$ e $Q(t)$ vale rispettivamente

$$\overline{P(t)} = I_0^2 R/2 \qquad \overline{Q(t)} = 0$$

e dunque il valor medio $\bar{W}$ della potenza totale è pari semplicemente al valor medio della potenza reale, e può essere scritto nelle forme fra di loro equivalenti

Legge di Galileo Ferraris

$$\bar{W} = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{I_0^2 Z}{2}\cos\varphi = \frac{I_0 V_0}{2}\cos\varphi = I_{eff} V_{eff}\cos\varphi \qquad \text{[VIII.52]}$$

Quanto alla potenza reattiva (la cui media nel tempo è nulla) essa corrisponde all'energia che capacità e induttanza assorbono in fase di carica e cedono in fase di scarica. Se vi è solo un condensatore (o solo un'induttanza) la rispettiva energia viene scambiata direttamente col generatore; altrimenti essi scambiano energia anche fra di loro (e ne caso limite della condizione di risonanza $1/\sqrt{LC} = \omega$, solamente fra di loro).

Se consideriamo il valor massimo della potenza reattiva

$$Q_0 = \frac{I_0^2 Z}{2}\sin\varphi = I_{eff} V_{eff}\sin\varphi$$

e il valor medio [VIII.52] della potenza reale

$$\bar{P} = I_{eff} V_{eff}\cos\varphi\,,$$

la quantità

$$P_a = \sqrt{Q_0^2 + \bar{P}^2} = I_{eff} V_{eff} \qquad \text{[VIII.53]}$$

Potenza apparente

è detta *potenza apparente.* Osserviamo che la potenza reale media [VIII.52] coincide con la potenza apparente [VIII.53] solo se $\cos\varphi = 1$, cioè se V e I sono fra di loro in fase. Gli usuali contatori di energia elettrica misurano l'integrale temporale della potenza apparente [VIII.53]; per non pagare energia che in realtà non viene utilizzata conviene aggiustare le caratteristiche del carico in modo che sia $\varphi = 0$ («fasatura» del carico).

Fasatura

Se un circuito è alimentato da più elettromotori, è possibile che per uno o più di essi sia $\varphi > \pi/2$, cioè $\cos\varphi < 0$. In questo caso la potenza reale scambiata dall'elettromotore col circuito è negativa: l'elettromotore, anziché fornire energia al circuito, assorbe da esso energia elettrica trasformandola in altra forma di energia.

VIII.8. Trasformatore statico

Trasformatore

Il trasformatore statico è un dispositivo elettrotecnico comunemente usato per le applicazioni più disparate, realizzato costruttivamente secondo lo schema mostrato in figura. Su un anello di ferro dolce, laminato secondo

piani paralleli alle linee di flusso al fine di ridurre le correnti parassite, sono realizzati due avvolgimenti costituiti rispettivamente da N_1 e N_2 spire. Se S è la sezione (supposta costante) dell'anello, e l è la lunghezza totale del circuito magnetico, allora trascurando il flusso disperso dal circuito magnetico si ha (vedi eq. [VII.22] e [VII.33]):

$$\left.\begin{array}{c} L_1 = \dfrac{\mu N_1^2 S}{l} \qquad L_2 = \dfrac{\mu N_2^2 S}{l} \\ M = M_{12} = M_{21} = \pm \dfrac{\mu N_1 N_2 S}{l} = \pm \sqrt{L_1 L_2} \end{array}\right\} \quad \text{[VIII.54]}$$

dove L_1, L_2 ed M sono rispettivamente i coefficienti di autoinduzione dei due circuiti e il coefficiente di mutua induzione. Si ha in M il segno + o il segno − a seconda che i sensi di avvolgimento dei due circuiti siano concordi o discordi. In presenza di flusso disperso sarebbe $M = \pm K\sqrt{L_1 L_2}$, dove K $(0 < K < 1)$ è detto *coefficiente di accoppiamento* dei due circuiti. Nella pratica, i trasformatori ben costruiti hanno K assai prossimo a 1, e noi nei nostri calcoli useremo l'approssimazione $K = 1$.

Coefficiente di accoppiamento

Se il circuito (1) (detto *primario*) è alimentato da un generatore di f.e.m. alternata $\vec{F}(t) = F_0 e^{j\omega t}$ (l'origine dei tempi è scelta in modo che la fase iniziale di $\vec{F}(t)$ sia nulla; e dunque F_0 è reale) e il circuito (2) (detto *secondario*) è chiuso su una resistenza di carico R, allora l'equazione del trasformatore (cioè del sistema dei due circuiti, che viene schematicamente indicato come nella figura a lato) è data dal sistema [VII.34], in cui si ponga $F_0 e^{j\omega t}$ al posto di $f(t)$, r_1 al posto di R_1, $r_2 + R$ al posto di R_2 e le [VIII.54] al posto di L_1, L_2, M. r_1 è la resistenza del primario (più la resistenza interna del generatore, se quest'ultima non è trascurabile) e r_2 la resistenza del secondario. Le [VII.34] divengono così:

Circuito primario e circuito secondario

$$\begin{cases} F_0 e^{j\omega t} = r_1 \vec{I}_1 + L_1 \dfrac{d\vec{I}_1}{dt} + M \dfrac{d\vec{I}_2}{dt} \\ 0 = (r_2 + R)\vec{I}_2 + L_2 \dfrac{d\vec{I}_2}{dt} + M \dfrac{d\vec{I}_1}{dt} \end{cases}$$

Sostituendo in queste equazioni $\vec{I}_1 = \vec{I}_{01} e^{j\omega t}$ e $\vec{I}_2 = \vec{I}_{02} e^{j\omega t}$ e dividendo per $e^{j\omega t}$, si ottiene:

$$\begin{cases} F_0 = (r_1 + j\omega L_1)\,\vec{I}_{01} + j\omega M\,\vec{I}_{02} \\ 0 = (r_2 + R + j\omega L_2)\,\vec{I}_{02} + j\omega M\,\vec{I}_{01} \end{cases} \quad \text{[VIII.55]}$$

Questo sistema lineare può essere facilmente risolto, ad esempio col metodo di Kramer, ricavando così le incognite complesse $\vec{I}_{01}$ e $\vec{I}_{02}$. Noi però limitiamo per ora la nostra attenzione all'ipotesi (valida per descrivere i casi pratici almeno in prima approssimazione) che sia $r_1 << \omega L_1$ (resistenza ohmica del primario trascurabile) e $R \to \infty$ (secondario aperto), cosicché I_2 sia nulla. Osserviamo che quando $R \to \infty$ (e contemporaneamente $I_2 \to 0$) $R\vec{I}_{02}$ diviene pari a $-j\omega M\,\vec{I}_{01}$ (vedi la seconda delle [VIII.55]), e fisicamente rappresenta la forza elettromotrice $\vec{V}_{02}$ attiva ai capi del secondario. Le [VII.55] divengono allora:

$$\begin{cases} F_0 = j\omega L_1\,\vec{I}_{01} \\ \vec{V}_{02} = -j\omega M\,\vec{I}_{01} \end{cases} \quad \text{[VIII.56]}$$

Facendo il rapporto membro a membro, e tenendo conto delle [VIII.54], abbiamo:

$$\frac{\vec{V}_{o2}}{F_o} = -\frac{M}{L_1} = -\frac{N_2}{N_1} \qquad \text{[VIII.57]}$$

Rapporto di trasformazione

Il rapporto [VIII.57] fra la f.e.m. agente ai capi del secondario e la f.e.m. applicata ai capi del primario è detto *rapporto di trasformazione* del trasformatore. La [VIII.57] mostra che *nell'ipotesi che le perdite del trasformatore siano trascurabili* (cioè che siano trascurabili il flusso disperso, la resistenza del primario, e le perdite per isteresi e correnti parassite) *il rapporto di trasformazione è semplicemente pari al rapporto fra il numero di spire del secondario e del primario*. Vediamo anche che nelle ipotesi fatte, *a circuito secondario aperto*, la corrente $\vec{I}_{o1}$ del primario (puramente immaginaria) è sfasata di $\pi/2$ rispetto alla tensione $\vec{F}_o$ (puramente reale), e dunque la *potenza reale media assorbita dal primario* stesso *è nulla* (vedi eq. [VIII.52]); vediamo inoltre che la tensione al secondario è in controfase (sfasata di π) ovvero in fase (a seconda dei sensi di avvolgimento relativi di primario e secondario) rispetto alla tensione applicata al primario.

Se r_1 non è trascurabile (continuando a considerare il caso che il secondario sia aperto, $I_2 = 0$), la prima delle [VIII.56] diviene:

$$F_o = (r_1 + j\omega L_1)\,\vec{I}_{o1}$$

La fase φ della tensione rispetto alla corrente è

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L_1}{r_1} \neq \frac{\pi}{2},$$

e il primario assorbe potenza

$$\frac{I_{o1}F_o}{2}\cos\varphi = \frac{I_{o1}^2 Z}{2}\cos\varphi = \frac{I_{o1}^2 r_1}{2} = I_{1\text{eff}}^2 r_1,$$

pari alla potenza dissipata per effetto Joule nella resistenza r. Se finalmente il secondario viene chiuso su un carico $R \neq \infty$, dalla seconda delle [VIII.55] vediamo che $\vec{I}_{o2} \neq 0$; e nella prima delle [VIII.55] compare il termine di accoppiamento induttivo $j\omega M\vec{I}_{o2}$. L'angolo di sfasamento fra F_o e $\vec{I}_1$ si discosta da $\pi/2$, e diviene tale che la potenza assorbita dal primario è – a parte le perdite – pari alla potenza erogata dal secondario.

Linee di trasmissione a grande distanza dell'energia elettrica

Fra le varie applicazioni dei trasformatori, una di grande interesse pratico è in connessione con la trasmissione a grande distanza dell'energia elettrica. Si verifica infatti facilmente che, fissata la resistività λ della linea di trasmissione (resistenza per unità di lunghezza) e fissata la lunghezza l della linea, la potenza W_d dissipata lungo la linea a parità di potenza W_c erogata dalla centrale elettrogeneratrice, è tanto minore quanto minore è la corrente I_{eff} che attraversa la linea e quanto maggiore è la tensione V_{eff} di alimentazione della linea stessa.

Si ha infatti (supponendo che tutte le impedenze siano puramente resistive):

$$W_c = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

$$W_d = \Delta V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}^2 \lambda l$$

dove ΔV_{eff} è la caduta di tensione fra i due estremi della linea ($\Delta V_{eff} = I_{eff}\lambda l$). Facendo il rapporto membro a membro:

$$\frac{W_d}{W_c} = \frac{I_{eff}\lambda l}{V_{eff}} \qquad [VIII.58]$$

Perdita percentuale della linea

Osserviamo che se il carico non è puramente resistivo ($\cos\varphi \neq 1$) a parità di tensione e di corrente diminuisce la potenza utilizzata ma non diminuiscono le perdite di trasmissione, la cui incidenza percentuale diviene così maggiore. Al fine di rendere il rapporto di perdita [VIII.58] quanto più piccolo possibile, la tensione di lavoro V_{teff} degli elettrodotti a grande distanza è normalmente di alcune centinaia di migliaia di Volt; mentre sia la tensione V_{ceff} erogata dalla centrale sia la tensione V_{ueff} di utilizzazione al carico sono dell'ordine delle centinaia di Volt. La trasformazione da V_{ceff} a V_{teff}, così come quella da V_{teff} a V_{ueff}, viene realizzata mediante *trasformatori statici* (*stazioni di trasformazione*).

Esempi

E.VIII.8. *Un trasformatore, le cui condizioni di lavoro sono tali che siano trascurabili le perdite, è alimentato con una tensione alternata il cui valore efficace è 30 V ed eroga al secondario - chiuso su una resistenza R - una tensione efficace di 300 V. Se il carico è percorso da una corrente efficace $I_{2eff} = 10$ A, quale è la corrente (minima) I_{1eff} che circola nel primario?*

Rapporto di trasformazione delle correnti

Il problema può essere facilmente risolto in base a considerazioni energetiche. Il secondario dissipa nel carico una potenza pari a $V_{2eff} \cdot I_{2eff}$. Questa potenza deve essere fornita dal generatore che alimenta il primario, e questa è pari a $V_{1eff} \cdot I_{1eff} \cos\varphi$.

Dalla relazione

$$V_{1eff} \cdot I_{1eff} \cos\varphi = V_{2eff} I_{2eff}$$

ricaviamo

$$I_{1eff} = \left(\frac{V_{2eff}}{V_{1eff}}\right)\frac{1}{\cos\varphi} I_{2eff} \geq \left(\frac{V_{2eff}}{V_{1eff}}\right) I_{2eff}$$

Il segno di $\geq$ deriva dal fatto che $\cos\varphi \leq 1$. Nel caso numerico ipotizzato, la corrente nel primario è almeno 100 A. Dunque il rapporto di trasformazione delle correnti, quando sia trascurabile lo sfasamento fra corrente e tensione al primario, è inverso al rapporto di trasformazione delle tensioni.

E.VIII.9. *Un trasformatore, con perdite trascurabili, ha rapporto di trasformazione delle tensioni pari a K. Il secondario è chiuso su una resistenza di carico pari ad R. Che resistenza «vede» il generatore che alimenta il primario?*

Rapporto di trasformazione delle resistenze

Indicando con l'indice 1 le grandezze efficaci relative al primario e con l'indice 2 quelle relative al secondario, si ha per ipotesi la relazione fra tensioni:

$$V_2 = K V_1$$

Per quanto visto nell'esempio E.VIII.8, la relazione fra le correnti è

$$I_2 = \frac{1}{K} I_1$$

Facendo il rapporto membro a membro fra queste due relazioni, si ha

$$\frac{V_2}{I_2} = K^2 \frac{V_1}{I_1}$$

V_2/I_2 è pari a R per ipotesi. La resistenza che il generatore «vede» sul primario (pari a V_1/I_1) vale dunque $(1/K^2)R$. Oltre a trasformare tensioni e correnti, il trasformatore trasforma dunque anche resistenze (più in generale impedenze) con un rapporto di trasformazione pari al quadrato di quello relativo alle tensioni.

VIII.9. Strumenti di misura delle grandezze elettriche alternate

Come abbiamo già accennato, i galvanometri, che costituiscono la base dei più comuni strumenti per la misura di correnti e tensioni in continua, non sono di alcuna utilità pratica per la misura di grandezze alternate. Infatti la costante-tempo del loro equipaggio mobile è molto più grande del periodo delle grandezze alternate con cui si ha a che fare nella pratica: di tali grandezze alternate essi misurano, pertanto, soltanto il valor medio; e il valor medio delle grandezze alternate è nullo.

Oscillografi

Esistono strumenti il cui equipaggio mobile ha costante-tempo molto piccola, così che esso può seguire (almeno fino a una certa frequenza limite) le oscillazioni della corrente (e/o della tensione) misurandone il valore istantaneo: questi strumenti sono detti *oscilloscopi* o *oscillografi*. Nei primi oscillografi storicamente realizzati l'equipaggio mobile era un sistema meccanico caratterizzato da un momento di inerzia molto piccolo. Negli ultimi decenni tuttavia questi strumenti sono stati soppiantati dall'*oscillografo a raggi catodici*; tanto che oggi col termine oscillografo, senza alcun attributo, si intende in realtà oscillografo catodico. In un buon oscillografo catodico la costante-tempo è dell'ordine di 10^{-7}-10^{-9} sec; esso è pertanto in grado di misurare il valore istantaneo di tensioni alternate di frequenza fino a 10^7-10^9 Hertz o più. In questi strumenti l'«equipaggio mobile» è costituito da un fascio collimato di elettroni (*raggio catodico*) che passando fra le placche di un condensatore piano viene deviato dal campo elettrico istantaneo presente fra le armature stesse; la deflessione subita istante per istante dal fascio misura così la tensione istantanea applicata alle placche.

Oscillografo catodico

Lo schema costruttivo di un oscillografo catodico è mostrato in figura. Un tubo a vuoto di vetro è costruito a forma di imbuto. L'estremità svasata termina con uno schermo fluorescente S conduttore; all'altro estremo è realizzato un cannoncino elettronico, formato da un filamento che – riscaldato dal passaggio di una corrente – emette elettroni. Il cannoncino (*catodo*) è mantenuto negativo rispetto allo schermo (*anodo*), cosicché gli elettroni vengono accelerati verso lo schermo; mentre un certo numero di elettrodi ausiliari (g, a_1, a_2) provvedono al controllo della intensità del raggio catodico, nonché alla sua collimazione e focalizzazione sullo schermo.

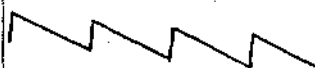
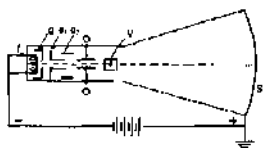
Fra le placche OO, a giacitura orizzontale parallela all'asse del tubo, viene inviata la tensione da misurare che produce un campo elettrico verticale (asse y). Fra le placche VV a giacitura verticale parallela all'asse viene inviata una tensione variabile a «dente di sega», che produce un campo elettrico orizzontale (asse x) variabile linearmente nel tempo. In assenza di segnale fra le placche OO il fascio non subisce deflessione secondo l'asse y; il segnale a dente di sega fra le placche VV produce uno spazzolamento orizzontale del fascio, che per la persistenza dell'immagine sullo schermo fluorescente si traduce in una linea orizzontale luminosa. Se però si ha

anche un segnale fra le placche OO, il fascio viene deflesso anche verticalmente, cosicché la linea luminosa viene modulata verticalmente disegnando l'andamento temporale del segnale di tensione.

Diagramma del segnale

La partenza del dente di sega sull'asse x può anche essere comandata dal segnale che si vuole misurare («trigger»); e quest'ultimo, opportunamente ritardato, viene inviato anche all'asse y in sincronismo con lo spazzolamento orizzontale, cosicché il relativo segnale risulta dislocato in posizione voluta (e fissa) lungo l'asse orizzontale. La figura disegnata sullo schermo (diagramma del segnale) può anche essere fotografata.

Trigger

Gli oscillografi catodici sono divenuti oggi strumenti largamente diffusi in ogni laboratorio; e lo stesso principio ha trovato applicazione nei tubi di ricezione televisiva.

Assai più diffusi degli oscillografi – perché meno costosi, più maneggevoli e facilmente trasportabili – sono varie specie di strumenti per la misura dei valori efficaci delle grandezze elettriche alternate.

Elettrodinamometro

Negli elettrodinamometri, la corrente da misurare viene inviata simultaneamente in due avvolgimenti. Il primo avvolgimento è fisso, ed è a forma di solenoide. Il secondo, a forma di spira (multipla) piatta, è contenuto entro il primo; esso è libero di ruotare intorno a un asse ortogonale all'asse del solenoide, e in posizione di riposo gli assi dei due avvolgimenti sono fra di loro ortogonali. Quando nei due avvolgimenti circola corrente, la bobina mobile ruota in virtù del momento di origine magnetica

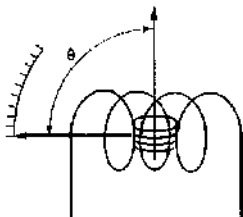
$$M = B \cdot m \cdot \sin\theta = Bm \qquad \text{[VIII.59]}$$

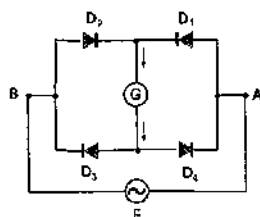
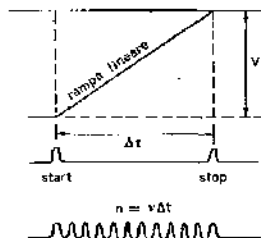
finché tale momento non è equilibrato dal momento elastico esercitato sulla bobina mobile da una molla di richiamo verso la posizione di riposo.

Nella [VIII.59], B è il campo di induzione all'interno del solenoide fisso ($B = \mu_0 \dfrac{N_1 I_1}{l}$, in cui l è la lunghezza del solenoide, N_1 il numero di spire e I_1 la corrente che in esse circola) ed $m = N_2 S I_2$ è il momento magnetico della spira mobile (S la sua area, N_2 il numero di spire e I_2 la corrente). Se entrambi gli avvolgimenti sono percorsi dalla stessa corrente I che si vuole misurare, allora il momento [VIII.59] è proporzionale a $(I(t))^2$; poiché l'inerzia dell'equipaggio mobile è tale da mediare su molti periodi, lo strumento – opportunamente tarato – misura l'intensità efficace I_{eff} della corrente.

L'elettrodinamometro può essere impiegato per un'altra interessante applicazione. Se uno dei suoi avvolgimenti viene posto in serie al carico (in modo da essere percorso dalla stessa corrente istantanea I_c che attraversa il carico stesso) e l'altro in parallelo (in modo che la corrente in esso sia proporzionale alla tensione istantanea V_c agente ai capi del carico), allora il momento [VIII.59] risulta proporzionale al prodotto $I_c(t) \cdot V_c(t)$; l'elettrodinamomentro, misurandone la media temporale, misura dunque la potenza reale assorbita dal carico. In questo modo di impiego l'elettrodinamomentro è detto *wattmetro*.

Wattmetro

Fra gli altri strumenti normalmente usati per la misura di grandezze alternate ricordiamo gli strumenti a *filo caldo* e gli *strumenti a raddrizzatore*. I primi si basano sulla misura dell'allungamento subito da un filo a seguito dell'effetto Joule prodotto dal passaggio della corrente da misurare; benché la potenza dissipata sia proporzionale al quadrato di I_{eff}, per alcuni effetti di compensazione la scala di questi strumenti può essere resa approssimativamente lineare in I_{eff}.

Strumenti a filo caldo

Strumenti a raddrizzatore

Gli strumenti a raddrizzatore sono costruiti secondo lo schema a ponte mostrato a lato; D_1 D_2 D_3 D_4 sono *diodi*, cioè dispositivi almeno approssimativamente unidirezionali, in cui cioè la corrente può passare solo nel verso della freccia. Quando il polo A del generatore F è investito dalla semionda positiva, la corrente passa per $D_1 D_3$; quando A è investito dalla semionda negativa, la corrente passa per $D_2 D_4$. In ogni caso, il galvanometro G è percorso da corrente sempre diretta nel verso della freccia; e dunque la deviazione del suo indice risulta proporzionale alla media del valore assoluto di $I(t)$, che, come è facile verificare, per corrente sinusoidale vale $\overline{|I(t)|} = 2I_0/\pi$.

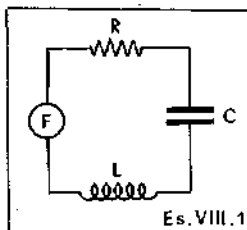
Voltmetro digitale

Con la diffusione crescente di dispositivi a stato solido (e in particolare di circuiti integrati) a costo sempre più accessibile, gli strumenti basati su raddrizzatore trovano applicazione sempre più larga specie in connessione con *voltmetri digitali*, cioè misuratori di tensione basati su tecniche numeriche. Il principio di funzionamento di un tipico voltmetro digitale è facilmente comprensibile osservando i diagrammi mostrati nella figura. Una tensione di riferimento crescente linearmente nel tempo («rampa lineare») viene inviata a uno dei due ingressi di un *comparatore*. All'altro ingresso del comparatore viene inviata la tensione da misurare V (direttamente, se si tratta di una tensione continua; o dopo averla raddrizzata, se si tratta di una tensione alternata). Quando il livello della rampa lineare raggiunge il livello V, il comparatore emette un segnale (*segnale di stop*). È evidente che la distanza temporale Δt fra un *segnale di start* (contemporaneo alla partenza della rampa) e il segnale di stop, è proporzionale a V. Il segnale di start e quello di stop vengono utilizzati rispettivamente per far partire e per fermare un treno d'onda di frequenza costante. Dunque il treno d'onda ha un numero di impulsi proporzionale alla distanza temporale Δt fra start e stop, e dunque proporzionale anche a V. Contando elettronicamente il numero di impulsi contenuti nel treno d'onda, si ha così una misura della tensione V incognita; misura rappresentata da un numero mostrato su schermo luminoso da un contatore numerico. Tutte le funzioni mostrate nel diagramma sono in realtà svolte da un unico *circuito integrato* (o «chip») detto *convertitore analogico-digitale*

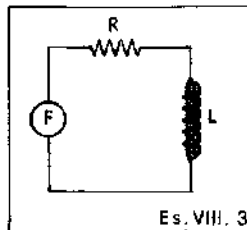
Circuito integrato

Convertitore analogico-digitale

Esercizi del capitolo VIII

VIII.1. Un circuito RLC in serie è alimentato da un generatore di f.e.m. alternata con $F_{eff} = 220$ V e frequenza $\nu = 50$ Hertz. La corrente circolante nel circuito ha valore efficace $I_{eff} = 5$ A, ed è in anticipo di 60° rispetto alla f.e.m. ($\varphi_I = -60°$). Si trovi:
a) la potenza $\bar{W}$ dissipata nel circuito; b) il valore della resistenza R; c) se $C = 0$, quando vale L; d) quanto deve valere C affinché sia $\cos\varphi = 1$.
(Risposte: a) $\bar{W} = 550$ W; b) $R = 22\ \Omega$; c) $L = 0{,}12$ H; d) $C = 85\ \mu$F)

VIII.2. Un generatore fornisce una tensione alternata costituita dalla sovrapposizione di due tensioni sinusoidali, F_1 ed F_2, per le quali è rispettivamehte:

$$F_{1eff} = 200\ V;\ \nu_1 = 50\ s^{-1} \qquad F_{2eff} = 20\ V;\ \nu_2 = 500\ s^{-1}$$

Calcolare la corrente efficace I_{eff} circolante nel carico, se questo è costituito rispettivamente da: a) una resistenza $R = 10\ \Omega$; b) una induttanza $L = 0{,}1$ H; c) una capacità $C = 10\ \mu$F.
(Risposte: a) 20 A; 2 A; b) 6,4 A; $6{,}4 \cdot 10^{-2}$ A; c) 0,7 A; 0,7 A)

VIII.3. Un circuito RL è costituito da una resistenza $R = 1500\ \Omega$ in serie a una induttanza, costituita da $N = 1000$ spire di raggio $r = 1$ cm avvolte in un solenoide di lunghezza $l = 20$ cm. Alimentando il circuito con tensione alternata di frequenza $\nu = 50\ s^{-1}$, la corrente risulta anticipata rispetto alla tensione di $\varphi_I = -45°$. Trascurando la resistenza dell'avvolgimento, calcolare il valore L della induttanza e il valore μ_r della permeabilità relativa media del ferro. (Risposte: $L = 4{,}78$ H; $\mu_r = 2420$)

VIII.4. Un circuito RLC serie (con $R = 100\ \Omega$; $L = 0{,}1$ H; $C = 1\ \mu$F) è alimentato da un generatore con $F = F_0 \cos\omega t$ ($F_0 = 300$ V; ω variabile). Sia $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ la corrente. Calcolare:

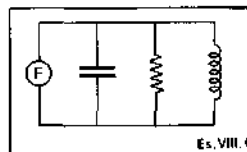
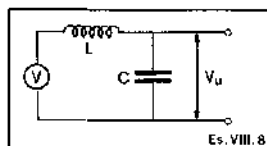
a) la pulsazione ω_0 di risonanza
b) l'ampiezza I_0 e la fase φ della corrente di risonanza
c) l'ampiezza $\bar{I}_0$ e la fase $\bar{\varphi}$ della corrente quando $\omega = 4000\ s^{-1}$.
(Risposte: $\omega_0 = 3165\ s^{-1}$; $I_0 = 3$ A e $\varphi = 0$; $\bar{I}_0 = 1{,}9$ A e $\bar{\varphi} = 56{,}3°$)

VIII.5. Una induttanza, costruita con una bobina avvolta su un nucleo di ferro, ha $L = 0{,}5$ H. L'avvolgimento ha inoltre, nel suo complesso, resistenza ohmica pari a $R = 50\ \Omega$. Calcolare il fattore di potenza $\cos\varphi$, e la potenza $\bar{W}$ dissipata nell'induttanza se ad essa è applicata una tensione alternata

$$F_0 \cos\omega t, \text{ con } \quad F_0 = 300\ V \ \text{ e } \ \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50\ s^{-1}.$$

(Risposte: $\cos\varphi = 0{,}30$; $\bar{W} = 0{,}5$ w)

VIII.6. Determinare il fattore di potenza $\cos\varphi$ per il circuito RLC in parallelo mostrato in figura. Calcolare in quali condizioni è $\cos\varphi = 1$.

(Risposte: $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + R^2(\omega C - 1/\omega L)^2}}$; $\cos\varphi = 1$ per $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$)

VIII.7. Un dispositivo elettrodomestico assorbe una corrente $I_{eff} = 11$ A e una potenza media $\bar{W} = 1{,}8$ Kw quando è collegato alla rete ($V_{eff} = 220$ V). Quale è l'impedenza Z del dispositivo? Quali la sua resistenza R e la sua reattanza X? (Risposte: $Z = 20\ \Omega$; $R = 14{,}8\ \Omega$; $X = 13{,}5\ \Omega$)

VIII.8. Un generatore di forza elettromotrice eroga una tensione V pari alla sovrapposizione di una componente continua $V_c = 20$ V e di una componente alternata $V_a = V_{0a} \cos \omega t$ ($V_{0a} = 5$ V; $\nu = \omega/2\pi = 500$ s^{-1}). In uscita al generatore viene montato un filtro LC, cioè un dispositivo come quello mostrato in figura (con $L = 0{,}1$ H; $C = 10$ μF). Nella tensione di uscita V_u, quale è il rapporto $(V_{0a}/V_c)_u$ fra la ampiezza della componente alternata e la componente continua? (Risposta: $(V_{0a}/V_c)_u = 11\%$)

VIII.9. Un generatore di corrente alternata, con resistenza interna pari ad r, deve essere utilizzato per alimentare un carico resistivo di resistenza pari a R_2. Fra il generatore e il carico si interpone un trasformatore. Quale deve essere il suo rapporto di trasformazione K affinché sia massima la potenza trasferita al carico? Si supponga un trasformatore ideale (senza perdite) con $\varphi = 0$. (Risposta: $K = \sqrt{R_2/r}$)

VIII.10. Applicando una batteria con $V_c = 12$ V (continui) a una impedenza, si trova che in essa circola una corrente $I_c = 1$ A. Applicando alla stessa impedenza un generatore alternato di tensione efficace $V_a = 12$ V, la corrente efficace risulta $I_a = 0{,}3$ A. Quanto vale la fase φ della corrente alternata rispetto alla tensione? (Risposta: $\varphi = -72{,}5°$)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo VIII

VIII.1. La [VIII.52] consente di dare risposta alle prime due domande; le altre due domande trovano risposta applicando la seconda delle [VIII.45].

VIII.2. Il problema si risolve utilizzando la [VIII.41] e le [VIII.42].

VIII.3. Utilizzare la seconda delle [VIII.45] e la [VII.22].

VIII.4. Utilizzare la [VIII.47] e i commenti fatti a tale relazione nel testo. Utilizzare inoltre la [VIII.45].

VIII.5. Il problema si risolve facilmente utilizzando la [VIII.50], la [VIII.45], la [VIII.41] e la [VIII.52].

VIII.6. Usare la [VIII.44] e le [VIII.42].

VIII.7. La [VIII.41] consente di calcolare Z, e mediante la [VIII.52] si può calcolare $\cos\varphi$. Noti Z e $\cos\varphi$, il calcolo di R e X risulta immediato.

VIII.8. Calcolare la componente alternata della corrente che circola nella serie LC, e quindi la tensione alternata ai capi del condensatore.

VIII.9. La potenza è massima quando r è pari alla resistenza equivalente R_1 del primario. Si veda poi l'esempio E.VIII.9.

VIII.10. Si tratta di una induttanza. Dal comportamento in continua determinarne la resistenza R, e dal comportamento in alternata l'impedenza Z. Il calcolo di φ segue dalla seconda delle [VIII.45].

Capitolo nono

Onde elettromagnetiche

IX.1. Considerazioni introduttive

In questo capitolo tratteremo il campo elettromagnetico variabile nel tempo senza alcuna restrizione: rinunceremo cioè all'ipotesi di quasi stazionarietà che sottendeva la maggior parte degli argomenti trattati nel capitolo VII, e tutti quelli trattati nel capitolo VIII.

Il campo elettrico $\vec{E}$ e il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ sono stati introdotti per descrivere l'interazione fra cariche elettriche, rispettivamente ferme o in movimento. In effetti, il loro valore in una posizione qualunque $\vec{r}$ e in un istante qualunque t è definito attraverso la forza $\vec{F}$ che in $(\vec{r}, t)$ si esercita su una carica campione puntiforme, rispettivamente ferma o in movimento; cioè attraverso la relazione di Lorentz [V.5] che qui richiamiamo:

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad [IX.1]$$

Forza di Lorentz

Così definiti, i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (nonché i campi «ausiliari» $\vec{D}$ e $\vec{H}$, introdotti per descrivere l'effetto della presenza di materia) risultano legati alle caratteristiche delle sorgenti dalle equazioni di Maxwell [VII.20], che saranno il punto di partenza di tutte le considerazioni che svolgeremo in questo capitolo e che qui riscriviamo per comodità:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \text{II)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{III)}\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{IV)}\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}\right\} \qquad [IX.2]$$

Equazioni di Maxwell

Le sorgenti del campo elettromagnetico (la densità di carica ρ, e la densità di corrente $\vec{J}$) non sono fra di loro completamente indipendenti, essendo soggette alla condizione di conservazione della carica formalizzata attraverso l'equazione di continuità [IV.12]; equazione che riscriviamo anch'essa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad [IX.3]$$

Equazione di continuità

La dissimmetria delle equazioni relative a $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (il fatto che al secondo membro della [IX.2.I] compaia la densità di carica ρ, mentre il secondo membro della [IX.2.II] è identicamente nullo; e il fatto che al secondo membro della [IX.2.III] non compaia l'equivalente del vettore $\vec{J}$ presente al secondo membro della [IX.2.IV]) corrisponde al fatto sperimentale che non è mai stato scoperto un equivalente magnetico della carica elettrica (*monopolo magnetico*); non esistono poli magnetici singoli, ma solo dipoli a somma algebrica nulla, e per conseguenza non esiste nemmeno l'equivalente magnetico della corrente elettrica.

Monopolo magnetico

Come abbiamo già a suo tempo osservato, le equazioni di Maxwell mostrano che la derivata temporale di $\vec{E}$ è una delle sorgenti di $\vec{B}$ (e viceversa). Questa circostanza, insieme alle leggi di trasformazione relativistiche, per cui l'interpretazione della natura elettrica o magnetica del campo dipende dal sistema di riferimento – una circostanza che approfondiremo in questo capitolo – giustificano e richiedono una trattazione unificata dei due campi, che nel loro insieme prendono il nome di *campo elettromagnetico*.

Campo elettromagnetico

L'introduzione del campo elettromagnetico, così come storicamente è avvenuta e come noi l'abbiamo presentata in questo libro, potrebbe apparire come un mero artificio per trattare in termini compatti le forze fra cariche ferme o in movimento. Va tuttavia osservato che:

a) Diverse combinazioni delle sorgenti possono dar luogo agli stessi campi $\vec{E}$, $\vec{B}$ in una certa posizione spazio-temporale $(\vec{r}, t)$; quando ciò accade la forza subita da una carica campione (ferma o in movimento) è la stessa.

b) Un campo elettromagnetico è spesso presente in regioni di spazio prive di sorgenti; ed il campo localizza in tali regioni una quantità di moto, un momento angolare, una energia non nulli – come abbiamo già visto e come meglio approfondiremo in seguito.

Il campo elettromagnetico come entità fisica a sé stante

Queste circostanze fanno del campo elettromagnetico *una entità fisica che può essere definita, trattata e interpretata* – per molti aspetti – *indipendentemente dalle sorgenti che l'hanno generata*; e questo rappresenta il nocciolo delle questioni che tratteremo in questo capitolo.

Onde elettromagnetiche

Inesistenza dell'etere

Sperimentalmente, si riscontra che il campo elettromagnetico si propaga nella forma di onde, che viaggiano nello spazio senza che sia richiesta la presenza in esso di alcun supporto materiale: l'ipotesi della necessità di un supporto materiale per le onde elettromagnetiche («etere»), ipotesi che è stata avanzata nel corso dello sviluppo storico dell'elettromagnetismo quando la natura di alcuni fenomeni non era ancora stata compresa, non è sopravvissuta all'evidenza dei fatti.

Le onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto a una velocità che è stata misurata con elevatissima precisione e vale

Velocità della luce nel vuoto

$$c = 299.792.456{,}2 \pm 1{,}1 \text{ m/s}$$

Questa velocità di propagazione è risultata essere indipendente dalla frequenza, da frequenze molto basse (decine di Hertz) fino a frequenze molto alte (10^{24} Hertz). È questa anche la velocità della luce: in effetti la luce è costituita da onde elettromagnetiche, che il nostro occhio è in grado di osservare con diverso colore quando la loro lunghezza d'onda è compresa fra $\sim 0{,}39$ μm e $\sim 0{,}78$ μm.

Nel corso di tutto il capitolo, noi tratteremo le grandezze che compaiono nella [IX.2] come funzioni continue delle variabili spazio-temporali. Già sappiamo che questa rappresenta un'approssimazione. Le sorgenti sono

infatti costituite – a livello microscopico – da cariche elementari di dimensioni molto piccole: in particolare gli elettroni risultano essere puntiformi entro la massima risoluzione con cui si è riusciti fino ad oggi ad esplorarne la struttura ($r_e < 10^{-14}$ cm). Ciò dà alle sorgenti una struttura granulare (o particellare); tuttavia abbiamo già più volte accennato al fatto che tale struttura particellare non è rivelabile nella maggior parte degli esperimenti alla scala macroscopica. Ricordando che la carica dell'elettrone vale circa $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, si calcola facilmente che, ad esempio, un condensatore da 1 μF carico a 100 V ha sulle armature un eccesso (o difetto) del numero di elettroni dell'ordine di 10^{15}; e una corrente da 1 mA corrisponde a un flusso di circa 10^{16} elettroni al secondo.

Struttura particellare delle sorgenti

Anche il fatto di trattare i campi come funzioni continue (propagantisi, come vedremo, nella forma di onde) rappresenta, per altri motivi, un'approssimazione (*approssimazione «classica»*). Alla scala microscopica, al fine di render ragione di molti fatti sperimentali è necessario ipotizzare anche per i campi una struttura particellare (*quantizzazione dei campi*). I *«quanti»* del campo elettromagnetico sono detti *fotoni*.

Approssimazione classica

Quantizzazione dei campi

Fotoni

Tuttavia, nella maggior parte dei fenomeni alla scala macroscopica la struttura particellare dei campi non si evidenzia. Ad esempio, la luce emessa da una lampada da 100 w, a una distanza di 1 m corrisponde a un flusso di circa 10^{15} fotoni visibili per cm² e per secondo: la struttura quantica del campo non è praticamente rivelabile attraverso misure di intensità, e una descrizione puramente ondulatoria del campo è perfettamente adeguata. Ciò non toglie che in alcuni fenomeni di interazione radiazione materia (ad esempio nell'effetto fotoelettrico) l'energia potenziale degli elettroni investiti dalla radiazione possa essere confrontabile con quella dei singoli fotoni costituenti la radiazione; in questi casi la struttura quantica del campo può tradursi anche in effetti evidenziabili alla scala macroscopica. A questi fenomeni dedicheremo qualche spazio nell'ultimo capitolo di questo libro. Ma in tutto ciò che vedremo in questo e nei prossimi due capitoli, l'approssimazione classica che noi sistematicamente adotteremo risulta molto bene adeguata alla corretta interpretazione dei fatti sperimentali.

IX.2. Alcuni approfondimenti relativi alle equazioni di Maxwell

Come abbiamo anticipato nel paragrafo IX.1, il punto di partenza di tutti gli sviluppi presentati in questo capitolo saranno le equazioni [IX.1], [IX.2] e [IX.3]. Più precisamente, una volta specificata la configurazione spazio-temporale delle sorgenti $\vec{J}$, ρ (configurazione che dovrà comunque *rispettare il vincolo di conservazione della carica*, formalizzato nella equazione [IX.3]) le equazioni di Maxwell [IX.2] – corredate dalle relazioni che legano $\vec{D}$ ad $\vec{E}$ e $\vec{H}$ a $\vec{B}$, e completate con l'assegnazione delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno – consentono, a prescindere da eventuali difficoltà matematiche, di determinare il campo elettromagnetico in ogni punto dello spazio-tempo; e allora l'equazione [IX.1] consente di calcolare l'azione subita da una carica campione ferma o in movimento (purché questa sia sufficientemente piccola da non perturbare apprezzabilmente, con la sua presenza e col suo moto, la configurazione delle sorgenti del campo).

Consideriamo innanzi tutto il caso in cui lo spazio interessato al campo sia completamente vuoto salvo laddove sono localizzate le sorgenti. Le relazioni che legano $\vec{D}$ a $\vec{E}$ e $\vec{H}$ a $\vec{B}$ sono in questo caso relazioni di semplice proporzionalità tramite le costanti ε_0 e $1/\mu_0$:

Campo elettromagnetico nel vuoto

$$\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \qquad \vec{H}_0 = \vec{B}_0/\mu_0 \qquad [IX.4]$$

e le [IX.2] divengono:

$$\text{I)}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0 = \rho/\varepsilon_0 \qquad \text{II)}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0 = 0$$
$$\text{III)}\ \vec{\nabla}\times\vec{E}_0 = -\frac{\partial\vec{B}_0}{\partial t} \qquad \text{IV)}\ \vec{\nabla}\times\vec{B}_0 = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_0}{\partial t} \qquad [IX.5]$$

Equazioni di Maxwell fra di loro indipendenti

Cominciamo con l'osservare che queste equazioni (che rappresentano 8 equazioni scalari, visto che la prima e la seconda sono equazioni scalari, mentre la terza e la quarta sono equazioni vettoriali) non sono tutte fra di loro indipendenti, come d'altra parte ci aspettiamo considerato che esse contengono solo le sei incognite scalari $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$. In effetti, una volta ammesso che le sorgenti soddisfino, come devono, l'equazione [IX.3], le prime due equazioni di Maxwell sono deducibili rispettivamente dalla quarta e dalla terza.

Vediamo come l'equazione $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0 = 0$ può essere dedotta dalla $\vec{\nabla}\times\vec{E}_0 = -\partial\vec{B}_0/\partial t$. Applichiamo a quest'ultima l'operatore divergenza. Tenuto conto che la divergenza di un rotore è identicamente nulla ($\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}_0) \equiv 0$), si ottiene:

$$0 = -\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{B}_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0)$$

cioè ...chè la derivata temporale della divergenza di $\vec{B}_0$ è nulla ovunque; ne $\left(\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0) = 0\right)$ segue che in ogni posizione spaziale essa è costante nel tempo:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0 = \text{costante}$$

D'altra parte, all'istante iniziale (prima che venissero realizzate le sorgenti) era ovunque $\vec{B}_0 = 0$ e dunque anche $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0 = 0$; e poiché deve essere $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0 =$ costante indipendentemente dalle modifiche che possano subire le sorgenti, segue che è sempre

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0 = 0$$

Analogamente, applicando l'operatore divergenza alla quarta delle [IX.5], si ha:

$$0 = \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}_0}{\partial t}$$

da cui, tenendo conto anche della [IX.3], segue:

$$0 = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0\,; \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0\right) = 0$$

da cui deduciamo

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0 = \text{costante}$$

e tenuto conto delle condizioni all'istante iniziale (in cui essendo $\rho = 0$, era anche $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0 = 0$; e dunque $\rho/\varepsilon_0 - \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0 = 0$) segue la prima delle [IX.5].

Tenuto conto di quanto abbiamo ora visto, tutte le proprietà del campo elettromagnetico – le cui sorgenti devono soddisfare la [IX.3] – sono contenute nella terza e nella quarta equazione di Maxwell, che rappresentano sei equazioni differenziali indipendenti nelle due incognite vettoriali $\vec{E}_o, \vec{B}_o$ (sei incognite scalari funzioni dello spazio e del tempo).

Come vedremo più avanti nel corso di questo capitolo, anche nel caso non stazionario che stiamo qui trattando – così come abbiamo visto accadere per il caso stazionario – tutte le informazioni relative al campo elettromagnetico possono essere fornite assegnando dei *potenziali generalizzati* (funzioni dello spazio-tempo: potenziale vettore $\vec{A}$ e potenziale scalare elettrico V), cioè assegnando quattro funzioni. Queste quattro funzioni (i potenziali) possono essere ricavate – note le sorgenti – risolvendo quattro equazioni differenziali scalari; equazioni che anzi hanno, come vedremo, il vantaggio di presentare una straordinaria compattezza e simmetria per quanto riguarda le relazioni fra potenziali e sorgenti.

Campi e potenziali

Il fatto che per ricavare il campo elettromagnetico servano sei equazioni, mentre per ricavare i potenziali – da cui pure il campo elettromagnetico è deducibile – bastino quattro equazioni, può sembrare una incongruenza. Va però osservato che affinché il campo elettromagnetico $\vec{E}, \vec{B}$ ammetta potenziale, esso deve soddisfare precise condizioni; condizioni che sono contenute nelle equazioni di Maxwell. Solo una volta verificato ciò, il campo $\vec{E}, \vec{B}$ è esprimibile in termini di potenziali.

Quando si parla di potenziali (e ci si limita a considerare quattro equazioni), si dà invece per scontato che il campo goda delle opportune proprietà matematiche, che pure hanno richiesto, una volta per tutte, di essere verificate sperimentalmente verificando le corrispondenti caratteristiche delle equazioni di Maxwell: e ciò riconduce la fisica del campo elettromagnetico all'esigenza di far conto, nel suo complesso, su sei equazioni.

Veniamo ora al caso in cui lo spazio interessato al campo, anziché essere vuoto, sia riempito con un *materiale omogeneo* ed *isotropo*. In questo caso, alle sorgenti localizzate macroscopiche $\vec{J}, \rho$ (note a priori) vanno aggiunte le correnti e le cariche «microscopiche» che il campo elettromagnetico stesso induce, con la sua azione, nella materia: queste sorgenti, proprio perché attivate dal campo, non sono note a priori. Tuttavia abbiamo visto che per molti materiali (materiali diamagnetici e paramagnetici; e materiali ferromagnetici limitatamente ai casi e alle situazioni in cui la curva $\vec{B} = B(\vec{H})$ sia univoca e lineare), la trattazione diviene formalmente analoga al caso del vuoto, col semplice accorgimento di sostituire nelle [IX.4] due costanti diverse (ε, μ) al posto di ε_o, μ_o:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{H} = \vec{B}/\mu \qquad \text{[IX.6]}$$

Campo elettromagnetico in materiali omogenei e isotropi non ferromagnetici.

e le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon & \text{II)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{III)}\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{IV)}\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \varepsilon\mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}\right\} \qquad \text{[IX.7]}$$

che costituiscono una semplice generalizzazione delle [IX.5], contenendole come caso particolare nel caso che sia $\varepsilon = \varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$. Naturalmente, anche a proposito della indipendenza relativa delle [IX.7] valgono le stesse considerazioni da noi più sopra fatte a commento delle [IX.5].

Caso di più materiali

Nel caso che porzioni diverse dello spazio siano riempite con materiali diversi, il problema viene trattato risolvendo le [IX.7] all'interno di ciascun materiale; e imponendo ai campi, sulle superfici di separazione fra materiali diversi, le condizioni di raccordo a suo tempo stabilite (eq. [III.32] e [VI.22]):

Condizioni di raccordo

$$\begin{cases} E_{t1} = E_{t2} \\ \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{t1}/\mu_1 = B_{t2}/\mu_2 \\ B_{n1} = B_{n2} \end{cases} \qquad [IX.8]$$

coi pedici t, n a indicare rispettivamente la componente tangenziale e quella normale alla superficie di separazione, e i pedici 1, 2 a indicare i due diversi materiali.

In questo e nei prossimi due capitoli, in cui ci occuperemo di campi elettromagnetici variabili nel tempo e della loro propagazione, limiteremo sempre la nostra attenzione a materiali omogenei ed isotropi per i quali valgono le [IX.6], con μ e ε costanti e uniformi: il punto di partenza di tutti i nostri sviluppi saranno dunque le [IX.7] e, quando servono (presenza di più materiali), le [IX.8].

Prima di procedere, osserviamo che le equazioni di Maxwell nella loro forma più generale [IX.2] possono essere scritte anche utilizzando i vettori di polarizzazione elettrica e magnetica, $\vec{P}$ e $\vec{M}$, al posto di $\vec{D}$ e $\vec{H}$. Ricordiamo le definizioni (eq. [III.22] e [VI.19]):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad [IX.9]$$

da cui le [IX.6] sono ricavabili nel caso particolare che $\vec{P}$ e $\vec{M}$ siano proporzionali rispettivamente a $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Sostituendo le [IX.9] nelle [IX.2] otteniamo con passaggi immediati:

$$\begin{array}{ll} \text{I)}\ \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} & \text{II)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{III)}\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{IV)}\ \dfrac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \end{array} \qquad [IX.10]$$

Naturalmente, da queste equazioni (riducibili a 6 equazioni fra di loro indipendenti) non è possibile ricavare le 12 funzioni rappresentate dalle componenti dei vettori $\vec{E}, \vec{P}, \vec{B}, \vec{M}$ se questi sono tutti incogniti. La soluzione delle [IX.10] può essere effettuata solo se i vettori $\vec{P}, \vec{M}$ sono noti a priori (il che non avviene praticamente mai), ovvero se sono note le relazioni che legano $\vec{P}, \vec{M}$ a $\vec{E}, \vec{B}$ (le relazioni equivalenti alle [IX.6], $\vec{P} = \chi_E \vec{E}$ e $\vec{M} = \chi_M \vec{B}/\mu_0$; ovvero relazioni più complesse per altri tipi di materiali). In altri termini, le [IX.10] sono del tutto equivalenti alle [IX.2], la cui soluzione richiede la conoscenza delle relazioni che legano $\vec{D}$ a $\vec{E}$ e $\vec{H}$ a $\vec{B}$.

L'utilità delle [IX.10] sta piuttosto nel fatto che una volta risolte le [IX.2] (ovvero le [IX.7], quando si abbia a che fare con materiali per cui valgano le [IX.6]), esse consentono di calcolare le caratteristiche delle sorgenti microscopiche del campo elettromagnetico (densità di carica e densità di corrente). Vediamo infatti che le [IX.10] differiscono dalle equazioni per il caso del vuoto [IX.5] per il fatto di comprendere i termini di sorgente aggiuntivi:

$$\rho'_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \qquad \vec{J}'_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \qquad \vec{J}'_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad [IX.11]$$

I primi due di questi termini, che non contengono alcuna derivata temporale, sono presenti anche nel caso stazionario (eq. [III.13] e [VI.16]); come abbiamo discusso a suo tempo, essi rappresentano rispettivamente la *densità di carica di polarizzazione* e la *densità di corrente di magnetizzazione*.

Densità di carica di polarizzazione

Densità di corrente di magnetizzazione

Il termine aggiuntivo che compare nel caso non stazionario è il termine

$$\vec{J}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad [IX.12]$$

detto *densità di corrente di polarizzazione elettrica*. Esso è dovuto al fatto che quando un dielettrico si polarizza (cioè quando si genera in esso un momento di dipolo elettrico), il fenomeno si accompagna necessariamente a un movimento ordinato di cariche (se pure un movimento microscopico di cariche localizzate, cioè non capaci di migrazioni macroscopiche nel materiale); e a ciò corrisponde l'attivarsi di una corrente entro il materiale.

Densità di corrente di polarizzazione elettrica

Esempio

E.IX.1. *Discutiamo brevemente l'interpretazione fisica della [IX.12].*

Un materiale isolante contenga n atomi per unità di volume. Ognuno di essi può essere considerato come una coppia di cariche di segno opposto e di pari modulo (sia q tale modulo). Per effetto di un campo esterno il baricentro delle cariche positive dell'atomo i-esimo si sposti di un tratto $d\vec{l}_i$ rispetto a quello delle cariche negative. Tale atomo acquista allora un momento elettrico $d\vec{p}_i$:

$$d\vec{p}_i = q\, d\vec{l}_i$$

e dunque il momento elettrico risultante acquisito dall'unità di volume è:

$$d\vec{P} = \sum d\vec{p}_i = \sum q\, d\vec{l}_i = nq\, \overline{d\vec{l}}$$

dove la sommatoria è estesa all'unità di volume e $\overline{d\vec{l}}$ rappresenta la media degli spostamenti $d\vec{l}_i$. Dividendo per dt, si ha:

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = nq \frac{\overline{d\vec{l}}}{dt} = nq\vec{v}_d$$

dove $\vec{v}_d = \frac{\overline{d\vec{l}}}{dt}$ rappresenta la velocità media delle cariche (velocità di deriva o di «drift»). Confrontando questa relazione con la definizione [IV.5] di densità di corrente, vediamo che la derivata $\partial\vec{P}/\partial t$ della polarizzazione elettrica (momento elettrico per unità di volume) rappresenta appunto la densità di corrente che accompagna il processo di generazione del momento di dipolo elettrico per unità di volume $\vec{P}(t)$.

IX.3. Equazione delle onde elettromagnetiche

Consideriamo un mezzo dielettrico illimitato, isotropo e omogeneo: il campo elettromagnetico in tale mezzo è allora descritto dalle [IX.7]. Supponiamo inoltre che il dielettrico sia ovunque elettricamente neutro (assenza

di cariche localizzate: $\rho = 0$); se si tratta di un dielettrico perfetto (e dunque in particolare perfettamente isolante, dotato cioè di resistività elettrica infinita) sappiamo che è parimenti $\vec{J} = 0$ (assenza di correnti macroscopiche). In tutto il dielettrico, le equazioni di Maxwell [IX.7] divengono allora nel nostro caso:

Mezzo omogeneo e isotropo infinito

Assenza di cariche e di correnti localizzate

$$\begin{cases} \text{I)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & \text{II)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{III)}\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{IV)}\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon\mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{[IX.13]}$$

rot rot = $-\nabla^2$ + grad div

Applichiamo l'operatore rotore alla terza di queste equazioni. Ricordando l'identità matematica $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$, e tenendo conto che per la prima delle [IX.13] è $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, si ottiene

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Se confrontiamo questa relazione con la derivata temporale della quarta delle [IX.13], otteniamo

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Una equazione del tutto identica è soddisfatta anche da $\vec{B}$, come si verifica facilmente applicando l'operatore rotore alla quarta delle [IX.13] e confrontando con la derivata temporale della terza; per cui valgono in definitiva le equazioni

Equazioni delle onde elettromagnetiche

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \qquad \text{[IX.14]}$$

Osserviamo che benché queste equazioni costituiscano 6 equazioni scalari (quante sono le equazioni linearmente indipendenti fra le [IX.13]), esse non sono equivalenti alle [IX.13] stesse. Infatti le [IX.14] sono state ottenute dalle [IX.13] applicando l'operatore di rotore: dunque se $\vec{E}$ è una soluzione delle [IX.13], le [IX.14] sono soddisfatte anche da $\vec{E} + \vec{E}'$, dove $\vec{E}'$ è un qualunque campo irrotazionale ($\vec{\nabla} \times \vec{E}' = 0$). Per conseguenza le [IX.14] ammettono anche soluzioni spurie non solenoidali (cioè a divergenza non nulla). La solenoidalità delle soluzioni – che risulta automatica se si risolvono direttamente le [IX.13] – deve essere imposta come condizione aggiuntiva se si parte dalle [IX.14]; e ciò si fa affiancando le [IX.13] stesse alle [IX.14].

Queste equazioni sono dette *equazioni delle onde elettromagnetiche*: abbiamo già visto nel primo volume (e lo rivedremo nel prossimo paragrafo) che la soluzione di una equazione del tipo delle [IX.14] è rappresentata da onde che si propagano con velocità $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Osservazione. Solo nel vuoto tutte le onde e.m. hanno la stessa velocità.

Osservazione. Nei dielettrici, si ha $\mu \simeq \mu_0$. L'ipotesi che qui stiamo facendo, che sia $\varepsilon\mu$ = costante, equivale dunque a supporre che sia costante ε; ovvero che sia costante la suscettività elettrica χ_E del materiale definita dalla relazione $\vec{P} = \chi_E \vec{E}$, dove $\vec{P}$ è la polarizzazione elettrica. Vedremo nel par. IX.6 che mentre è ragione-

vole supporre che χ_E sia indipendente dal modulo di $\vec{E}$, essa dipende in realtà dalla sua frequenza. Ne risulterà per conseguenza che ogni componente armonica di un'onda elettromagnetica si propaga a velocità diversa: quando non si tratti di un'onda monocromatica, ne risulta deformata la forma dell'onda stessa. Trascurare questo effetto – come noi faremo per ora – equivale a supporre che le armoniche coinvolte nell'onda abbiamo frequenze abbastanza prossime perché le loro velocità differiscano di poco.

Nei dielettrici reali, la velocità delle onde e.m. dipende dalla loro frequenza.

Prima di proseguire, ricordiamo alcune definizioni e nomenclature relative alle onde.

Una funzione di x, t $f(x, t)$ rappresenta un'onda di ampiezza costante che si propaga lungo l'asse delle x se in essa la dipendenza dalla coordinata x e dal tempo t compare solo nella combinazione $\xi = x \mp \mathrm{v}t$:

$$f(x, t) = f(\xi) = f(x \mp \mathrm{v}t) \qquad \text{[IX.15]}$$

Funzione rappresentativa di un'onda

con v costante positiva. Vedremo più avanti (eq. [IX.36]) come questa espressione si generalizza nel caso che la direzione di propagazione non coincida con uno degli assi coordinati. L'onda si dice *progressiva* o *regressiva* a seconda che nella $\xi = x \mp \mathrm{v}t$ compaia il segno $-$ o il segno $+$.

Onda progressiva
Onda regressiva

Il motivo per cui la [IX.15] rappresenta un'onda è il seguente: se consideriamo la f come funzione della variabile ξ, essa definisce un ben definito «profilo» $f(\xi)$; e tale profilo trasla senza cambiare forma lungo l'asse x con velocità $\pm$ v. Infatti consideriamo un certo valore $\bar{\xi} = \bar{x} \mp \mathrm{v}\bar{t}$ della variabile ξ: all'istante $\bar{t} + \Delta t$, lo stesso valore di $\bar{\xi}$ si presenta non più in $\bar{x}$, ma in $\bar{x} + \Delta x$ purché Δx sia legato a Δt dalla relazione

$$\bar{x} \mp \mathrm{v}\bar{t} = (\bar{x} + \Delta x) \mp \mathrm{v}(\bar{t} + \Delta t) = \bar{x} \mp \mathrm{v}\bar{t} + \Delta x \mp \mathrm{v}\Delta t$$

da cui segue

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \pm\ \mathrm{v} \qquad \text{[IX.16]}$$

Nella maggior parte dei fenomeni fisici (se si esclude il fenomeno ondulatorio su una corda vibrante) la propagazione ondosa è un fenomeno tridimensionale (o bidimensionale: ad esempio onde su un liquido, o su una membrana). Si chiama allora *fronte d'onda* il luogo dei punti in cui, ad un fissato istante, la variabile ξ assume lo stesso valore. Un'*onda* bidimensionale si dice *rettilinea o circolare* (ad esempio) se i suoi fronti d'onda sono rettilinei o circolari. Analogamente un'*onda* tridimensionale si dice *piana* se i suoi fronti d'onda (che, come per ogni onda tridimensionale, sono rappresentati da superfici) sono piani; si dice *onda sferica* se i suoi fronti d'onda sono superfici sferiche; ecc.

Fronte d'onda

Onde piane e onde sferiche

Ad esempio, se considerata come un'onda nello spazio, la [IX.15] rappresenta un'onda piana: l'argomento ξ, essendo indipendente da y e z, fissati x e t assume infatti lo stesso valore non solo per $y = z = 0$ (sull'asse x), ma anche per qualunque altro valore di y e z; e dunque su tutto il piano perpendicolare all'asse x passante per il valore di x considerato.

Se la $f(\xi)$ è una funzione periodica del suo argomento, l'onda è detta *onda periodica*. In particolare, sono periodiche le *onde sinusoidali*, cui per

Onda periodica
Onde sinusoidali

rendere adimensionale l'argomento si dà usualmente una delle seguenti espressioni fra di loro equivalenti

A ampiezza
φ fase

$$f(x,t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \varphi\right] = A \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v} - t\right) + \varphi\right] = \\ = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi\right] = A \sin(kx - \omega t + \varphi) \quad \text{[IX.17]}$$

Periodo T
Lunghezza d'onda λ

Considerata la definizione del suo argomento $\xi = x - vt$, un'onda periodica (come per un'onda sinusoidale risulta evidente dalla [IX.17]) è periodica sia nella variabile x (fissato t) che nella variabile t (fissato x). Il *periodo* temporale T e quello spaziale λ (*lunghezza d'onda*) sono legati dalla relazione

$$\lambda/T = v \quad \text{[IX.18]}$$

Frequenza $\nu = 1/T$
Pulsazione $\omega = 2\pi\nu$
Numero d'onda $k = 2\pi/\lambda$

Si definiscono per un'onda sinusoidale i seguenti parametri addizionali (usati nella [IX.17]): $\nu = 1/T$ (*frequenza*); $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ (*pulsazione*); $k = 2\pi/\lambda$ (*numero d'onda*). In termini di questi parametri, la [IX.18] può essere scritta nelle seguenti forme fra di loro equivalenti:

$$v = \lambda/T = \lambda\nu = \omega/k \quad \text{[IX.18.a]}$$

In un'onda sinusoidale (che naturalmente, per opportuna scelta della fase iniziale φ può essere scritta anche come onda cosinusoidale) l'argomento $\xi = kx - \omega t + \varphi$ viene anche detto fase dell'onda. Per come è stata definita, la velocità [IX.16] – che è la velocità di un qualunque fronte d'onda – non è altro che la velocità con cui si muove la fase dell'onda. Essa è detta infatti anche *velocità di fase*. Per onde diverse da un'onda monocromatica, è possibile definire anche altre velocità (velocità di gruppo). Una espressione del tipo:

Velocità di fase

$$f(x,t) = \beta(x) f(x - vt) \quad \text{[IX.19]}$$

Onda che si attenua

dove $\beta(x)$ è una funzione decrescente della x, rappresenta un'*onda che si attenua* via via che si propaga (via via che aumenta il percorso x da essa compiuto).

In forma più compatta, le equazioni delle onde [IX.14] possono essere scritte anche come

$$\Box \vec{E} = 0 \qquad \Box \vec{B} = 0 \quad \text{[IX.14.a]}$$

Dalambertiano $\Box$

dove l'operatore $\Box$ detto *dalambertiano* (così come ∇^2 è detto anche laplaciano, ed è indicato con Δ) è definito come:

$$\Box = \nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{[IX.20]}$$

Osserviamo che l'operatore dalambertiano $\Box$ è un operatore lineare:

$$\Box\,(a_1 F_1 + a_2 F_2) = a_1 \Box F_1 + a_2 \Box F_2$$

(con a_1, a_2 costanti; F_1, F_2 funzioni di x, y, z, t). Le [IX.14.a] (così come le [IX.14], di cui le [IX.14.a] non sono altro che una diversa scrittura) rappresentano dunque,

ciascuna, tre *equazioni differenziali* (alle derivate parziali nelle variabili x, y, z, t) *lineari e omogenee*. Le loro soluzioni soddisfano dunque il *principio di sovrapposizione*: ogni combinazione lineare di due o più soluzioni rappresenta anch'essa una soluzione.

L'equazione delle onde è lineare e omogenea

Principio di sovrapposizione

Per conseguenza, esse possono essere risolte mediante *sviluppo in serie lineare*: in particolare, mediante *sviluppo in serie di Fourier*. Pertanto, limitarsi a considerare, come noi sostanzialmente faremo, soluzioni sinusoidali (o soluzioni esponenziali a esponente puramente immaginario) non rappresenta una perdita di generalità. Per dare al dalambertiano una forma più compatta e più simmetrica, è usuale (specie negli sviluppi relativistici, cui dedicheremo qualche spazio più avanti) introdurre il quadrivettore spazio-tempo, seguendo notazioni da noi già introdotte nel primo volume:

Soluzione per serie

$$\underset{\sim}{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x, y, z, vt) \quad (v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}) \tag{IX.21}$$

Ricordiamo che il quadrato di un quadrivettore è definito, secondo le notazioni da noi adottate, come

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \tag{IX.22}$$

In termini del quadrivettore spazio-tempo, l'operatore dalambertiano è dunque esprimibile nella forma compatta

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \tag{IX.23}$$

Pur senza ricavarla, forniamo anche l'espressione dell'equazione delle onde in coordinate polari (sferiche) anziché in coordinate cartesiane ortogonali. Se f è una qualunque funzione (derivabile due volte) delle coordinate (e del tempo), espressa in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

il suo laplaciano assume la forma, che già abbiamo dato nel capitolo II (eq. [II.58]):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right] \tag{IX.24}$$

Questa espressione, sostituita nelle [IX.14], consente di esprimere l'equazione delle onde relativa a ciascuna componente del campo elettromagnetico in coordinate sferiche anziché in coordinate cartesiane.

Applicheremo questa forma della equazione delle onde a un caso semplice notevole nel paragrafo IX.5.

IX.4. Onde elettromagnetiche piane

L'equazione delle onde [IX.14] è una equazione differenziale alle derivate parziali; come tale, le sue soluzioni sono determinate a meno di funzioni arbitrarie, che possono essere ricavate solo imponendo le condizioni al contorno e le condizioni iniziali.

La configurazione delle condizioni al contorno cui corrisponde l'espressione più semplice per le soluzioni è una configurazione piana (ad esempio ortogonale all'asse x). In questo caso (*caso di onda piana*) tutte le componenti dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono indipendenti da y e z: ad ogni istante, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ hanno lo stesso valore in tutti i punti di ogni piano ortogonale all'asse x. Fisicamente, questa condizione non si verifica mai esattamente nella pratica; tuttavia ad essa ci si approssima in molti casi (*approssimazione di onda piana*), in particolare quando si sia interessati al campo in una porzione di spazio piccola, molto lontana dalla sorgente (approssimazione di sorgente puntiforme).

Caso di onda piana

Approssimazione di onda piana

Nel caso di onda piana, tutte le derivate dei campi rispetto a y e z sono nulle; e il laplaciano al primo membro delle [IX.14] si riduce alla sola derivata seconda rispetto a x ($\nabla^2 \to \partial^2/\partial x^2$). Ciascuna delle sei componenti del campo elettromagnetico $\vec{E}$, $\vec{B}$ soddisfa la stessa equazione, del tipo (equazione di D'Alambert):

Equazione di D'Alambert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{[IX.25]}$$

La soluzione generale di questa equazione è del tipo:

$$\varphi(x, t) = f_1(x - \mathrm{v}t) + f_2(x + \mathrm{v}t) \qquad (\mathrm{v} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}) \qquad \text{[IX.26]}$$

dove f_1 e f_2 sono due funzioni arbitrarie (derivabili due volte rispetto all'argomento $\xi = x \mp \mathrm{v}t$), cioè la soluzione generale è la somma di un'onda progressiva e di un'onda regressiva propagantesi con velocità v lungo l'asse x. La verifica che f_1 ed f_2 (e dunque anche la loro somma) costituiscono soluzione è immediata. Sia per f_1 che per f_2 si ha infatti, come è immediato verificare:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

da cui segue che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\mathrm{v}^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ è identicamente nullo; e dunque la [IX.26] soddisfa la [IX.25] alla sola condizione che sia

$$\mathrm{v} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad \text{[IX.27]}$$

Se ci troviamo nel vuoto, la velocità v delle onde elettromagnetiche (in particolare della luce) viene indicata con c; la [IX.27] diviene:

Velocità della luce in termini di ε_0 e μ_0

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \simeq 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \qquad \text{[IX.28]}$$

in buon accordo con il valore sperimentale. In un dielettrico perfetto qualunque, avremo:

$$\mathrm{v} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = 1/(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}) = c/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \qquad \text{[IX.29]}$$

Il rapporto

$$n = c/\mathrm{v} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \qquad \text{[IX.30]}$$

fra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce in un mezzo materiale trasparente è detto *indice di rifrazione* di quel materiale. La [IX.29]

Indice di rifrazione

mostra che le equazioni di Maxwell prevedono per l'indice di rifrazione un valore pari a:

$$n \equiv c/v = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \simeq \sqrt{\varepsilon_r} \qquad \text{[IX.31]}$$

$n \simeq \sqrt{\varepsilon_r}$

($\mu_r \simeq 1$ nei dielettrici perfetti). Anche la previsione [IX.31] in molti casi risulta ben verificata sperimentalmente.

Ricaviamo ora alcune ulteriori proprietà delle onde elettromagnetiche piane utilizzando le equazioni di Maxwell [IX.13] cui esse devono soddisfare. Ricordando che tutte le componenti dei campi sono indipendenti da y e z (e dunque sono nulle le rispettive derivate parziali), le [IX.13] divengono nel nostro caso:

$$\text{I)}\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad\Rightarrow\quad \partial E_x/\partial x = 0 \qquad \text{a)}$$

$$\text{II)}\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad\Rightarrow\quad \partial B_x/\partial x = 0 \qquad \text{b)}$$

$$\text{III)}\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \Rightarrow \begin{cases} \partial B_x/\partial t = 0 & \text{c)} \\ \partial E_z/\partial x = \partial B_y/\partial t & \text{d)} \\ \partial E_y/\partial x = -\,\partial B_z/\partial t & \text{e)} \end{cases}$$

$$\text{IV)}\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon\mu\,\partial\vec{E}/\partial t \Rightarrow \begin{cases} \partial E_x/\partial t = 0 & \text{f)} \\ \partial B_z/\partial x = -\mu\varepsilon\,\partial E_y/\partial t & \text{g)} \\ \partial B_y/\partial x = \mu\varepsilon\,\partial E_z/\partial t & \text{h)} \end{cases}$$

Dalla a) e dalla f), e dalla b) e dalla c), vediamo che E_x e B_x sono costanti nel tempo e uniformi nello spazio. Esse pertanto non contribuiscono al fenomeno della *propagazione* del campo, e noi qui le considereremo nulle. In ogni caso, alle onde elettromagnetiche non dà alcun contributo la componente del campo parallela alla direzione di propagazione: in altri termini, *le onde elettromagnetiche sono puramente trasversali.*

Le onde elettromagnetiche sono trasversali

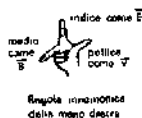
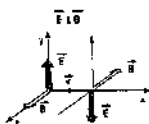
Osserviamo ora le relazioni d) ed e), nonché le g) ed h). Da esse vediamo che se l'onda ha una componente E_y, deve avere anche una componente B_z (e viceversa); e se ha una componente E_z, deve avere anche una componente B_y (e viceversa). D'altra parte, per la linearità delle equazioni [IX.13], ogni combinazione lineare di soluzioni è soluzione; e se si sovrappongono due soluzioni, una con $\vec{E}$ diretto secondo l'asse y e una con $\vec{E}$ diretto secondo l'asse z, si può ottenere qualunque soluzione (con $\vec{E}$ diretto in una direzione $\hat{n}$ qualunque nel piano yz, eventualmente variabile con x e t: $\hat{n} = \hat{n}(x, t)$). Non si ha dunque alcuna perdita di generalità se si considera un'onda il cui campo $\vec{E}$ sia orientato in direzione fissa, ad esempio secondo l'asse y ($E_z \equiv 0$): una tale onda si dice possedere *polarizzazione piana o lineare* (secondo l'asse y). La più generale delle onde potrà essere ottenuta come sovrapposizione di una onda polarizzata secondo y e di una polarizzata secondo z. Se $E_z = 0$ (onda polarizzata con $\vec{E}$ secondo l'asse y), le relazioni d) ed h) divengono

Onda polarizzata piana o lineare

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

Dunque la componente B_y non dipende né da x né da t: essa è uniforme e costante, e – così come abbiamo visto accadere per B_x ed E_x – essa non dà

indice come $\vec{E}$ — medio come $\vec{B}$ — pollice come $\vec{v}$

Regola mnemonica della mano destra

alcun contributo all'onda. Se il campo elettrico è diretto secondo y, il campo magnetico è diretto secondo z: *in un'onda elettromagnetica, campo elettrico e magnetico sono fra di loro ortogonali* (oltreché trasversali, cioè ortogonali alla direzione di propagazione).

Le ultime equazioni di Maxwell che ci restano da utilizzare sono la e) e la g):

$$\text{e)} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad\qquad \text{g)} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Queste contengono una rilevante informazione concernente le ampiezze relative dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Ricordando infatti che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono vettori diretti rispettivamente come y e come z, si ha (ponendo $\xi = x \mp \mathrm{v}t$):

$$E_y = E_y(x \mp \mathrm{v}t) = E_y(\xi) \qquad B_z = B_z(x \mp \mathrm{v}t) = B_z(\xi)$$

col segno − o + a seconda che si tratti di onda progressiva o regressiva.

L'equazione c) diviene pertanto:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{dE_y}{d\xi} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{dB_z}{d\xi}\cdot(\mp \mathrm{v})$$

ovvero:

$$\frac{dE_y}{d\xi} = \pm \mathrm{v}\cdot\frac{dB_z}{d\xi}$$

col segno + o − a seconda che l'onda sia progressiva o regressiva. Va osservato che (tenendo conto che $\mu\varepsilon = 1/\mathrm{v}^2$) anche l'equazione g) ci porterebbe allo stesso risultato. Questa relazione non è altro che una equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che integrata per semplice quadratura ci dà $E_y = \pm \mathrm{v}B_z +$ costante; dove la costante, in base agli stessi argomenti già usati, può essere posta pari a zero. In definitiva:

$\frac{E}{B} = \pm \mathrm{v}$

$$\frac{E_y}{B_z} = \pm \mathrm{v}$$

Ricordando che $\vec{E}$ è diretto secondo y e B secondo z, il modulo del rapporto E_y/B_z rappresenta il rapporto dei moduli E e B di $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Tenuto conto di ciò, e del risultato più sopra stabilito a proposito delle direzioni relative di $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{\mathrm{v}}$, possiamo sintetizzare i risultati da noi ottenuti a proposito dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in un'onda piana nelle relazioni:

Relazioni fra $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in un'onda piana

$$\vec{E} = \vec{B}\times\vec{\mathrm{v}} \qquad\qquad E/B = \mathrm{v} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad [\text{IX.32}]$$

La seconda delle [IX.32] viene usualmente espressa in termini di E ed H anziché in termini di E e B. Sostituendo infatti in essa $B = \mu H$, si ha

Impedenza caratteristica del materiale

$$E/H = \sqrt{\mu/\varepsilon} = Z \qquad [\text{IX.33}]$$

La quantità $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ ha le dimensioni di una resistenza elettrica (o di una impedenza) e viene detta infatti *impedenza caratteristica* del materiale. Nel

caso che stiamo trattando di onde elettromagnetiche nel vuoto l'impedenza caratteristica vale

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377\ \Omega \qquad \text{[IX.33.a]}$$

Impedenza caratteristica del vuoto

Vediamo ora quale espressione assume l'onda piana se essa, anziché propagarsi lungo l'asse x, si propaga in una direzione generica $\hat{n}$ ($\hat{n}$ è ora il versore normale ai fronti d'onda). Per fare ciò ricaviamo la relazione che intercorre fra le coordinate di un punto generico P in due diversi sistemi di riferimento: il sistema $\Sigma \equiv Oxyz$ (i cui versori degli assi sono $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$), e il sistema $\Sigma' \equiv Ox'y'z'$ (con versori $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$) la cui origine è coincidente con l'origine O di Σ, ma il cui orientamento è diverso rispetto all'orientamento di Σ.

Sia $\vec{r}$ il vettore posizione di P; vettore che scritto in termini dei vettori componenti nel sistema Σ diviene:

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \qquad \text{[IX.34]}$$

Per ottenere la relazione fra le coordinate x', y', z' di P in Σ' e le sue coordinate x, y, z in Σ, basta proiettare la [IX.34] rispettivamente sugli assi x', y', z'; il che si ottiene moltiplicandola scalarmente rispettivamente per $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$:

$$\begin{aligned} x' &= \hat{i}' \cdot \vec{r} = (\hat{i}' \cdot \hat{i})\, x + (\hat{i}' \cdot \hat{j})\, y + (\hat{i}' \cdot \hat{k})\, z \\ y' &= \hat{j}' \cdot \vec{r} = (\hat{j}' \cdot \hat{i})\, x + (\hat{j}' \cdot \hat{j})\, y + (\hat{j}' \cdot \hat{k})\, z \equiv |R| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ z' &= \hat{k}' \cdot \vec{r} = (\hat{k}' \cdot \hat{i})\, x + (\hat{k}' \cdot \hat{j})\, y + (\hat{k}' \cdot \hat{k})\, z \end{aligned} \qquad \text{[IX.35]}$$

dove con $|R|$ abbiamo indicato la *matrice delle rotazioni* che avevamo già introdotto nel primo volume (parte prima, eq. [III.14]) e che risulta definita dall'ultimo passaggio delle [IX.35]. Per definizione di prodotto scalare, il prodotto $(\hat{i}' \cdot \hat{i})$ rappresenta il coseno dell'angolo fra l'asse x e l'asse x', ecc.

Matrice delle rotazioni

Se ora, nel sistema di riferimento $\Sigma \equiv Oxyz$ abbiamo un'onda piana che si propaga nella direzione $\hat{n}$ qualunque, assumiamo tale direzione come asse x' per il sistema $\Sigma' \equiv Ox'y'z'$. In quest'ultimo riferimento l'onda piana ha la forma [IX.15] per l'onda progressiva:

$$f(x', t) = f(x' - \mathrm{v}\, t)$$

Sostituendo al posto di x' la sua espressione nel riferimento $\Sigma = Oxyz$ (cioè usando la prima delle [IX.35] con $\hat{n}$ al posto di $\hat{i}'$) abbiamo la forma assunta dall'onda in quest'ultimo riferimento:

$$f(x, y, z, t) = f(\hat{n} \cdot \vec{r} - \mathrm{v}\, t) = f(\cos\alpha\, x + \cos\beta\, y + \cos\gamma\, z - \mathrm{v}\, t) \qquad \text{[IX.36]}$$

Onda piana propagantesi nella direzione $\hat{n}$ generica

dove $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sono i coseni direttori della direzione di propagazione $\hat{n}$ nel sistema $\Sigma = Oxyz$.

Esempio

Onda monocromatica

E.IX.2. *Scrivere l'espressione di un'onda elettromagnetica monocromatica che si propaghi nel vuoto in direzione $\hat{n} \equiv (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, in modo che essa goda di tutte le proprietà che abbiamo visto in questo paragrafo (sia $\mathrm{v} = 4 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$). Supponiamo che l'onda sia polarizzata in direzione dell'asse z.*

Con «onda monocromatica» si intende un'onda sinusoidale (o cosinusoidale) di frequenza costante e lunghezza (ovvero durata) infinita: in pratica, un «treno d'onda» di durata Δt molto maggiore del periodo T. Tenendo conto dell'espressione [IX.17] di un'onda sinusoidale (in cui scegliamo per semplicità la fase iniziale $\varphi = -\pi/2$, cosicché $\sin(\xi + \varphi) = \cos \xi$) e della sostituzione [IX.36] per esprimere un'onda che si propaga in direzione diversa da quella dell'asse x, avremo:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(k\hat{n}\cdot\vec{r} - \omega t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(k\hat{n}\cdot\vec{r} - \omega t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \end{cases}$$

Vettore d'onda

dove, come è usuale, abbiamo definito il vettore $\vec{k}$ (detto *vettore d'onda*) mediante la relazione $\vec{k} = \hat{n}\,k = \hat{n}\,\dfrac{2\pi}{\lambda}$ ($\hat{n}$ versore della direzione di propagazione). Nel caso del nostro esempio abbiamo:

pulsazione dell'onda: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 4 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$.

velocità dell'onda : $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s (velocità della luce nel vuoto).

lunghezza d'onda : $\lambda = cT = c/\nu = 0{,}75\ \mu\mathrm{m}$ (luce rossa).

vettore d'onda : $\vec{k} = \dfrac{2\pi\hat{n}}{\lambda} = \dfrac{\omega}{c}\,\hat{n} \simeq 8{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Direzione di $\vec{E}_0$: $\vec{E}_0 \equiv (0, 0, E_0)$ (secondo l'asse z).

Direzione di $\vec{B}_0$: $\vec{B}_0 \equiv \left(\dfrac{B_0}{\sqrt{2}}, -\dfrac{B_0}{\sqrt{2}}, 0\right)$ (ortogonale a $\hat{n}$ e a $\vec{E}_0$).

Rapporto B_0/E_0 : $B_0/E_0 = 1/c = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \simeq 3{,}3 \cdot 10^{-9}$ s/m.

Proprietà di un'onda elettromagnetica monocromatica

Nell'esempio E.IX.2 abbiamo visto le *proprietà di un'onda elettromagnetica monocromatica* nel vuoto; le stesse proprietà valgono anche per un'onda elettromagnetica monocromatica in un dielettrico perfetto (omogeneo ed isotropo), pur di sostituire ε, μ al posto di ε_0, μ_0.

Considerata la grande importanza delle onde piane monocromatiche riassumiamo qui le loro proprietà:

a) Un'onda elettromagnetica monocromatica viene scritta nella forma:

Espressione dell'onda monocromatica piana

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \end{cases} \qquad \text{[IX.37]}$$

Non di rado si dà alle [IX.37] la *forma esponenziale* (con esponente immaginario puro: $j \equiv$ unità immaginaria):

Forma esponenziale

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \end{cases} \qquad \text{[IX.37.a]}$$

sottintendendo che le grandezze fisicamente significative sono espresse dalla parte reale delle [IX.37.a].

Vettore d'onda $\vec{k}$

b) Il *vettore d'onda* $\vec{k}$, che è diretto secondo la direzione di propagazione, ha modulo $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$, dove $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ è la velocità di propagazione dell'onda.

c) $\vec{E}$ e $\vec{B}$, che sono fra di loro ortogonali e ortogonali alla direzione di propagazione $\hat{n} = \vec{k}/k = \vec{v}/v$, soddisfano la relazione

Rapporto E/B

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}; \quad \vec{E}_0 = \vec{B}_0 \times \vec{v} \quad E/B = E_0/B_0 = v \qquad \text{[IX.32]}$$

Essi oscillano fra di loro in fase e il rapporto fra le loro ampiezze vale $E_0/B_0 = v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$; nel sistema SI tale rapporto è espresso da un numero molto grande (dell'ordine di 10^8, espresso in m/s). Va tuttavia osservato che questo confronto numerico, essendo fra grandezze caratterizzate da diverse dimensioni, non ha in realtà alcun significato fisico.

Per confrontare in maniera significativa campo elettrico e magnetico in un'onda, confrontiamo una loro caratteristica omogenea. Punto per punto e istante per istante la densità di energia associata al campo elettrico e al campo magnetico, per la [III.42] e la [VII.59] vale rispettivamente:

Densità di energia del campo elettrico e del campo magnetico

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad\qquad u_B = \frac{B^2}{2\mu}$$

Sostituendo in u_B al posto di B la sua espressione $B = E/v = E\sqrt{\varepsilon\mu}$ tratta dalla [IX.32], otteniamo:

$$u_B = \frac{1}{2}B^2/\mu = \frac{1}{2}\frac{E^2\varepsilon\mu}{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = u_E \qquad \text{[IX.38]}$$

In un'onda elettromagnetica, punto per punto e istante per istante *la densità di energia associata al campo elettrico è uguale alla densità di energia associata al campo magnetico*. Osserviamo che questa relazione di uguaglianza vale in realtà non solo per un'onda piana monocromatica, ma del tutto in generale per tutte le onde elettromagnetiche.

Torneremo diffusamente sugli aspetti energetici delle onde elettromagnetiche nel paragrafo IX.9.

IX.5. Onde sferiche

Onde sferiche

Vediamo ora, brevemente, quale espressione assuma un'onda $F(\vec{r},t)$ – e in particolare un'onda elettromagnetica – quando le condizioni al contorno e la configurazione delle sorgenti siano tali da imporre ad essa simmetria sferica.

Partiamo dall'equazione delle onde. Ciascuna delle [IX.14] ha la forma:

$$\nabla^2 F - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{[IX.39]}$$

Se l'onda è sferica, la sua dipendenza dalle variabili si riduce a

$$F(\vec{r},t) = F(r,t)$$

In altri termini, in coordinate polari essa risulta indipendente da θ, φ. Nell'espressione [IX.24] del laplaciano, l'unico termine che sopravvive è

quello relativo alla derivata rispetto a r; la [IX.39] diviene pertanto:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0$$

È immediato verificare che

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF);$$

per cui la precedente equazione diviene:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0$$

ovvero, tenendo conto che qualunque funzione della sola r commuta con l'operatore di derivazione rispetto a t (e dunque in particolare $r\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial^2(rF)}{\partial t^2}$):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF)-\frac{\varepsilon\mu}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rF)=0$$

e moltiplicando per r:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rF)=0$$

Dunque vediamo che la funzione $rF(r,t)$ soddisfa l'equazione monodimensionale delle onde [IX.25] (equazione di D'Alambert) nella variabile r. La soluzione sarà pertanto del tipo:

$$rF(r,t)=f_1(r-\mathrm{v}t)+f_2(r+\mathrm{v}t)\quad(\mathrm{v}=1\sqrt{\varepsilon\mu})$$

sarà cioè la somma di un'onda progressiva (dal centro verso l'infinito) e di un'onda regressiva centripeta (dall'infinito verso il centro). Dunque l'espressione dell'onda sferica $F(r,t)$ sarà del tipo:

Espressione dell'onda sferica

$$F(r,t)=\frac{1}{r}[f_1(r-\mathrm{v}t)+f_2(r+\mathrm{v}t)]\quad(\mathrm{v}=1/\sqrt{\varepsilon\mu})\qquad\text{[IX.40]}$$

L'onda sferica si attenua come $1/r$

Come vediamo, *le onde sferiche hanno una ampiezza che si attenua come $1/r$ all'aumentare di r.* Vedremo a suo tempo che proprio grazie a questa loro caratteristica le onde elettromagnetiche sferiche soddisfano il principio di conservazione dell'energia.

Osserviamo anche che se si considera una piccola porzione di spazio molto distante dal centro dell'onda sferica, il fattore $1/r$ può essere considerato praticamente costante; e l'onda sferica può essere allora approssimata con un'onda piana. In tutte le considerazioni che faremo nel seguito, le esemplificazioni saranno fatte di norma riferendoci a onde piane.

IX.6. Onde elettromagnetiche nei dielettrici. Dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza dell'onda

Nei precedenti paragrafi abbiamo trattato le onde elettromagnetiche nei dielettrici ipotizzando che la loro velocità v (e dunque anche l'indice di rifrazione $n = c/v$ del materiale) fosse indipendente dalla frequenza. Tenuto conto della [IX.31], affinché ciò accada è necessario che la costante dielettrica ε del materiale e la sua permeabilità magnetica μ siano completamente indipendenti dalle caratteristiche del campo elettrico applicato al materiale, e in particolare dalla sua frequenza $\nu = \omega/2\pi$ se si tratta di un campo sinusoidale. In realtà, solo nel vuoto si ha che ε e μ (pari rispettivamente a ε_0 e μ_0) *sono rigorosamente costanti*; nei *dielettrici*, mentre $\mu \simeq \mu_0$ può essere comunque considerato costante, ε, come abbiamo già accennato, dipende dalla frequenza.

L'approssimazione adottata nei precedenti paragrafi è dunque valida solo se lo spettro di frequenze presenti nello sviluppo di Fourier dell'onda occupa un intervallo $\Delta\nu$ di frequenze relativamente stretto: $\Delta\nu/\nu \ll 1$. In realtà, nemmeno questa condizione è a stretto rigore sufficiente, considerato che intorno a particolari frequenze l'andamento dell'indice di rifrazione come funzione della frequenza, $n(\nu)$, può subire variazioni molto brusche (dispersione anomala).

Ci proponiamo ora, per l'appunto, di discutere quale dipendenza da ν (o da ω) ci si aspetti per ε_r (e quindi anche per n, che è legato a ε_r dalla [IX.31], $n \simeq \sqrt{\varepsilon_r}$).

In elettrostatica, il punto di partenza dei nostri ragionamenti per il calcolo di ε_r era stata la considerazione che la polarizzabilità α (cioè il coefficiente di proporzionalità fra il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ acquisito da un atomo, e il campo elettrico locale $\vec{E}_l$ ad esso applicato) poteva essere considerata come una costante, indipendente cioè da $\vec{E}_l$. Ciò a sua volta discendeva dal fatto che, all'equilibrio, deve essere nulla la somma della forza elettrica $\vec{F}_E$ responsabile della deformazione ($\vec{F}_E = q\vec{E}_l = Ze\vec{E}_l$, con e carica dell'elettrone e Z numero atomico dell'atomo) e della forza di richiamo $\vec{F}_R$ della «nuvola elettronica» verso la posizione di equilibrio; forza di richiamo che può essere schematizzata come una forza elastica ($\vec{F}_R = -k\vec{r}$; vedi esempio E.III.1). Dunque

$$-k\vec{r} + Ze\vec{E}_l = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \frac{Ze}{k}\vec{E}_l$$

da cui

$$\vec{p} = Ze\,\vec{r} = (Ze)^2\,\vec{E}/k \quad \Rightarrow \quad \alpha = (Ze)^2/k \qquad [IX.41]$$

Polarizzabilità statica

Se però il campo elettrico, anziché essere costante, è oscillante come accade in un'onda ($\vec{E}_l(t) = \vec{E}_{0l}e^{j\omega t}$; usiamo l'espressione esponenziale dell'onda, focalizzando la nostra attenzione su una sua componente armonica di pulsazione ω), la carica non subisce una deformazione statica, ma oscilla per azione della forza sinusoidale applicata. L'elongazione istantanea $\vec{r}(t)$ del baricentro C della nuvola elettronica soddisfa l'equazione dell'oscillatore forzato:

Polarizzabilità dinamica

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + k\vec{r} = Ze\,\vec{E}_{0l}e^{j\omega t} \qquad [IX.42]$$

Equazione dell'elongazione della nuvola elettronica

dove $m = Zm_e$ è la massa della nuvola elettronica. Va infatti osservato che, in condizioni dinamiche, alla forza elastica di richiamo $-k\vec{r}$ si aggiunge una forza dissipativa del tipo $-b\dot{\vec{r}}$ (per comodità abbiamo posto $b = m\gamma$) dovuta al fatto che una carica oscillante irraggia energia (*come meglio vedremo nel* paragrafo *IX.15*) nonché all'interazione della nuvola elettronica con gli atomi circostanti.

La [IX.42] ammette una soluzione del tipo $\vec{r}(t) = \vec{R}_0 e^{j\omega t}$. Si ha infatti:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_0 e^{j\omega t} \quad \dot{\vec{r}}(t) = j\omega \vec{R}_0 e^{j\omega t} \quad \ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \vec{R}_0 e^{j\omega t} \qquad \text{[IX.42.a]}$$

Sostituendo nella [IX.42], si ha che $\vec{r}(t) = \vec{R}_0 e^{j\omega t}$ è in effetti soluzione purché sia:

$$\vec{R}_0 = (Ze)\,\vec{E}_{0l}/[m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma)]$$

ovvero:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = (Ze)\,\vec{E}_l(t)/[m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma)] \\ \quad \text{con} \quad \omega_0^2 = k/m \end{cases} \qquad \text{[IX.43]}$$

Segue per la polarizzabilità $\alpha = p/E_l = Ze\, r(t)/E_l(t)$ l'espressione:

Polarizzabilità complessa

$$\alpha = \frac{(Ze)^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma)} \qquad \text{[IX.44]}$$

La polarizzabilità α è dunque un numero complesso, e può essere posta nella forma $\alpha = |\alpha| e^{j\delta}$; dove:

$$|\alpha| = \frac{(Ze)^2}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}, \quad \mathrm{tg}\,\delta = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad \text{[IX.45]}$$

Vediamo che sia il modulo $|\alpha|$ della polarizzabilità che la sua fase δ dipendono dalla pulsazione ω del campo locale $\vec{E}_l$. Per $\omega = 0$ (campo elettrostatico) la [IX.44] si riduce a $\alpha = (Ze)^2/m\omega_0^2$; tenuto conto della seconda delle [IX.43] ($\omega_0^2 = k/m$), riotteniamo la [IX.41] come caso particolare.

Il fatto che la polarizzabilità sia complessa implica che $\vec{r}(t)$ (e dunque anche il momento di dipolo elettrico $\vec{p}(t) = Ze\,\vec{r}(t)$ acquisito per deformazione da ciascun atomo) pur avendo, oltreché la stessa direzione del campo locale $\vec{E}_l$, anche la stessa pulsazione ω, *non* ha al contrario la stessa fase. Considerato infatti che nel metodo simbolico basato sui fasori (esponenziali con esponente complesso; vedi par. VIII.5) le grandezze fisiche sono rappresentate dalla parte reale dei fasori stessi, dalla relazione $\vec{p}(t) = \alpha \vec{E}_l(t)$ fra grandezze complesse segue per le grandezze fisiche

$$Re\,[\vec{p}(t)] = Re\,(\alpha \cdot \vec{E}_l(t)) = |\alpha|\,\vec{E}_{0l} \cos(\omega t + \delta)$$

Il momento elettrico ha dunque rispetto al campo locale $\vec{E}_l(t)$ un ritardo di fase pari a δ.

Vediamo ora quali conseguenze per ε_r e per n seguono dalla [IX.44]. Tenuto conto della [III.26] e della relazione di Clausius-Mossotti [III.19], si ha:

$$\varepsilon_r = \chi + 1 = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0 - N\alpha/3} + 1 = \left(1 + \frac{2N\alpha}{3\varepsilon_0}\right) \Big/ \left(1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}\right) \qquad \text{[IX.46]}$$

Il numero di atomi per unità di volume, che nella [III.26] era stato indicato con n, è stato qui indicato con N ad evitare di confonderlo con l'indice di rifrazione n.

Poiché α è un numero complesso, la [IX.46] mostra che anche ε_r è complesso: e tale risulta anche l'indice di rifrazione $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ (ricordiamo che una radice quadrata di un numero complesso ha come modulo la radice del modulo, e come fase la metà della fase). Dunque

Espressione di n in funzione di α

$$n = \sqrt{\left(1 + \frac{2N\alpha}{3\varepsilon_0}\right) \Big/ \left(1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}\right)} = n_1 - jn_2 \qquad \text{[IX.47]}$$

Abbiamo preferito porre n nella forma $n = n_1 - jn_2$ perché, come vedremo fra breve (eq. [IX.53]), la parte immaginaria di n è negativa, e dunque $n_2 > 0$.

Discutiamo prima quale significato fisico abbia un indice di rifrazione complesso. Il significato della parte reale e del coefficiente dell'immaginario dell'indice di rifrazione risulta evidente scrivendo l'onda elettromagnetica $\bar{E}$ che si propaga nel mezzo nella forma (per semplicità consideriamo un'onda piana propagantesi nella direzione x):

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{E}_0 e^{j\omega(t-x/v)} = \bar{E}_0 e^{j\omega\left(t-\frac{nx}{c}\right)} = \bar{E}_0 e^{j\omega\left(t-(n_1-jn_2)\frac{x}{c}\right)} = \\ &= \bar{E}_0 e^{-\frac{\omega n_2 x}{c}} e^{j\omega\left(t-n_1\frac{x}{c}\right)} \end{aligned} \qquad \text{[IX.48]}$$

Questa rappresenta l'equazione di un'onda che si propaga con velocità $v = c/n_1$ (n_1 = parte reale dell'indice di rifrazione), e la cui ampiezza E_0' si attenua con legge esponenziale:

$$\bar{E}_0' = \bar{E}_0 e^{-\frac{\omega n_2 x}{c}} = \bar{E}_0 e^{-\beta x} \qquad \text{[IX.49]}$$

con $-n_2$ coefficiente dell'immaginario dell'indice di rifrazione.

La quantità $\beta = \frac{\omega n_2}{c}$ è detto *coefficiente di assorbimento* del materiale relativamente a onde e.m. di pulsazione ω.

Coefficiente di assorbimento

Il suo inverso $d = c/\omega n_2$, che ha le dimensioni di una lunghezza, è detto *cammino di attenuazione*, e rappresenta il percorso che l'onda deve compiere nel materiale perché la sua ampiezza si riduca a $1/e$ di quella iniziale. Usualmente si riserva il nome di *indice di rifrazione* alla parte reale n_1 di n; mentre la sua parte immaginaria $-n_2$ viene caratterizzata tramite il coefficiente di assorbimento β.

Cammino di attenuazione

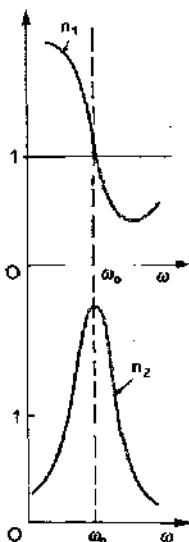
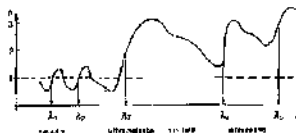
Quanto all'andamento di n_1 ed n_2 in funzione della pulsazione ω, le relative espressioni quali si ottengono sostituendo la [IX.44] nella [IX.47] sono alquanto complicate formalmente, anche se la relativa derivazione è concettualmente immediata. Al solo scopo di comprendere qualitativamente quale sia l'andamento di n_1 e n_2 in funzione di ω, sviluppiamo la [IX.47] al primo ordine nel rapporto $N\alpha/\varepsilon_0$ (nell'ipotesi $N|\alpha|/\varepsilon_0 \ll 1$). Si riconosce facilmente (come risulta ancor più immediatamente utilizzando il passaggio intermedio della [IX.46]) che:

$$n \simeq 1 + \frac{N\alpha}{2\varepsilon_0} \qquad \text{[IX.50]}$$

e sostituendo in questa la [IX.44]:

$$\begin{cases} n_1 = Re(n) = 1 + \dfrac{N(Ze)^2}{2\varepsilon_0 m} \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \\ n_2 = -Im(n) = + \dfrac{N(Ze)^2}{2\varepsilon_0 m} \dfrac{\gamma\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \end{cases} \qquad \text{[IX.51]}$$

L'andamento delle [IX.51] in funzione di ω intorno a ω_0 è tipicamente quello mostrato nelle figure. Vediamo che l'indice di rifrazione n_1 può divenire minore di 1; e ciò implica la previsione che la velocità di fase dell'onda elettromagnetica monocromatica considerata, divenga nel dielettrico – per particolari valori della pulsazione ω dell'onda stessa – maggiore della velocità c della luce nel vuoto: come discuteremo nel paragrafo X.5, questa non costituisce una contraddizione col principio della velocità limite (che è uno dei principi su cui si basa la teoria della relatività di Einstein).

Le [IX.51] rappresentano una approssimazione molto rozza per il calcolo dell'indice di rifrazione, non solo perché si basano sull'ipotesi $N|\alpha|/\varepsilon_0 \ll 1$; ma anche perché l'espressione [IX.45] per α è basata sull'ipotesi che a livello microscopico il materiale sia schematizzabile come un insieme di oscillatori armonici tutti fra di loro identici (caratterizzati dalla stessa pulsazione propria ω_0 e dallo stesso coefficiente di smorzamento γ): cioè sull'ipotesi che il materiale sia costituito da

atomi tutti fra di loro uguali e indipendenti, nei quali la nuvola elettronica si comporti come un sistema rigido.

In realtà per ogni materiale sono possibili diverse frequenze di oscillazione ω_{0k}, ognuna caratterizzata da un suo coefficiente γ_k. L'indice di rifrazione sarà allora rappresentato dalla [IX.47] in cui

Modello a più risonanze

$$\alpha = \sum_k \frac{q_k^2}{m_k(\omega_{0k}^2 - \omega^2 + j\gamma_k\omega)} \qquad \text{[IX.52]}$$

dove q_k e m rappresentano rispettivamente la carica e la massa efficaci di ciascun oscillatore. In corrispondenza di ognuna delle frequenze proprie ω_{0k} si manifesta un andamento risonante del tipo di quello mostrato nelle precedenti figure; andamento che si somma al contributo non risonante degli altri oscillatori. In complesso, l'andamento dell'indice di rifrazione n (parte reale) – che si usa spesso esprimere come funzione della lunghezza d'onda nel vuoto $\lambda = 2\pi c/\omega$ della radiazione monocromatica incidente sul materiale – è del tipo mostrato in figura, in cui sono anche indicati i valori di λ ($\lambda_1, \lambda_2, ...$) in cui si presentano le risonanze. Lontano dalle risonanze, $n(\lambda)$ è una funzione decrescente di λ; in vicinanza delle risonanze si ha invece per $n(\lambda)$ un *andamento crescente* con λ (*dispersione anomala*).

Dispersione anomala

Come vediamo dalla figura, anche il fatto che - specie per piccoli valori di λ (ad esempio $\lambda \leq 0{,}1$ μm) - si presentino valori di $n < 1$ non è limitato al solo modello semplificato basato su una unica risonanza: il fenomeno è previsto anche dai modelli più sofisticati, e si verifica sperimentalmente.

Come risulta dalla figura a lato delle [IX.51], in corrispondenza di ogni frequenza di risonanza, il valore assoluto della parte immaginaria dell'indice di rifrazione ha un massimo a campana cui corrisponde un pronunciato aumento del coefficiente di assorbimento (*riga di assorbimento*).

Righe di assorbimento

Assorbimento molecolare e bande di assorbimento

Specie per elevati valori di λ (ad esempio alcuni μm) oltre all'effetto degli oscillatori elettronici, si presentano evidenti gli effetti dell'*assorbimento molecolare*, dovuto al fatto che anche le molecole vibrano e oscillano, comportandosi come oscillatori con bassa frequenza di risonanza (spettri *vibrazionali* e *rotazionali*). Le relative righe di assorbimento, anche a causa di sovrapposizioni fra risonanze diverse, possono divenire molto larghe (*bande di assorbimento*).

Vedremo a suo tempo che il fatto che l'indice di rifrazione dipenda dalla frequenza, può essere utilizzato per costruire strumenti (*spettrometri*) che consentono di effettuare l'analisi spettrale di onde non monocromatiche.

IX.7. Onde elettromagnetiche nei conduttori

Consideriamo un'onda elettromagnetica incidente su un conduttore omogeneo e indefinito. Per effetto del campo elettromagnetico periodico, gli elettroni «liberi» del conduttore prenderanno a muoversi con moto oscillatorio forzato; e a questo movimento si accompagnano effetti dissipativi. Ricordiamo che quando il campo elettrico applicato al conduttore è costante, il moto delle cariche libere avviene con velocità di deriva (velocità media) costante: tutta l'energia che il campo comunica alle cariche in moto si dissipa in effetti termici (effetto Joule).

Onde elettromagnetiche nei conduttori ohmici

Ci aspettiamo dunque che quando un'onda elettromagnetica si propaga in un conduttore, l'onda si attenui e il conduttore si riscaldi. In effetti, quando un'onda incide su un metallo, essa viene in larga misura riflessa, ma non può penetrare oltre lo strato superficiale del metallo stesso.

Nel caso di un conduttore ohmico, la relazione che lega staticamente la densità di corrente $\vec{J}$ al campo elettrico $\vec{E}$ applicato è la [IV.21]:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad (\sigma \text{ conducibilità elettrica}) \qquad \text{[IX.53]}$$

Trattandosi di una relazione locale (che lega fra di loro solo grandezze calcolate nello stesso punto) ci aspettiamo che questa relazione valga anche in condizioni non stazionarie. L'esperienza conferma questa previsione, anche se in realtà σ può dipendere dalla frequenza (e può non essere puramente reale; vedi par. IX.10). Tenuto conto della [IX.53], la quarta equazione di Maxwell in un conduttore ohmico assume la forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Applicando l'operatore rotore ad ambo i membri di questa relazione, si ha:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \equiv -\nabla^2 \vec{H} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) = \sigma(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Se il materiale è omogeneo (μ indipendente dalle coordinate) ed isotropo, si ha d'altro canto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$$

e questa espressione è nulla in virtù della seconda equazione di Maxwell; per cui la relazione precedente diviene:

$$-\nabla^2 \vec{H} = \sigma(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Ma per la terza equazione di Maxwell è

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t};$$

che sostituita nella precedente ci dà:

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Un'equazione formalmente identica si ottiene per $\vec{E}$ applicando l'operatore di rotore alla terza equazione di Maxwell e confrontando con la quarta; per cui in definitiva il campo elettromagnetico soddisfa nel conduttore ohmico isotropo e omogeneo le due equazioni

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \end{cases} \qquad [IX.54]$$

Equazioni delle onde elettromagnetiche nei conduttori

che sono due equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti alle derivate parziali. La soluzione di queste equazioni dipende, come al solito, dalle condizioni al contorno. Limitiamoci a considerare il caso che i campi $\vec{E}$ e $\vec{H}$ dipendano solo da x e t (onda piana propagantesi lungo l'asse x). Si verifica allora, mediante la stessa analisi effettuata nel par. IX.4, che i campi $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ sono trasversali e fra di loro ortogonali; e una loro qualunque componente trasversale ha l'espressione

$$\varphi(x, t) = \Phi(x)\, e^{j\omega t}$$

dove la funzione complessa $\Phi(x)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \omega^2 \varepsilon\mu\Phi - j\omega\sigma\mu\Phi = 0$$

Questa equazione ammette soluzione del tipo:

$$\Phi(x) = A\,e^{j\alpha x}$$

Purché α soddisfi l'equazione algebrica associata

$$\alpha^2 = +(\omega^2\varepsilon\mu - j\omega\sigma\mu)$$

Ponendo $\alpha = \beta - j\gamma$ è piuttosto semplice verificare che la parte reale β e il coefficiente dell'immaginario γ devono avere l'espressione:

$$\begin{cases} \beta = \pm\,\omega\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}\left[1 \pm \sqrt{1-(\sigma^2/\omega^2\varepsilon^2)}\right]} \\ \gamma = \omega\sigma\mu/2\beta \end{cases} \qquad \text{[IX.55]}$$

Onda smorzata

L'onda piana propagantesi lungo l'asse x assume l'espressione:

$$\varphi(x,t) = A\,e^{\gamma x}\,e^{j(\beta x + \omega t)} \qquad \text{[IX.56]}$$

Coefficiente di attenuazione

Cammino di attenuazione

Cammino di attenuazione nei mezzi a elevata conducibilità

L'onda progressiva si ha per la scelta $\beta < 0$ (e dunque anche $\gamma < 0$: si tratta di un'onda smorzata con *coefficiente di attenuazione* $|\gamma|$. Nei materiali ad elevata conducibilità, e precisamente quando valga la condizione $\sigma >> \varepsilon\omega$, è immediato verificare che il *cammino di attenuazione* $d = |1/\gamma|$ assume l'espressione semplice

$$d \simeq \sqrt{2/\omega\sigma\mu} \qquad \text{[IX.57]}$$

Esempio

E.IX.3. *In argento, la conducibilità σ è dell'ordine di $3 \cdot 10^7\,(\Omega \cdot m)^{-1}$. Calcolare il cammino di attenuazione per microonde (con $\lambda = 1$ cm) e per luce visibile verde ($\lambda = 0{,}5$ μm).*

Ricordando la relazione $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$, si calcola facilmente che:

microonda: $\omega = 2 \cdot 10^{11}\ s^{-1}$ *luce verde*: $\omega = 4 \cdot 10^{15}\ s^{-1}$

La quantità $\varepsilon\omega$ (in $\Omega^{-1}m^{-1}$) vale nei due casi: $\varepsilon\omega$ (microonda) $\simeq 2$; $\varepsilon\omega$ (luce verde) $\simeq 4 \cdot 10^4$. In entrambi i casi vale l'approssimazione $\sigma >> \varepsilon\omega$, per cui possiamo usare la [IX.57] per il calcolo del cammino di attenuazione d.

Numericamente si ha:

microonda: $d \simeq 5{,}5 \cdot 10^{-6}$ m *luce verde*: $d = 2{,}7 \cdot 10^{-8}$ m

La penetrazione dell'onda elettromagnetica è dunque limitata a un sottilissimo strato superficiale.

IX.8. Spettro delle onde elettromagnetiche

L'intervallo di frequenza entro il quale le onde elettromagnetiche sono oggetto di applicazioni e di studio è estremamente ampio, essendo compreso fra il migliaio di Hertz e circa 10^{25} Herz (e oltre).

A seconda della loro frequenza, le onde elettromagnetiche sono prodotte da tipi di sorgenti diverse, hanno proprietà diverse e in particolare diverse modalità di interazione con la materia, e vengono anche indicate con nomi diversi (vedi figura).

Le *onde a radiofrequenza* hanno frequenza compresa fra poche centinaia di Hertz e $\sim 10^9$ Hz (λ compreso fra alcuni chilometri e frazioni di metro). Sono usate soprattutto in telecomunicazioni (radio, TV) e sono prodotte da dispositivi elettronici (circuiti oscillanti accoppiati ad antenne).

Le *microonde* hanno frequenze comprese fra 10^9 Hz e alcune unità di 10^{11} Hz ($0{,}3$ m $\geq \lambda \geq 10^3$ m). Sono generate anch'esse da dispositivi elettronici, spesso associati a dispositivi meccanici (cavità risonanti, guide d'onda). Sono usate in ricerca (studio di strutture atomiche e molecolari) e in telecomunicazioni (*Radar*, che è la sigla di «Radio Detection and Ranging»)

La *radiazione infrarossa* ha frequenze comprese fra $\sim 5 \cdot 10^{11}$ Hz e $\sim 4 \cdot 10^{14}$ Hz (10^{-3} m $> \lambda > 0{,}78\,\mu$m). Lo spettro infrarosso viene usualmente suddiviso ulteriormente in *lontano infrarosso* (10^{-3} m $> \lambda > 3 \cdot 10^{-5}$ m), *medio infrarosso* ($3 \cdot 10^{-5}$ m $> \lambda > 3 \cdot 10^{-6}$ m) e *vicino infrarosso* ($3\,\mu m > \lambda > 0{,}78\,\mu$m). La radiazione infrarossa viene spontaneamente emessa dai corpi caldi. Ricordiamo che lo spettro di radiazione emesso da un corpo nero è descritto dalla *legge di Planck*; la lunghezza d'onda corrispondente al massimo dello spettro è regolata dalla *legge di Wien*; mentre l'intensità della radiazione emessa (energia irraggiata per unità di tempo e per unità di area) è descritta dalla *legge di Stefan-Boltzmann* (vedi cap. XII; vedi inoltre Termodinamica, cap. III).

La *radiazione visibile* (o semplicemente *luce*) ha frequenza compresa fra $\sim 4 \cdot 10^{14}$ e $\sim 8 \cdot 10^{14}$ Hz ($0{,}78\,\mu$m $> \lambda > 0{,}38\,\mu$m). La luce viene emessa da atomi e molecole quando i relativi elettroni compiono transizioni da uno stato metastabile o instabile allo stato fondamentale, ovvero da cariche microscopiche in movimento per agitazione termica a temperature molto elevate (alcune migliaia di gradi). In particolare *il Sole* (la cui temperatura superficiale è prossima a 6000 gradi) emette uno spettro di radiazione il cui massimo è centrato intorno a $\sim 0{,}5\,\mu$m (cioè circa $\lambda \simeq 5000$ Å), e si estende dall'ultravioletto al vicino infrarosso secondo la curva di intensità mostrata in figura. Le diverse frequenze di luce visibile, rivelate dall'occhio, vengono tradotte dal cervello umano nella sensazione di *colori* diversi. Una radiazione visibile composta da una sola ben definita frequenza viene pertanto detta *monocromatica*. Quando lo spettro di una certa radiazione visibile comprende in ugual misura la luce delle varie frequenze (*spettro di intensità piatto*) si parla di *luce bianca*. Questa terminologia (*radiazione monocromatica*; *radiazione bianca*) nell'uso comune viene estesa anche a radiazione non compresa nello spettro visibile.

Della luce - della sua produzione, della sua rivelazione, della sua manipolazione con strumenti diversi - si occupa un particolare capitolo della fisica detto *ottica*. Noi dedicheremo a questo argomento uno spazio relativamente ristretto in questo e nei prossimi due capitoli.

Colore	λ (μm)	ν (10^{12} Hz)
Violetto	0,38-0,43	790-700
Indaco	0,43-0,46	700-650
Blu	0,46-0,49	650-610
Verde	0,49-0,56	610-535
Giallo	0,56-0,58	535-515
Arancio	0,58-0,62	515-485
Rosso	0,62-0,78	485-385

I *raggi ultravioletti* hanno frequenza compresa fra $8 \cdot 10^{14}$ e $3 \cdot 10^{17}$ Hz (3800 Å $\geq \lambda \geq 6$ Å). Essi sono prodotti in transizioni fra diversi stati elettronici in atomi e molecole, in particolare quando un gas è sottoposto a una scarica elettrica. La luce solare comprende radiazione ultravioletta, che tuttavia viene in larga parte assorbita nella parte alta dell'atmosfera ($h \geq 80$ km) che così si ionizza (*ionosfera*). L'abbronzatura ad opera dei raggi solari è

dovuta ai residui raggi ultravioletti, che tuttavia hanno energia sufficiente per provocare danni alle cellule viventi; e dunque l'eccessiva esposizione della pelle ai raggi ultravioletti deve essere evitata. (!)

Raggi X

I *raggi X* hanno frequenza compresa fra $\sim 3 \cdot 10^{17}$ e $\sim 5 \cdot 10^{19}$ Hz ($5 \cdot 10^{-10}$ m $\geq \lambda \geq 5 \cdot 10^{-12}$ m) e sono prodotti soprattutto in processi in cui cariche elettriche subiscono una brusca accelerazione: ad esempio se un fascio di elettroni accelerato a un potenziale di alcune decine di kV («raggio catodico») viene inviato contro un materiale solido, gli elettroni vengono bruscamente frenati e in tale processo emettono radiazione elettromagnetica fra cui abbondano i raggi X (*radiazione di frenamento*, o *bremsstrahlung*). I raggi X hanno energia sufficiente per provocare transizioni degli elettroni atomici più interni e per danneggiare le cellule viventi. Essi possono penetrare strati spessi di tessuti biologici; il loro diverso assorbimento ad opera di tessuti di diversa consistenza e densità rende possibile il loro impiego in diagnostica medica (radiografia e radioscopia). I raggi X trovano ampie e differenziate applicazioni in radiochimica e in medicina; il loro impiego deve essere accompagnato da grandi cautele, considerati i danni spesso irreversibili che essi sono in grado di provocare sulle cellule viventi. Molte stelle o ammassi stellari sono sorgenti di raggi X, il cui studio ha consentito importanti scoperte in astrofisica.

Bremsstrahlung

Raggi gamma

I *raggi* γ hanno frequenze superiori a 10^{18} Hz ($\lambda \leq 10^{-12}$ m), e la loro emissione si accompagna a molti processi nucleari. Molti decadimenti nucleari radioattivi sono accompagnati dalla emissione di raggi γ, con frequenze dell'ordine di 10^{20} Hz o più. A queste frequenze, la descrizione della fenomenologia delle interazioni fra campo elettromagnetico e materia non può prescindere dalla meccanica quantistica. I quanti del campo elettromagnetico vengono detti *fotoni*, la cui energia è pari a

Fotoni

$$E_\nu = h\nu \qquad \text{[IX.58]}$$

dove

$$h = 6{,}62617 \cdot 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$$

Costante di Planck

è detta *costante di Planck* (vedi eq. [VI.9]). Ricordiamo che un elettronvolt (eV) è definito come l'energia acquisita da un elettrone quando attraversa la differenza di potenziale di 1 V, e vale:

Elettronvolt

$$1\ \text{eV} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1\ \text{V} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

I fotoni emessi nei decadimenti radioattivi nucleari hanno, tipicamente, energia pari ad alcuni milioni di eV (alcuni MeV).

Nei grandi acceleratori di particelle, gli elettroni possono essere accelerati fino ad alcune decine di GeV (1 GeV = 1000 MeV = 10^9 eV), e i protoni fino a quasi 10^{12} eV; e fino a questo stesso ordine possono arrivare le energie di fotoni emessi in successivi processi di bremsstrahlung.

Sono in fase di studio o di progetto acceleratori con energia ancor maggiore di alcuni ordini di grandezza; mentre in raggi cosmici sono stati osservato fotoni di energia maggiore di 10^{17} eV, corrispondenti a una frequenza dell'ordine di 10^{32} s^{-1} ($\lambda \simeq 10^{-23}$ m): un singolo fotone di energia così elevata può produrre effetti energeticamente significativi a livello macroscopico.

IX.9. Conservazione dell'energia e vettore di Poynting

Come ogni altro fenomeno fisico, così anche i processi elettromagnetici sono soggetti al principio di conservazione dell'energia. Ciò non significa, naturalmente, che l'energia del campo e.m. si debba mantenere costante, perché esso può trasferire energia ad altri sistemi fisici: ciò che deve mantenersi costante è la somma di tutte le forme di energia possedute dal campo e dai sistemi fisici con cui il campo interagisce.

Consideriamo una superficie chiusa S di forma costante, all'interno della quale ci sia un campo elettromagnetico non ovunque nullo, ed eventualmente della materia. L'energia U posseduta dal campo elettromagnetico contenuto in S, per la [III.42] e per la [VII.59] sarà data da:

$$U = \int_\tau \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D})\, d\tau + \int_\tau \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B})\, d\tau$$

dove $d\tau$ è un elemento del volume τ contenuto in S. Deriviamo questa relazione rispetto al tempo; si ottiene ($\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \vec{H}$):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_\tau \left[\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right] d\tau$$

Dalla terza e dalla quarta equazione di Maxwell si ha rispettivamente:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J};$$

espressioni che sostituite nella precedente ci danno:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_\tau [\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})]\, d\tau$$

Ma per una identità generale di calcolo vettoriale è:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

espressione che sostituita nella precedente ci dà

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\int_\tau \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\, d\tau - \int_\tau \vec{E} \cdot \vec{J}\, d\tau$$

Il primo degli integrali al secondo membro di questa relazione, utilizzando il teorema della divergenza, può essere così trasformato:

$$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\, d\tau = \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}.$$

Per cui otteniamo in definitiva:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_S \vec{I} \cdot d\vec{S} + \int_\tau (\vec{E} \cdot \vec{J})\, d\tau \qquad \text{[IX.59]}$$

dove il vettore $\vec{I}$, detto *vettore di Poynting*, è definito dalla relazione:

Vettore di Poynting $\vec{I}$

$$\vec{I} = \vec{E} \times \vec{H} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu \qquad [IX.60]$$

Discutiamo ora l'interpretazione fisica della [IX.59].

È semplice mostrare che il termine $\int_\tau (\vec{E} \cdot \vec{J})\, d\tau$ dà conto dell'energia dissipata per effetto Joule nella materia contenuta nel volume τ. Siano infatti n le cariche presenti nell'unità di volume: $n = \dfrac{dN}{d\tau}$. La forza istantanea $d\vec{F}$ esercitata dal campo elettromagnetico $\vec{E}, \vec{B}$ sul volume elementare $d\tau$ è allora:

$\vec{E} \cdot \vec{J}$
potenza dissipata per effetto Joule nell'unità di volume del materiale

$$d\vec{F} = dNq\,(\vec{E} + \vec{v}_d \times \vec{B}) = nq\,(\vec{E} + \vec{v}_d \times \vec{B})\, d\tau \qquad [IX.61]$$

dove $\vec{v}_d$ è la velocità media (di deriva) delle cariche contenute in $d\tau$. La potenza dissipata da tale forza è

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v}_d = nq\vec{v}_d \cdot (\vec{E} + \vec{v}_d \times \vec{B})\, d\tau = \vec{E} \cdot nq\vec{v}_d\, d\tau = \vec{E} \cdot \vec{J}\, d\tau \qquad [IX.62]$$

dove abbiamo tenuto conto della definizione [IV.5] di densità di corrente $\vec{J}$. Vediamo in particolare che la forza esercitata dal campo magnetico $(nq\vec{v}_d \times \vec{B})\, d\tau$ essendo ortogonale alla velocità $\vec{v}_d$, non compie alcun lavoro e non contribuisce pertanto alla potenza dissipata per effetto Joule. La relazione [IX.62] dimostra l'interpretazione che abbiamo più sopra anticipato per il termine $\int_\tau (\vec{E} \cdot \vec{J})\, d\tau$ al secondo membro della [IX.59].

L'interpretazione fisica complessiva della [IX.59] è allora la seguente: se nel tempo dt l'energia del campo elettromagnetico contenuto nel volume τ diminuisce di una quantità pari a $-dU$, la diminuzione per unità di tempo $-\dfrac{\partial U}{\partial t}$ è pari alla somma della potenza dissipata per effetto Joule nella materia contenuta in τ $\int_\tau (\vec{E} \cdot \vec{J})\, d\tau$ e del flusso $\int_S \vec{I} \cdot d\vec{S}$ attraverso la superficie di contorno S del vettore di Poynting $\vec{I} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu$.

Conservazione dell'energia

A sua volta, il vettore di Poynting $\vec{I}$ ha la seguente interpretazione fisica: considerata un'onda elettromagnetica, il *flusso $\vec{I} \cdot d\vec{S}$ del vettore di Poynting* ad essa associato *attraverso l'elemento di superficie $d\vec{S}$ rappresenta l'energia elettromagnetica che l'onda trasporta nell'unità di tempo attraverso $d\vec{S}$*.

Intepretazione fisica del vettore di Poynting

Dunque in sintesi la [IX.59] ci dice che se l'energia del campo elettromagnetico contenuta nel volume τ diminuisce, tale variazione sarà dovuta o a effetti dissipativi nella materia contenuta in τ, o a energia che sfugge attraverso la superficie S che delimita τ.

$\dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu}$
[J/m²s]
ovvero
[w/m²]

È facile verificare che il vettore di Poynting ha, come deve, le dimensioni di un'energia per unità di superficie e per unità di tempo: nel sistema SI, esso si misura pertanto in J/m^{2}s, ovvero in w/m^2 (watt al metro quadro). Il vettore di Poynting può essere usato, in particolare, per calcolare il flusso di energia trasportato da un'onda piana o da un'onda sferica che soddisfino la [IX.14] o la [IX.24]: in questi casi, l'onda si propaga senza essere soggetta ad alcuna dissipazione.

Consideriamo prima il caso di un'onda piana. Sappiamo che il campo elettrico e il campo magnetico sono fra di loro ortogonali e ortogonali alla direzione di propagazione. Si ha allora, utilizzando la [IX.32]:

$$\vec{I} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu}(\vec{B} \times \vec{v}) \times \vec{B} = \frac{B^2}{\mu}\vec{v}$$

dove $\vec{v}$ è la velocità di propagazione. Questa espressione, tenuto conto ancora della [IX.32] (per cui $B^2 = \varepsilon\mu E^2$) può assumere le seguenti espressioni fra di loro equivalenti:

$$\vec{I} = \frac{B^2}{\mu}\vec{v} = \varepsilon E^2 \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right)\vec{v} = u\vec{v} = \frac{E^2}{Z}\hat{v} \qquad \text{[IX.63]}$$

$\vec{I} = u\vec{v}$

dove Z rappresenta l'impedenza caratteristica [IX.33] $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ del mezzo e $\hat{v}$ è il versore della velocità dell'onda, $u = u_E + u_B$ (vedi eq. [IX.38]) rappresenta la densità di energia (energia per unità di volume) del campo elettromagnetico dell'onda. L'interpretazione fisica del vettore di Poynting trova allora nella [IX.63] un immediato riscontro: $u\vec{v}$ rappresenta infatti l'energia (del campo elettromagnetico) contenuta in un cilindro di sezione S unitaria disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda e di altezza pari alla velocità dell'onda.

Il modulo I del vettore di Poynting $\vec{I}$:

$$I(\vec{r}, t) = E^2/Z = E^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = H^2\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad \text{[IX.63.a]}$$

è detto *intensità istantanea dell'onda*, e rappresenta l'*energia che all'istante t fluisce nell'unità di tempo attraverso la superficie unitaria disposta ortogonalmente alla velocità di propagazione*. Tenuto conto che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono funzioni ondulatorie, tale risulta anche l'intensità istantanea [IX.63.a]. Se l'onda piana considerata è un'onda monocromatica $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$, la [IX.63.a] assume la forma

Intensità istantanea

$$I(\vec{r}, t) = \frac{E_0^2}{Z}\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = \frac{E_0^2}{Z}\cos^2\xi \qquad \text{[IX.64]}$$

$$(\xi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

Intensità istantanea di un'onda piana monocromatica

che rappresenta un'onda pulsante che si propaga nella stessa direzione e con la stessa velocità dell'onda elettromagnetica. Considerato che il valor medio su un periodo del coseno quadrato vale 1/2, l'*intensità media* $\bar{I}$ *dell'onda* (detta anche semplicemente *intensità* I) vale

$$\bar{I} = \frac{E_0^2}{2Z} = \frac{E_{eff}^2}{Z} = \frac{E_0^2}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{H_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad \text{[IX.65]}$$

Intensità media

Come per ogni altra grandezza sinusoidale, con $E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ si indica il valor medio del modulo calcolato su un periodo.

Nel caso di un'onda sferica, tutti i passaggi che ci hanno portato fino alla [IX.63.a] continuano a valere. Tuttavia in essa non abbiamo per $\vec{E}$ l'espressione [IX.37] di un'onda piana; ma tenuto conto della [IX.40] dovremo porre

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{r}\cos(kr - \omega t)$$

con la velocità dell'onda diretta radialmente e $\vec{E}$ ortogonale alla velocità stessa.

Al posto della [IX.63] avremo dunque, per l'intensità istantanea:

Intensità istantanea di un'onda sferica

$$I(r,t) = \frac{E_0^2}{Zr^2}\cos^2(kr - \omega t) \qquad [IX.66]$$

e per l'intensità media:

Intensità media di un'onda sferica

$$\bar{I} = \frac{E_0^2}{2Zr^2} = \frac{E_{eff}^2}{Zr^2} \qquad [IX.67]$$

L'intensità di un'onda sferica decresce come $1/r^2$ all'aumentare di r. Questa dipendenza da r è d'altra parte resa necessaria dalla condizione di conservazione dell'energia: nel caso, che stiamo qui trattando, di assenza di dissipazione, il flusso stazionario di energia attraverso una qualunque superficie sferica concentrica alla sorgente dell'onda deve essere lo stesso qualunque sia il raggio r della sfera; e ciò accade solo se vale la [IX.67], cioè se l'intensità dell'onda decresce come $1/r^2$ (flusso di energia nel tempo unitario pari a $\bar{I} \cdot 4\pi r^2$).

Osserviamo che l'interpretazione del vettore di Poynting $\vec{I} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu$ come quel vettore il cui flusso attraverso $d\vec{S}$ rappresenta il flusso di potenza che attraversa $d\vec{S}$ a causa della presenza del campo elettromagnetico, vale nel caso delle onde, in cui $\vec{E}$ e $\vec{B}$ essendo fra di loro legati dalle [IX.2] sono strettamente interrelati, poiché le variazioni temporali dell'uno costituiscono le sorgenti dell'altro. In condizioni statiche, può capitare che sia non nullo il prodotto $\vec{E} \times \vec{B}$ di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo di induzione $\vec{B}$ indipendentemente generati da sorgenti diverse. Trattandosi di una configurazione statica, il flusso di energia attraverso una qualunque superficie $d\vec{S}$ è naturalmente nullo, mentre può essere non nullo il flusso del prodotto vettoriale $\vec{E} \times \vec{B}$, che non ha in questo caso alcuna interpretazione fisica significativa.

Esempio

E.IX.4. *Calcolare l'intensità extraatmosferica I_{ea} della radiazione solare, cioè l'energia per unità di tempo incidente su una superficie di area unitaria ($1\ m^2$) disposta normalmente ai raggi e situata esternamente all'atmosfera terrestre. I dati che servono sono: Raggio del Sole, $R_S = 0{,}696 \cdot 10^6$ km; distanza Sole-Terra $d = 149{,}6 \cdot 10^6$ km; temperatura superficiale del sole $T_S = 5760$ K.*

La potenza I_0 irraggiata da 1 m^2 di superficie solare è data dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$I_0 = \sigma T_S^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\frac{\text{w}}{\text{m}^2\,\text{K}^4} \cdot (5760\ \text{K})^4 = 6{,}24 \cdot 10^7\ \text{w/m}^2$$

La relazione fra I_0 e la intensità extraatmosferica I_{ea} è facilmente ricavabile dalla [IX.67], che ci fornisce:

$$I_0 R_S^2 = I_{ea} \cdot (d + R_S)^2$$

da cui segue:

$$I_{ea} = \frac{I_0 R_S^2}{(d + R_S)^2} = 6{,}24 \cdot 10^7\frac{\text{w}}{\text{m}^2} \cdot \frac{(0{,}696\ \text{Km})^2}{(150{,}3\ \text{Km})^2} = 1338\ \text{w/m}^2$$

Questo valore è in accordo col valore sperimentale $I_{ea} = 1350\ \text{w/m}^2$. A livello del suolo, con cielo sereno e sole allo zenith giunge un'intensità di circa 1000 w/m^2.

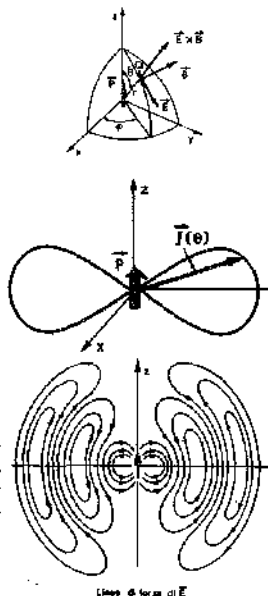
Linee di forza di $\vec{E}$

Vale la pena osservare che in generale l'onda elettromagnetica emessa da una sorgente anche se puntiforme (cioè anche se ci si pone a una distanza da essa molto maggiore delle sue dimensioni) non può essere approssimata come un'onda sferica. La sua intensità infatti, benché in ogni determinata direzione decresca come $1/r^2$, dipende in generale dagli angoli θ, φ che individuano la direzione stessa.

Nel par. IX.15 tratteremo in particolare l'onda elettromagnetica emessa dalla più semplice delle sorgenti, cioè da un *dipolo oscillante*. Anticipiamo qui, in forma qualitativa, i risultati che in tale paragrafo verranno espressi in termini quantitativi. Se il momento $\vec{p}$ del dipolo è orientato secondo l'asse z, nel punto generico Q il vettore $\vec{E}$ è diretto secondo la direzione $\hat{\theta}$, il vettore $\vec{B}$ secondo la direzione $\hat{\varphi}$, e il vettore di Poynting secondo la direzione radiale $\hat{r}$.

L'intensità dell'onda, dotata ovviamente di simmetria cilindrica considerata la simmetria della sorgente (cioè indipendente da φ), dipende tuttavia da θ (oltreché da r). Il suo andamento in funzione di θ e di r è in effetti:

$$I(\theta) \propto \frac{\sin^2\theta}{r^2} \qquad \text{(vedi eq. [IX.121])}$$

Le linee di forza di $\vec{E}$ hanno a loro volta un andamento piuttosto complesso; a titolo di esempio, mostriamo il loro andamento in vicinanza del dipolo, sul piano yz, nel momento in cui il momento $\vec{p}(t)$ del dipolo oscillante raggiunge il suo valor massimo p_0 (nel verso dell'asse z positivo).

IX.10. Quantità di moto dell'onda elettromagnetica. Pressione di radiazione

Consideriamo un'onda elettromagnetica incidente su un certo materiale. Già abbiamo visto che l'unità di volume del materiale subirà ad opera dell'onda una forza che, usando la [IX.61], assume la forma:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = nq\,(\vec{E} + \vec{v}_d \times \vec{B}) \qquad \text{[IX.68]}$$

$$[f] = \frac{[N]}{[m^3]}$$

La potenza W assorbita dall'unità di volume del materiale è immediatamente ottenuta dalla [IX.68] moltiplicando scalarmente per $\vec{v}_d$; ovvero dividendo la [IX.62] per $d\tau$:

$$W = \frac{dP}{dt} = \vec{E} \cdot \vec{J} \qquad \text{[IX.69]}$$

$$[W] = \frac{[w]}{[m^3]}$$

Come abbiamo già osservato a commento della [IX.62], alla potenza che l'onda trasferisce al materiale contribuisce il campo elettrico, ma non il campo magnetico visto che la forza di Lorentz è caratterizzata dal fatto di non compiere alcun lavoro.

All'energia trasferita dall'onda contribuisce solo il campo elettrico

La densità di corrente $\vec{J}$, per sua parte, è proporzionale al campo elettrico $\vec{E}$. Se il materiale è conduttore, ciò appare dalla [IX.53]. Del tutto in generale, per effetto del campo elettrico applicato $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ le cariche (che si comportano come oscillatori smorzati) compiono un moto oscillatorio forzato che soddisfa un'equazione del moto formalmente ana-

loga alla [IX.42]. La soluzione di questa equazione, espressa dalla [IX.43], risulta essere proporzionale (tramite un numero complesso) al campo elettrico applicato $\vec{E}(\vec{r},t)$; e dunque anche la velocità $\vec{v}_d$ delle cariche (vedi la seconda delle [IX.43.a]) è proporzionale a $\vec{E}$ tramite un numero complesso. Avremo pertanto in generale:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d = \sigma\vec{E} \qquad (\sigma\text{: numero complesso}) \qquad [IX.70]$$

La densità di corrente $\vec{J}$ ha dunque lo stesso andamento ondulatorio sinusoidale di $\vec{E}$, con ampiezza proporzionale all'ampiezza $\vec{E}_0$ di $\vec{E}$ e uno sfasamento rispetto a $\vec{E}$ pari ad α, dove α è la fase del numero complesso σ. La [IX.69] diviene pertanto:

$$W = \vec{E}\cdot\vec{J} = E^2\sigma \qquad [IX.71]$$

e il suo valor medio su un periodo è dato da:

$$\bar{W} = \overline{\vec{E}\cdot\vec{J}} = \frac{E_0^2}{2}|\sigma|\cos\alpha = E_{eff}^2|\sigma|\cos\alpha \qquad [IX.72]$$

Quantità di moto dell'onda

L'onda elettromagnetica comunica all'unità di volume del materiale, nell'unità di tempo, anche una certa quantità di moto $\vec{q}$ data dall'impulso trasferito nell'unità di tempo; cioè dato dalla media temporale della [IX.68]. Considerato che il valor medio di $\vec{E}$ è nullo, si ha:

Alla quantità di moto dell'onda contribuisce il solo campo magnetico

$$\bar{\vec{q}} = nq\overline{\vec{v}_d\times\vec{B}} = \overline{\vec{J}\times\vec{B}}$$

Tenuto conto che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono fra di loro ortogonali e ortogonali alla velocità $\vec{v}$ dell'onda – e considerato inoltre che $\vec{J}$ è parallelo a $\vec{E}$, eq. [IX.70] – abbiamo

$$\bar{\vec{q}} = \overline{\vec{J}\times\vec{B}} = \overline{JB}\,\hat{v} = \overline{\vec{E}\cdot\vec{J}}\,\hat{v}/v$$

dove $\hat{v}$ è il versore di $\vec{v}$. Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto della relazione [IX.32] che lega fra di loro i moduli di B e di E nell'onda; ovvero, considerato che $\vec{E}\cdot\vec{J} = W$ per la [IX.71]:

Relazione fra quantità di moto ed energia trasferite dall'onda

$$\bar{\vec{q}} = \frac{\bar{W}}{v}\hat{v} \qquad [IX.73]$$

l'impulso (o la quantità di moto) che l'onda trasferisce nell'unità di tempo al materiale che investe è diretto secondo la velocità di propagazione dell'onda, e il suo modulo è pari all'energia che l'onda trasferisce al materiale nell'unità di tempo, divisa per la velocità v dell'onda stessa

Nel caso che l'onda si propaghi nel vuoto

Caso di onda che si propaga nel vuoto

$$\bar{\vec{q}} = \frac{\bar{W}}{c}\hat{v} \qquad [IX.73.a]$$

Qualora l'onda trasferisca al materiale *tutta* la sua energia (assorbimento totale) conviene riferirsi all'energia *incidente nell'unità di tempo sull'unità di superficie* del materiale. Al posto della potenza $\bar{W}$ trasferita all'unità di volume avremo l'intensità I (potenza incidente sull'unità di area), e al posto di $\bar{\vec{q}}$ (quantità di moto trasferita all'unità di volume nell'unità di tempo) avremo la quantità di moto $\bar{p}$ trasportata nell'unità di tempo dall'onda inci-

dente sull'unità di superficie ad essa normale. La relazione fra $\vec{p}$ e I è formalmente identica alla [IX.73.a]:

$$\vec{p} = \frac{I}{v}\hat{v} = \vec{I}/v = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu v} \qquad [IX.74]$$

Impulso per unità di superficie e per unità di tempo

dove abbiamo tenuto conto della definizione del vettore intensità $\vec{I}$ (che è diretto secondo la direzione di propagazione dell'onda, ed ha modulo pari all'intensità I). *Un'onda elettromagnetica fa incidere nell'unità di tempo sull'unità di superficie ad essa normale una quantità di moto diretta secondo la sua velocità di propagazione, e di modulo pari all'intensità I dell'onda (vettore di Poynting) diviso per la velocità di propagazione* v.

Nel caso che la descrizione del campo richieda il ricorso alla meccanica quantistica, l'energia E_γ e la quantità di moto p_γ di ciascun fotone sono ancora fra di loro proporzionali tramite la velocità dell'onda; per fotoni nel vuoto:

$$E_\gamma = h\nu \qquad\qquad p_\gamma = h\nu/c$$

energia del fotone — quantità di moto del fotone

Energia e quantità di moto dei fotoni

La [IX.74] ha le dimensioni di una forza per unità di superficie, e rappresenta *la pressione esercitata dall'onda incidente su una superficie ad essa normale, e perfettamente assorbente.* La stessa pressione I/c, in verso opposto subisce anche una sorgente che emetta l'intensità I (*pressione di rinculo*). Una superficie perfettamente riflettente, investita ortogonalmente dall'onda, subisce naturalmente una pressione doppia.

Pressione di radiazione

Esempio

E.IX.5. *Calcolare la pressione P_{ea} esercitata dalla radiazione solare extraatmosferica incidente su una superficie perfettamente speculare disposta normalmente ad essa. Calcolare inoltre la pressione di rinculo P_o esercitata sulla superficie solare dalla radiazione da esso emessa.*

Pressione della radiazione solare

Usando per le intensità gli stessi simboli usati nell'esempio E.IX.4, e i valori numerici ivi calcolati, si ha:

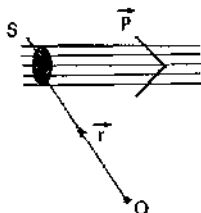
$$P_{ea} = \frac{2\,I_{ea}}{c} \simeq \frac{2 \cdot 1350\ \text{w/m}^2}{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} \simeq 9 \cdot 10^{-6}\ \text{N/m}^2$$

$$P_o = \frac{I_o}{c} \simeq \frac{6{,}24 \cdot 10^7\ \text{w/m}^2}{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} \simeq 0{,}22\ \text{N/m}^2$$

La pressione di radiazione è di solito trascurabile nei processi di trasferimento radiativo realizzati artificialmente; ma gioca un ruolo rilevante nei processi astrofisici.

Oltre alla quantità di moto $\vec{p}$ di cui ci siamo fin qui occupati, le onde elettromagnetiche trasportano anche un *momento della quantità di moto* o *momento angolare* $\vec{L}$. Considerato un polo O, è evidente che l'onda trasporta un momento angolare rispetto a O dato da:

Momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Onda polarizzata circolarmente

se si tratta di un raggio di sezione piccola, cioè una porzione di onda opportunamente collimata in modo che l'area S sia piccola; ovvero data da:

$$\vec{L} = \int_S \vec{r} \times d\vec{p}$$

se la sezione S ha dimensioni lineari non trascurabili rispetto ad $\vec{r}$. Questo momento angolare è detto anche *momento angolare orbitale.*

La radiazione elettromagnetica possiede però in generale anche un *momento angolare intrinseco* analogo al momento angolare di spin delle particelle (vedi par. VI.2). Un'onda elettromagnetica piana possiede momento angolare intrinseco non nullo quando essa è *polarizzata circolarmente*: quando cioè il campo elettrico (normale a $\vec{B}$ e normale alla velocità di propagazione $\vec{v}$) ruota intorno alla direzione di propagazione. In tal caso si può mostrare che il momento angolare intrinseco trasportato dall'onda è pari a

$$\vec{L} = \pm\, \omega \vec{I} \qquad \text{[IX.76]}$$

col segno + o − a seconda che la polarizzazione è destrorsa o sinistrorsa. Il fatto che $\vec{L}$ sia parallelo (o antiparallelo) a $\vec{I}$ mostra che il momento angolare intrinseco (momento di spin dei fotoni) è *longitudinale*, cioè diretto secondo la direzione di propagazione. Secondo la meccanica quantistica, in effetti, il momento angolare di spin dei fotoni σ_γ non può che essere longitudinale, e il suo valore è

$$\sigma_\gamma = \pm\, \hbar \qquad (\hbar = h/2\pi) \qquad \text{[IX.77]}$$

Un'onda dotata di *polarizzazione lineare* (cioè col vettore $\vec{E}$ vibrante in un piano fisso, ad esempio nel piano xy se x è la direzione di propagazione) possiede momento angolare intrinseco nullo. Ciò risulta evidente considerando che un'onda con polarizzazione piana può essere ottenuta come sovrapposizione di due onde di uguale intensità e frequenza, polarizzate circolarmente in senso opposto (una destrorsa e una sinistrorsa).

IX.11. Densità di quantità di moto del campo elettromagnetico e tensore degli sforzi di Maxwell

Nel paragrafo precedente abbiamo trattato in maniera semiempirica la quantità di moto trasferita da un'onda elettromagnetica ad un materiale da essa investito. Abbiamo visto che ad ogni ammontare di energia W trasferita dall'onda al materiale si associa un trasferimento di quantità di moto di modulo q pari a W/v, dove v è la velocità dell'onda. Si trattava di una analisi semiempirica, visto che quando ci tornava comodo abbiamo utilizzato relazioni empiriche (come la [IX.70], che lega $\vec{J}$ ad $\vec{E}$ nei conduttori ohmici) o ci siamo serviti di proprietà dei campi valide solo in condizioni particolari (ad esempio il fatto che il valor medio di $\vec{E}$ fosse nullo).

Sviluppiamo qui, in termini più generali e rigorosi, il bilancio della quantità di moto in un'onda elettromagnetica; bilancio da cui le conclusioni raggiunte nel precedente paragrafo possono essere tratte come caso particolare.

Consideriamo un certo volume τ, di forma costante nel tempo; e sia S la sua superficie di contorno. Il risultante $\vec{F}$ delle forze esercitate su τ dal campo elettromagnetico è allora dato dall'integrale della [IX.68] su tutto il volume τ; integrale che tenuto conto che $nq = \rho$ e $nq\vec{v}_d = \vec{J}$, può essere scritto come:

$$\vec{F} = \int_\tau (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})\, d\tau \qquad \text{[IX.78]}$$

dove ρ e $\vec{J}$ sono rispettivamente la densità di carica e la densità di corrente presenti (punto per punto e istante per istante) in τ. Del tutto in generale, ρ e $\vec{J}$ possono essere scritti in termini del campo elettromagnetico utilizzando le equazioni di Maxwell [IX.2]

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} ; \qquad \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

per cui la [IX.78] diviene:

$$\vec{F} = \int_\tau \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \right] d\tau$$

Essendo

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \times \vec{B}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

abbiamo

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial (\vec{D} \times \vec{B})}{\partial t} - \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ;$$

che sostituita nella relazione precedente ci consente di scriverla nella forma:

$$\vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau (\vec{D} \times \vec{B})\, d\tau = \int_\tau \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})\, d\tau + \int_\tau \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\tau - \int_\tau \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H})\, d\tau$$

Usando la terza equazione di Maxwell, sostituiamo $(-\vec{\nabla} \times \vec{E})$ a $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; e per simmetrizzare fra campo elettrico e magnetico introduciamo il termine $\vec{H} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ (che è nullo per la seconda equazione di Maxwell); otteniamo in definitiva:

$$\begin{aligned} \vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau (\vec{D} \times \vec{B})\, d\tau = \\ = \int_\tau [\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) - \vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{H} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H})]\, d\tau \end{aligned} \qquad \text{[IX.79]}$$

Utilizzando la definizione dell'operatore $\vec{\nabla}$, ed applicando il teorema della divergenza, attraverso una serie di passaggi banali anche se laboriosi, il secondo membro di questa equazione può essere trasformato in un integrale di superficie; consentendo di dare alle tre componenti cartesiane della [IX.79] la forma:

$$\begin{cases} F_x + \dfrac{\partial G_x}{\partial t} = \displaystyle\int_S (T_{xx}\, dS_x + T_{xy}\, dS_y + T_{xz}\, dS_z) \\ F_y + \dfrac{\partial G_y}{\partial t} = \displaystyle\int_S (T_{yx}\, dS_x + T_{yy}\, dS_y + T_{yz}\, dS_z) \\ F_z + \dfrac{\partial G_z}{\partial t} = \displaystyle\int_S (T_{zx}\, dS_x + T_{zy}\, dS_y + T_{zz}\, dS_z) \end{cases} \qquad \text{[IX.80]}$$

dove:

$d\vec{S} \equiv (dS_x, dS_y, dS_z)$ rappresenta il generico elemento della superficie S che racchiude il volume τ;

$\vec{G} = \int_\tau (\vec{D} \times \vec{B})\, d\tau$ è un vettore di cui daremo fra poco l'interpretazione fisica.

L'insieme di nove numeri T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, ecc. può essere sintetizzato nella relazione:

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j + v^2 B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + v^2 B^2) \right) \qquad [i,j = x, y, z] \qquad [IX.81]$$

dove il simbolo δ_{ij} è definito dalle relazioni: $\delta_{ij} = 1$ per $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$.

Tensore degli sforzi di Maxwell

Tensore simmetrico

Ognuno dei numeri T_{ij} è espresso nella forma di prodotti di componenti di $\vec{E}$ e di $\vec{B}$; nel loro insieme, i T_{ij} costituiscono una matrice a tre righe e tre colonne che è detta un *tensore*; nel caso specifico si tratta del cosiddetto *tensore degli sforzi di Maxwell*, la cui interpretazione fisica verrà discussa fra poco. Poiché, come risulta dalla definizione [IX.81], $T_{ij} = T_{ji}$, il tensore degli sforzi è un *tensore simmetrico*.

Per interpretare fisicamente le [IX.80], osserviamo innanzitutto che $\vec{F}$ è il risultante delle forze agenti sulla materia contenuta in τ. Per la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi, detta $\vec{Q}$ la quantità di moto totale della materia contenuta in τ, avremo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

per cui la [IX.80] può essere posta nella forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{Q} + \vec{G})_x = \displaystyle\int_S (T_{xx}\, dS_x + T_{xy}\, dS_y + T_{xz}\, dS_z) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{Q} + \vec{G})_y = \displaystyle\int_S (T_{yx}\, dS_x + T_{yy}\, dS_y + T_{yz}\, dS_z) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{Q} + \vec{G})_z = \displaystyle\int_S (T_{zx}\, dS_x + T_{zy}\, dS_y + T_{zz}\, dS_z) \end{cases} \qquad [IX.80.a]$$

Consideriamo ora il caso che il campo elettromagnetico sia completamente confinato in una porzione finita τ_E di spazio. Scegliendo opportunamente la superficie S, in modo che contenga al suo interno tutta la regione τ_E, l'integrale di superficie al secondo membro delle [IX.80] si annulla; e la [IX.80.a] diviene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{Q} + \vec{G}) = 0$$

ovvero:

Per un sistema isolato $\vec{Q} + \vec{G} = \text{costante}$

$$\vec{Q} + \vec{G} = \text{costante} \qquad [IX.81]^*$$

relazione che può essere posta anche nella forma locale:

$$\vec{q} + \vec{g} = \text{costante} \qquad [IX.82]$$

dove: $\vec{q} = \dfrac{d\vec{Q}}{d\tau}$ è la quantità di moto per unità di volume della materia contenuta in τ

$$\vec{g} = \frac{d\vec{G}}{d\tau} = \vec{D} \times \vec{B}$$

Il sistema contenuto in S (costituito da materia e dal campo elettromagnetico) è per ipotesi un sistema isolato, e la sua quantità di moto totale si deve conservare. La [IX.81] (e la [IX.82]) richiede dunque che $\vec{G}$ venga considerato come quantità di

moto totale del campo elettromagnetico contenuto in τ; e $\vec{g}$ come la relativa densità di quantità di moto:

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \varepsilon\mu\,(\vec{E} \times \vec{H}) = \varepsilon\mu\,\vec{I} = \frac{\vec{I}}{v^2} \qquad [IX.83]$$

Densità di quantità di moto del campo elettromagnetico

(quantità di moto del campo elettromagnetico per unità di volume).

Osserviamo che coerentemente con la [IX.83] la quantità di moto che un'onda fa incidere per unità di tempo sull'unità di superficie normale alla sua direzione di propagazione, sarà pari alla quantità di moto contenuta in un cilindro di base unitaria e di altezza pari alla velocità v dell'onda; cioè sarà pari a $v\vec{g}$ (v volte la densità di quantità di moto) e dunque pari a $\vec{I}/v$. Riotteniamo così la [IX.74].

Se il sistema contenuto in S non è isolato, cioè se su S $T_{ij} \neq 0$, allora la quantità di moto totale contenuta in S varia, e tale variazione è descritta dall'integrale al secondo membro della [IX.80]. Abbiamo così un'*interpretazione fisica del tensore degli sforzi* T_{ij}. Considerato un elemento di superficie dS_j (ad esempio dS_x), il prodotto

Interpretazione fisica del tensore degli sforzi

$$T_{ij}\, dS_j$$

(ad esempio $T_{zx}\, dS_x$) rappresenta la componente lungo l'asse i (l'asse z nell'esempio fatto) della quantità di moto trasmessa per unità di tempo attraverso l'elemento di superficie dS_j (dS_x nell'esempio fatto). Il tensore degli sforzi ha le dimensioni di una pressione. Esso rappresenta però la quantità di moto trasmessa dal campo elettromagnetico attraverso l'elemento di superficie $d\vec{S}$, e non (in generale) la pressione esercitata dal campo su $d\vec{S}$; ciò succede solo se $d\vec{S}$ è fisicamente realizzato mediante una superficie materiale completamente assorbente. In generale, la pressione esercitata su una superficie materiale può essere calcolata analizzando quale *variazione* tale superficie provoca alla quantità di moto del campo e.m. su di essa incidente; quantità di moto calcolabile tramite il tensore degli sforzi [IX.81].

IX.12. Potenziali del campo elettromagnetico (potenziali elettrodinamici)

Abbiamo già discusso come le equazioni di Maxwell [IX.2] costituiscano un sistema di sei equazioni indipendenti alle derivate parziali (del primo ordine) che legano fra di loro le sei componenti del campo elettrico e magnetico. Si tratta di equazioni fra di loro accoppiate (ciascuna contiene più di una delle sei funzioni incognite E_i, B_i $(i = x, y, z)$), che possono essere risolte direttamente solo in casi semplici.

In generale, conviene ricorrere alle equazioni relative a potenziali (vettore $\vec{A}$ e scalare V) che abbiamo già utilizzato in condizioni statiche. A proposito dei potenziali, abbiamo accennato all'inizio di questo capitolo che la loro determinazione (quattro funzioni incognite) richiede la soluzione di sole quattro equazioni differenziali (del secondo ordine) visto che la mera introduzione dei potenziali stessi (l'espressione dei campi tramite di essi), garantisce l'automatica validità di alcune delle equazioni di Maxwell; cosa che verrà precisata di qui a poco.

Il vantaggio di esprimere le equazioni del campo in termini di potenziali – oltre a quello di ridurre le equazioni da risolvere da sei a quattro – sta nel fatto che tali equazioni possono essere scritte in forma disaccoppiata, ciascuna di esse contenendo una sola delle quattro funzioni incognite A_x, A_y, A_z, V; ed inoltre nel fatto che la covarianza relativistica della teoria può essere espressa, come vedremo nel prossimo paragrafo, in termini assai eleganti e compatti.

Cominciamo con l'osservare che la seconda equazione di Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (la cui validità è condizione necessaria e sufficiente per l'introduzione del potenziale vettore; vedi par. V.5.2) vale del tutto in generale, cioè istante per istante anche in condizioni non stazionarie; e dunque il potenziale vettore $\vec{A}$, definito dalla relazione

Potenziale vettore

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \qquad \text{[IX.84]}$$

può essere introdotto anche per un campo $\vec{B}$ comunque variabile nel tempo. Naturalmente, $\vec{A}$ sarà a sua volta un vettore dipendente dalle coordinate spazio-temporali:

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$$

Introducendo la [IX.84] nella terza equazione di Maxwell, questa diviene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

da cui

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Dunque il vettore $\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ è irrotazionale; e dunque può essere scritto, istante per istante, come gradiente di una funzione scalare. Introduciamo dunque il potenziale scalare V come quella funzione di $\vec{r}, t$ tale che:

Potenziale scalare

$$-\vec{\nabla} V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{[IX.85]}$$

ovvero

$$-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \qquad \text{[IX.85.a]}$$

Vediamo così che il fatto stesso di introdurre i potenziali (cioè di scrivere $\vec{E}$ e $\vec{B}$ tramite la [IX.85] e la [IX.84]) è subordinato alla condizione, necessaria e sufficiente, di validità della seconda e della terza equazione di Maxwell ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$; $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$) che sono, fra le quattro equazioni di Maxwell, quelle omogenee (in cui non compaiono i termini noti ρ e $\vec{j}$ dovuti alle sorgenti); una volta introdotti i potenziali, tali equazioni risultano identicamente soddisfatte:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} V) \equiv 0$$

Equazioni della dinamica dei potenziali o equazioni elettrodinamiche

Per la determinazione dei potenziali, si ricorrerà dunque alle *equazioni di Maxwell non omogenee (prima e quarta)* dette *equazioni della dinamica dei potenziali*

Sostituendo in tali equazioni al posto di $\vec{B}$ e di $\vec{E}$ la [IX.84] e la [IX.85], otteniamo (limitandoci al caso che ε e μ siano uniformi e costanti):

$$\begin{cases} \nabla^2 V + \dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \dfrac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu \vec{j} \end{cases} \qquad \text{[IX.86]}$$

Equazioni elettrodinamiche non disaccoppiate

Queste equazioni costituiscono quattro equazioni fra di loro indipendenti nelle quattro funzioni incognite $A_x(\vec{r},t)$, $A_y(\vec{r},t)$, $A_z(\vec{r},t)$, $V(\vec{r},t)$, che possono essere risolte – a parte difficoltà matematiche – una volta assegnate le condizioni al contorno. Le [IX.86] sono tuttavia equazioni che *non sono fra di loro disaccoppiate*. Esse possono essere trasformate in equazioni disaccoppiate utilizzando il margine di arbitrarietà che le definizioni [IX.84] e [IX.85] lasciano ai potenziali. È infatti immediato verificare che se $\vec{A}$ e V soddisfano la [IX.84] e la [IX.85] (cioè sono i potenziali del campo elettromagnetico $\vec{E}$ e $\vec{B}$ presente in certe condizioni fisiche), gli stessi campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si ottengono a partire da due potenziali $\vec{A}'$, V' purché questi siano legati ad $\vec{A}$ e V dalle relazioni:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\varphi \\ V \rightarrow V' = V - \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{[IX.87]}$$

Trasformazione di gauge

dove φ è una qualunque funzione scalare di $\vec{r}, t$ derivabile almeno fino al secondo ordine in tutte le variabili x, y, z, t. La trasformazione [IX.87] è detta *trasformazione di gauge* (o di *ricalibratura*) per i potenziali e la funzione φ è detta funzione di gauge. Che la [IX.87] lasci invariati i campi $\vec{E}$, $\vec{B}$ è immediatamente dimostrabile in base a proprietà generali degli operatori differenziali:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

($\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) \equiv 0$: è identicamente nullo il rotore di un gradiente)

$$-\vec{\nabla}V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}V + \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\varphi) = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

$$\left(\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\varphi)\right)$$

Una opportuna trasformazione di gauge, consente di scegliere potenziali per i quali le equazioni dinamiche [IX.86] siano disaccoppiate. Infatti, come mostreremo nell'esempio E.IX.6, scegliendo opportunamente φ è possibile fare in modo che $\vec{A}$ e V soddisfino la relazione

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \text{[IX.88]}$$

Condizione di Lorentz

Se la [IX.88] è soddisfatta, è immediato verificare che le [IX.86] si riducono a:

Equazioni elettrodinamiche disaccoppiate

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 V - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \qquad \text{[IX.89]}$$

Queste equazioni (che per comodità abbiamo scritto in ordine inverso rispetto alle [IX.86]) costituiscono *quattro equazioni disaccoppiate* nelle quattro funzioni incognite $\vec{A}, V$. La relazione [IX.88] è detta *condizione di Lorentz*. Quando i potenziali soddisfano la condizione di Lorentz, e dunque le loro equazioni dinamiche sono le [IX.89], si dice che essi appartengono alla *gauge di Lorentz*. Osserviamo che in condizioni stazionarie la condizione di Lorentz si riduce alla condizione [V.50] ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) che avevamo a suo tempo posto per il potenziale vettore in magnetostatica.

Utilizzando l'operatore dalambertiano $\Box$ introdotto nel paragrafo IX.3 e definito dalla [IX.20], le [IX.89] possono essere scritte nella forma più compatta:

$$\begin{cases} \Box \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \Box V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \qquad \text{[IX.89.a]}$$

Riportiamo anche, riscrivendole vicine per memoria, le relazioni che legano i potenziali ai campi

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \qquad \text{[IX.84]}$$

$$-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \qquad \text{[IX.85]}$$

Le [X.89] ci mostrano che nel caso generale (non stazionario) le equazioni dei potenziali elettromagnetici sono formalmente analoghe alle equazioni del caso stazionario [II.46] e [V.52], con l'unica differenza di avere l'operatore dalambertiano $\Box$ al posto dell'operatore laplaciano $\Delta \equiv \nabla^2$. È immediato verificare che qualora i potenziali non dipendano dal tempo, le [IX.89], [IX.84] e [IX.85] si riducono alle corrispondenti relazioni che avevamo stabilito per il caso stazionario.

Se le sorgenti sono localizzate in una regione finita, le [IX.89] ammettono una soluzione esprimibile come immediata generalizzazione della soluzione per il caso stazionario (eq. [I.44] e [V.53]); soluzione che ci limitiamo qui a riportare senza dimostrarla:

Potenziali ritardati

$$\begin{cases} A(\vec{r}, t) = \dfrac{\mu}{4\pi} \displaystyle\int_\tau \dfrac{\vec{J}(\vec{r}\,', t - \Delta r/v)\, d\tau'(\vec{r}\,')}{\Delta r} \\ V(\vec{r}, t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int_\tau \dfrac{\rho(\vec{r}\,', t - \Delta r/v)}{\Delta r}\, d\tau'(\vec{r}\,') \end{cases} \qquad \text{[IX.90]}$$

dove τ rappresenta il volume entro cui sono localizzate le sorgenti; $\Delta r = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ è la distanza fra la posizione $\vec{r}$ in cui si calcolano i potenziali e

la posizione $\vec{r}'$ (sulla quale si integra) in cui sono localizzate le sorgenti; $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ è la velocità con cui si propagano i segnali elettromagnetici nel materiale considerato. Come si vede, nel calcolo degli integrali la densità di corrente $\vec{J}$ e la densità di carica ρ in ogni posizione $\vec{r}'$ va calcolata non all'istante t in cui si stanno calcolando i potenziali, ma a un istante $t' = t - \frac{\Delta r}{v}$ anticipato del tempo $\frac{\Delta r}{v}$ che i segnali elettromagnetici impiegano per percorrere la distanza Δr fra la posizione $\vec{r}'$ e la posizione $\vec{r}$ in cui si sta calcolando il potenziale. Per questo motivo, i potenziali [IX.90] sono detti *potenziali ritardati* (rispetto alle sorgenti).

Esempio

E.IX.6. Dati i potenziali $\vec{A}, V$, trovare quale condizione deve soddisfare la funzione φ affinché i potenziali $\vec{A}', V'$ ottenuti tramite la trasformazione di gauge [IX.87] soddisfino la condizione di Lorentz [IX.88].

Deve essere

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \varepsilon\mu \frac{\partial V'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla^2\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

per cui la funzione φ deve soddisfare l'equazione:

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}\right) \qquad \text{[IX.91]}$$

Questa equazione, noto come si è ipotizzato il secondo membro, ammette sempre soluzione. Naturalmente, di norma il problema di risolvere l'equazione [IX.91] non si pone, perché i potenziali $\vec{A}, V$ non sono noti. Si tratta solamente di dimostrare (cosa automaticamente fatta una volta verificato che la [IX.91] è risolubile) che il passaggio da potenziali che soddisfano le [IX.86] a potenziali che soddisfino le [IX.89] è sempre lecito. Dopo di che si risolvono direttamente queste ultime tramite le [IX.90], ottenendo così potenziali che, appartenendo alla gauge di Lorentz, soddisfano automaticamente anche la [IX.91].

IX.13. Covarianza relativistica dell'elettrodinamica

Cenni

Come abbiamo già accennato, la formulazione dell'elettrodinamica in termini di potenziali consente di esprimere in forma compatta la covarianza relativistica della teoria, come mostreremo in questo paragrafo supponendo di trovarci nel vuoto. Le nostre conclusioni valgono però anche in un mezzo omogeneo e isotropo indefinito, pur di sostituire al posto di $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, velocità della luce nel vuoto, la velocità $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ della luce nel mezzo considerato.

Ricordiamo (vedi cap. XI del volume di Fisica I) che l'insieme di quattro numeri:

$$\underline{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ct) \qquad \text{[IX.93]}$$

detto *quadrivettore spazio-tempo*, passando da un sistema di riferimento inerziale $\Sigma \equiv Oxyz$ a un secondo sistema inerziale $\Sigma' \equiv O'x'y'z'$ in moto traslatorio con velocità costante V_Σ lungo l'asse $x \equiv x'$, si trasforma mediante la matrice di Lorentz (che qui indichiamo con la lettera L, anziché A, per non confonderla col potenziale vettore):

Quadrivettore spazio-tempo

$$\underline{x}' = L\underline{x}$$

Trasformazione di Lorentz

ovvero:

$$x_i' = \sum_k L_{ik} x_k \equiv L_{ik} x_k \qquad [IX.94]$$

(nello scrivere $\sum_k L_{ik} x_k$ semplicemente come $L_{ik} x_k$ usiamo una convenzione normalmente usata nel calcolo vettoriale e tensoriale: *sugli indici ripetuti si sottintende che sia eseguita la sommatoria*). La matrice di Lorentz è definita come

Matrice di Lorentz

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \beta = \dfrac{V_E}{c} \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad [IX.95]$$

Il modulo quadrato del quadrivettore spazio-tempo, definito come

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \qquad [IX.96]$$

è relativisticamente invariante: il suo valore non cambia passando da un sistema di riferimento all'altro, cioè effettuando la sostituzione $\underline{x}' = L\underline{x}$. Ogni quaterna di numeri che si trasformi come $\underline{x}$ (cioè mediante la trasformazione [IX.94]) è detta un *quadrivettore*. Ogni quadrivettore soddisfa la [IX.96].

Quadrivettore densità di corrente

Abbiamo già visto (vedi par. V.7) che la quantità:

$$\underline{J} \equiv (J_1, J_2, J_3, J_4) = (\vec{J}, \rho c) \qquad [IX.97]$$

costituisce un quadrivettore (*quadrivettore densità di corrente*).
È inoltre immediato verificare che l'operatore dalambertiano $\square$:

$$\square \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \equiv$$
$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right) \qquad [IX.98]$$

è relativisticamente invariante, cioè non cambia le proprietà di trasformazione relativistica della funzione cui viene applicato.

Ciò premesso, dividendo la seconda delle [IX.89] per c (e tenendo conto che $1/(\varepsilon_0 c) = \mu_0 c$, come segue dal fatto che $1/\varepsilon_0\mu_0 = c^2$), possiamo scrivere le [IX.89] stesse nella forma

$$\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{J} \qquad [IX.99]$$

Quadrivettore potenziale elettrodinamico

dove $\underline{J}$ è il quadrivettore densità di corrente [IX.97] e il *quadrivettore potenziale* $\underline{A}$ è definito come

$$\underline{A} \equiv (\vec{A}, V/c) \qquad [IX.100]$$

($\vec{A}$: potenziale vettore; V: potenziale scalare). Il fatto che la quaterna di numeri [IX.100] costituisca in effetti un quadrivettore è dimostrato dalla stessa [IX.99], considerato che $\underline{J}$ è un quadrivettore e $\square$ un invariante. Espresse nella forma [IX.99], *le equazioni dell'elettrodinamica risultano covarianti a vista*: una volta trovata la soluzione $\underline{A}$ in un sistema di riferimento inerziale, la soluzione $\underline{A}'$ in un altro sistema di riferimento inerziale si ottiene per semplice applicazione della trasformazione di Lorentz

Covarianza a vista delle equazioni dell'elettrodinamica

$$\underline{A}' = L\underline{A} \quad \text{cioè} \quad A_i' = L_{ik} A_k \qquad [IX.101]$$

ovvero, esplicitando la somma

$$\begin{cases} A'_1 = \gamma(A_1 - \beta A_4) \\ A'_2 = A_2 \\ A'_3 = A_3 \\ A'_4 = \gamma(-\beta A_1 + A_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'_x = \gamma(A_x - \beta V/c) \\ A'_y = A_y \\ A'_z = A_z \\ V/c = \gamma(-\beta A_x + V/c) \end{cases} \qquad \text{[IX.101.a]}$$

Noti i potenziali, i campi $\bar{E}$ e $\bar{B}$ vengono ottenuti applicando la [IX.84] e la [IX.85]. Utilizzando il formalismo dei quadrivettori (e dei quadritensori che fra poco definiremo), anche le relazioni fra potenziali e campo possono essere poste in forma compatta e relativisticamente più significativa.

Intoduciamo le quantità

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \qquad \text{[IX.102]}$$

Tenuto conto che A_μ e x_μ sono componenti di due quadrivettori, si dimostra facilmente che gli $F_{\mu\nu}$ (che possono essere scritti anche nella forma di matrice 4×4) si trasformano secondo la legge:

Tensore a due indici

$$F'_{\mu\nu} = L_{\mu i} L_{\nu j} F_{ij} \left(\equiv \sum_{i,j=1}^{4} L_{\mu i} L_{\nu j} F_{ij} \right) \qquad \text{[IX.103]}$$

dove $L_{\alpha\beta}$ sono gli elementi della matrice di Lorentz. Quando una matrice (4×4) $F_{\mu\nu}$ si trasforma secondo la [IX.103] si dice che rappresenta un tensore (o più precisamente un *quadritensore a due indici*). Nel caso specifico, il tensore $F_{\mu\nu}$ definito dalla [IX.102] è detto tensore del campo elettromagnetico o semplicemente *tensore elettromagnetico*. Segue evidentemente dalla definizione [IX.102] che

Tensore elettromagnetico

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \text{ (in particolare } F_{\mu\mu} = -F_{\mu\mu} = 0)$$

Il tensore elettromagnetico è un *tensore antisimmetrico*.

Confrontando la sua definizione [IX.102] con le [IX.84] e [IX.85], è immediato verificare che il tensore elettromagnetico è costruito così come mostrato nella seguente matrice

$$\underline{F} = |F_{\mu\nu}| = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y & E_x/c \\ B_z & 0 & -B_x & E_y/c \\ B_y & B_x & 0 & E_z/c \\ -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{[IX.104]}$$

Applicando la trasformazione di Lorentz [IX.103] al tensore [IX.104], si verifica facilmente che si riottengono le trasformazioni [V.74] del campo elettromagnetico.

Prima di chiudere questo paragrafo, osserviamo che il tensore degli sforzi T_{ij} definito dalla [IX.81] (con c al posto di v se ci troviamo nel vuoto) rappresenta un tensore tridimensionale. Esso può però essere facilmente completato in modo da divenire un tensore quadridimensionale, che si trasformi relativisticamente secondo la [IX.103]. Tale tensore quadridimensionale è detto *tensore impulso-energia* del campo elettromagnetico, ed ha la forma:

Tensore impulso-energia del campo elettromagnetico

$$|T_{ij}| = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & I_1/c \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & I_2/c \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & I_3/c \\ I_1/c & I_2/c & I_3/c & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & cg_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & cg_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & cg_3 \\ cg_1 & cg_2 & cg_3 & u \end{pmatrix} \qquad \text{[IX.105]}$$

dove T_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sono definiti dalla [IX.81]; $\vec{I} \equiv (I_1, I_2, I_3)$ è il vettore di Poynting [IX.60]; u è la densità di energia [IX.38]; e $\vec{g} \equiv (g_1, g_2, g_3)$ è la densità di quantità di moto [IX.83] del campo stesso. L'interpretazione fisica degli elementi del tensore impulso-energia è stata discussa nei precedenti paragrafi; la sua forma [IX.105] ci consente semplicemente, usando la [IX.103], di calcolarne facilmente il valore al passare da un sistema di riferimento ad un altro.

IX.14. Trasformazioni di gauge

Nel paragrafo IX.12 abbiamo introdotto la trasformazione di gauge [IX.87]. Abbiamo visto, in particolare, che se φ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale [IX.91], i potenziali soddisfano la condizione di Lorentz [IX.88]. Le equazioni dinamiche dei potenziali assumono allora la forma semplificata [IX.89], che ammette come soluzione i potenziali ritardati [IX.90].

È evidente che questa scelta di φ non toglie ogni arbitrarietà ai potenziali; in altri termini, $\vec{\nabla}\varphi$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ non sono univocamente determinati dalla condizione che φ soddisfi la relazione di Lorentz [IX.88]. Infatti la soluzione generale della [IX.88] si ottiene sommando a una soluzione particolare della equazione non omogenea [IX.88] la soluzione generale della equazione omogenea associata

Trasformazione di gauge ristretta

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{[IX.106]}$$

Se $\vec{A}, V$ appartengono alla gauge di Lorentz, anche

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\varphi$$

$$V' = V - \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

(con φ soluzione della [IX.106]) appartengono alla gauge di Lorentz. Una trasformazione di questo tipo è detta *trasformazione di gauge ristretta.*

Un'altra gauge che risulta talvolta utile è la cosiddetta *gauge di Coulomb*, definita dalla condizione

Gauge di Coulomb

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \qquad \text{[IX.107]}$$

(identica alla condizione [V.50] normalmente adottata nel caso stazionario). Inserendo la [IX.107] nelle [IX.86] vediamo che nella gauge di Coulomb i potenziali soddisfano le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \varepsilon\mu\,\vec{\nabla}\dfrac{\partial V}{\partial t} - \mu\vec{j} \end{cases} \qquad \text{[IX.108]}$$

Il potenziale scalare V soddisfa dunque un'equazione (la prima delle [IX.108]) identica a quella del caso stazionario, sia pure con $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ dipendente dal tempo. La soluzione di tale equazione è il *potenziale di Coulomb istantaneo*:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}', t)\,d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \text{[IX.109]}$$

Gauge di radiazione pura

La gauge di Coulomb viene normalmente usata in assenza di sorgenti ($\rho = 0$; $\vec{J} = 0$), ed è per questo detta anche *gauge di radiazione pura.* In questo caso, come

segue dalla [IX.109], è $V = 0$; e la seconda delle [IX.108] diviene una semplice equazione delle onde:

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{[IX.110]}$$

A loro volta i campi (vedi eq. [IX.84] e [IX.85]) divengono:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{[IX.111]}$$

L'apparente incongruenza contenuta nella [IX.109] (un potenziale che si propaga istantaneamente) è risolta considerando che le quantità fisicamente significative non sono i potenziali, ma i campi; e poiché $\vec{A}$ non si propaga istantaneamente, lo stesso accade ai campi. La [IX.110] e la [IX.111] contengono in forma sintetica e immediata tutte le informazioni da noi tratte nel par. IX.4 a proposito delle onde piane, e valide in realtà più in generale (velocità di propagazione dell'onda; $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ortogonali fra di loro e rispetto alla direzione di propagazione; rapporto fra il modulo di $\vec{B}$ e il modulo di $\vec{E}$).

IX.15. Radiazione emessa da un dipolo oscillante e da una carica in moto accelerato

Ponendoci nella gauge di Lorentz, esplicitiamo la soluzione [IX.90] dei potenziali ritardati nel caso che la sorgente sia un *dipolo oscillante* nel vuoto, cioè un segmento conduttore d percorso da corrente alternata. Il calcolo della soluzione per i potenziali e per i campi in questa configurazione semplice delle sorgenti è notevolmente interessante: e ciò sia a scopo illustrativo (per mostrare come possa essere manipolata, almeno in un caso semplice, la soluzione [IX.90]; per vedere come da essa possano essere ricavate le conseguenze fisiche; per evidenziare la relativa complicazione formale anche delle situazioni più semplici); sia per fini pratici, considerato che dispositivi assimilabili ad antenne rettilinee trovano ampie applicazioni in telecomunicazioni.

Dipolo oscillante

Supponiamo che la nostra sorgente rettilinea sia percorsa dalla corrente $I = I_0 \cos\omega t$. Nello scrivere una espressione della corrente indipendente dalla posizione lungo il conduttore, stiamo implicitamente ipotizzando che la lunghezza d'onda $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c \cdot 2\pi}{\omega}$ della radiazione emessa soddisfi la condizione $\lambda \gg d$. Supponiamo inoltre di porci nel vuoto a distanza r molto grande dal dipolo stesso. Fisicamente una tale sorgente può essere realizzata mediante un conduttore rettilineo (*antenna rettilinea*) con agli estremi due sfere metalliche costituenti le due armature di un condensatore, alimentato da un generatore di f.e.m. alternata F (*oscillatore di Hertz*). Il circuito equivalente di un tale dispositivo (che immaginiamo disposto col centro coincidente con l'origine del sistema di assi coordinati, e orientato secondo l'asse z) è quello mostrato nella figura a lato.

Antenna rettilinea

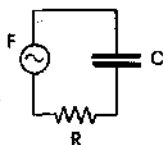
Oscillatore di Hertz

La relazione fra la corrente $I(t) = I_0 \cos\omega t$ circolante nel conduttore rettilineo (nella resistenza R) e la carica q presente sulle armature del condensatore è:

$$q(t) = \int I\,dt = \int I_0 \cos\omega t\,dt = \frac{I_0}{\omega}\sin\omega t$$

Le due sfere, dotate di carica rispettiva $+q$ e $-q$, costituiscono un dipolo di momento

$$\vec{p} = \hat{k} q d = \hat{k} d \int I\,dt = \hat{k}\frac{d I_0}{\omega}\sin\omega t \qquad \text{[IX.112]}$$

dove $\hat{k}$ è il versore dell'asse z (*dipolo oscillante*).

Nelle ipotesi fatte per la corrente, e tenuto conto che se S è la sezione del conduttore è $\vec{J}(\vec{r},t)\cdot S = \hat{k}I(\vec{r},t) = \hat{k}I(t)$, le [IX.90] ci danno per il potenziale vettore $\vec{A}(\vec{r},t)$ l'espressione:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-\Delta r/c)}{\Delta r}\,d\tau' = \frac{\mu_0 \hat{k}}{4\pi}\int \frac{I(z',t-r/c)}{r}\,dz' =$$
$$= \hat{k}\,\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi}\,\frac{\cos\omega(t-r/c)}{r} \qquad \text{[IX.113]}$$

Nei passaggi della [IX.113] abbiamo tenuto conto del fatto che $d\tau' = S dz'$; del fatto che $\Delta r = |\vec{r}-\vec{r}'| = r$ (per l'ipotesi che $r >> r' = d$); ed inoltre del fatto che la corrente $I(z',t-r/c)$ è indipendente da z' $(I(r',t-r/c) = I_0\cos\omega(t-r/c))$. Tenuto conto della [IX.112], l'espressione [IX.113] del potenziale vettore può essere scritta anche come

Potenziale vettore

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{r} \qquad \text{[IX.113.a]}$$

dove con $\dot{\vec{p}}$ abbiamo indicato la derivata del momento di dipolo $\vec{p}$ rispetto al tempo. Il calcolo del potenziale scalare $V(\vec{r},t)$ può essere effettuato utilizzando la condizione di Lorentz [IX.88]:

$$-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \operatorname{div}\vec{A}$$

Poiché, come vediamo dalla [IX.113], $\vec{A}$ è diretto come $\hat{k}$ (cioè secondo l'asse z), è $A_x = A_y = 0$ e dunque $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z}$; per cui tenendo conto della [IX.113.a] la relazione precedente diviene:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{cr} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2}\right)\frac{z}{r}$$

da cui:

Potenziale scalare

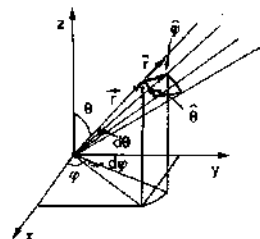
$$V(\vec{r},t) = \int\frac{\partial V}{\partial t}\,dt + C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr} + \frac{p(t-r/c)}{r^2}\right)\frac{z}{r} \qquad \text{[IX.114]}$$

avendo posto uguale a zero la costante C di integrazione.

Potenziali in coordinate polari

Per il calcolo dei campi a partire dai potenziali, conviene utilizzare coordinate polari: cominciamo con lo scrivere in tali coordinate il potenziale vettore [IX.113.a] e il potenziale scalare [IX.114]:

$$\begin{cases} A_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\,\dfrac{\dot{p}(t-r/c)}{r}\cos\theta \\[2ex] A_\theta = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\,\dfrac{\dot{p}(t-r/c)}{r}\sin\theta \\[2ex] A_\varphi = 0 \\[2ex] V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\dot{p}(t-r/c)}{cr} + \dfrac{p(t-r/c)}{r^2}\right]\cos\theta \end{cases} \qquad \text{[IX.115]}$$

avendo tenuto conto, nel calcolo delle componenti di $\vec{A}$, del fatto che le componenti del versore $\hat{k}$ secondo $\hat{r}$ e secondo $\hat{\theta}$ sono rispettivamente $\cos\theta$ e $-\sin\theta$; e nel calcolo di V del fatto che $z/r = \cos\theta$.

Poiché $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ (vedi eq. [IX.84] e [IX.85]) sono dati rispettivamente da $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ed $\vec{E} = -(\vec{\nabla}V + \partial\vec{A}/\partial t)$ per il calcolo dei campi dovremo usare le espressioni del rotore e del gradiente in coordinate polari. Si ha rispettivamente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\hat{r}}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(rA_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\right) + \\ + \frac{\hat{\theta}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(A_\varphi r \sin\theta)\right) + \frac{\hat{\varphi}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \qquad \text{[IX.116]}$$

Rotore in coordinate polari

$$\vec{\nabla}V = \hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi} \qquad \text{[IX.117]}$$

Gradiente in coordinate polari

Tenendo conto di queste espressioni, la [IX.84] e la [IX.85] applicate ai potenziali [IX.115] ci forniscono:

$$\begin{cases} B_r = 0 \\ B_\theta = 0 \\ B_\varphi = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\sin\theta}{r}\left(\dfrac{\ddot{p}(t-r/c)}{c} + \dfrac{\dot{p}(t-r/c)}{r}\right) \end{cases}$$
$$\begin{cases} E_r = \dfrac{2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\dfrac{\dot{p}(t-r/c)}{c} + \dfrac{p(t-r/c)}{r}\right) \\ E_\theta = \dfrac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\dfrac{\ddot{p}(t-r/c)}{c^2} + \dfrac{\dot{p}(t-r/c)}{cr} + \dfrac{p(t-r/c)}{r^2}\right). \\ E_\varphi = 0 \end{cases} \qquad \text{[IX.118]}$$

Espressione dei campi in coordinate polari

Da queste espressioni vediamo intanto che $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, cioè $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono fra di loro ortogonali. Le linee di forza di $\vec{B}$ sono circonferenze centrate intorno all'asse z e giacenti sui piani orizzontali, mentre $\vec{E}$ giace nel piano rz. Tutti i termini che contribuiscono a $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ hanno una dipendenza dalle variabili spazio-temporali del tipo di una funzione di $t - r/c$, moltiplicata per l'inverso di una potenza di r ($1/r^1$, $1/r^2$ o $1/r^3$ a seconda dei termini): hanno dunque la forma di onde la cui ampiezza si attenua all'aumentare di r, e i cui fronti d'onda sono sfere che si propagano con velocità c. Su ogni sfera, l'ampiezza di queste onde non è costante, portando a fattore una funzione di θ.

Benché tutti i termini che nella [IX.118] contribuiscono a formare $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ abbiano andamento ondulatorio, non tutti contribuiscono al trasporto di energia, cioè non tutti sono interpretabili come radiazione elettromagnetica che si propaga. Per mostrarlo, calcoliamo il vettore di Poynting $\vec{I} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$.

Utilizzando le componenti [IX.118] di $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ in coordinate polari, si calcola facilmente:

$$\vec{I} = \frac{\hat{r}}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{r}\right)^2 \sin^2\theta - \\ - \frac{\hat{r}}{16\pi^2\varepsilon_0}\left[2\frac{\ddot{p}\dot{p}}{c^2 r} + \frac{\dot{p}p}{r^3} + \frac{(\ddot{p}p + \dot{p}^2)}{cr^2}\right]\frac{\sin^2\theta}{r^2} + \\ + \frac{\hat{\theta}}{16\pi^2\varepsilon_0}\left[\frac{\ddot{p}\dot{p}}{c^2 r} + \frac{\dot{p}p}{r^3} + \frac{(\ddot{p}p + \dot{p}^2)}{cr^2}\right]\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} \qquad \text{[IX.119]}$$

Vettore di Poynting del campo di dipolo

Tenuto conto che, ponendo $p_0 = \frac{I_0 d}{\omega}$ (vedi eq. [IX.112]), si ha:

$$p = p_0 \sin\omega(t - r/c) \quad \dot{p} = \omega p_0 \cos\omega(t - r/c) \quad \ddot{p} = -\omega^2 p_0 \sin\omega(t - r/c) \qquad \text{[IX.120]}$$

vediamo che i termini in $\ddot{p}\dot{p}$ e in $\dot{p}p$ che compaiono nella [IX.119], contenendo il prodotto $\sin\omega(t - r/c) \cdot \cos\omega(t - r/c)$, hanno media temporale nulla. Inoltre, limitandoci ancora a considerare medie temporali, si ha $\overline{\ddot{p}p} = -\overline{\dot{p}^2}$; per cui si annullano i termini del tipo $(\ddot{p}p + \dot{p}^2)$. In definitiva il valor medio temporale della [IX.119] si riduce semplicemente a:

Valor medio del vettore di Poynting

$$\overline{\vec{I}} = \frac{\hat{r}\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{\overline{(\ddot{p}(t - r/c))^2}}{r^2} = \frac{\hat{r}\omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2} \qquad \text{[IX.121]}$$

avendo tenuto conto del fatto che il valor medio di $\sin^2\omega(t - r/c)$ vale 1/2: contribuiscono cioè al valor medio del vettore di Poynting solo i termini proporzionali a $1/r^2$. Il flusso della [IX.121] attraverso una sfera di raggio r risulta essere indipendente da r, e fornisce la potenza media $\overline{P}$ irraggiata dal dipolo:

$$\overline{P} = \int \overline{\vec{I}} \cdot d\vec{S} = \int \overline{I} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\omega^4 p_0^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta$$

ovvero:

Potenza media irraggiata

$$\overline{P} = \frac{\omega^4 p_0^2}{2} \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{\omega^4 p_0^2}{2} \cdot \frac{\mu_0}{6\pi c} \qquad \text{[IX.122]}$$

Osserviamo che in questa espressione $\frac{\omega^4 p_0^2}{2}$ rappresenta il valor medio di $\ddot{p}^2$.

I termini della [IX.119] inversamente proporzionali a potenze di r con esponente maggiore di due (termini il cui flusso medio è nullo ovunque, e il cui valore istantaneo è anch'esso trascurabile per $r >> \lambda$) dominano invece a distanza r dal dipolo tale che $r << \lambda$. Essi costituiscono il cosiddetto *campo vicino*, cui non è associato alcun trasporto di energia: si tratta di un campo variabile nel tempo perché varia nel tempo la sorgente, ma localizzato intorno alla sorgente stessa.

Campo vicino

Ricordando che $p_0 = I_0 d/\omega$, la [IX.122] può essere scritta nelle forme fra di loro equivalenti:

$$\overline{P} = \frac{I_0^2 d^2}{2} \frac{\omega^2 \mu_0}{6\pi c} = \frac{I_{\text{eff}}^2 d^2}{6\pi c} \mu_0^2 \omega^2 = \frac{2\pi}{3} \frac{Z_0}{c^2} I_{\text{eff}}^2 \cdot d^2 \cdot \nu^2 = \\ = \frac{2\pi}{3} Z_0 I_{\text{eff}}^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right) \qquad \text{[IX.123]}$$

Nei passaggi intermedi, si sono usate le relazioni $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \mu_0 c$ (vedi eq. [IX.33.a]) e $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$. La [IX.123] è particolarmente utile quando si abbia a che fare con una antenna lineare.

Naturalmente, però, la [IX.122] è applicabile anche al caso di un effettivo dipolo oscillante, rappresentato da una coppia di cariche $+q$ e $-q$ poste a distanza d variabile sinusoidalmente ($p = q\,d(t) = q\,d_0 \sin\omega t$), equivalente a una coppia di cariche a distanza fissa d ma il cui valore vari sinusoidalmente ($q = q_0 \sin\omega t$).

In virtù del principio di sovrapposizione, la [IX.122] dedotta per un dipolo oscillante armonicamente è estendibile immediatamente a un dipolo oscillante con legge qualunque sviluppando la legge oraria in serie di Fourier; ed è estendibile anche al caso di più cariche dotate di momento di dipolo risultante $\vec{p}(t)$.

La stessa formula è anche utilizzabile per il calcolo della potenza irraggiata istantaneamente da una carica q dotata di accelerazione a, sostituendo semplicemente $(qa)^2$ a $\ddot{p}^2$ nella [IX.122]. Si ottiene la cosiddetta *formula di Larmor*

Formula di Larmor

$$p = \frac{1}{6\pi} \frac{\mu_0}{c} (qa)^2 \qquad \text{[IX.124]}$$

La formula di Larmor è una relazione non relativistica, valida cioè nel caso che la velocità v posseduta dalla carica nel suo moto di oscillazione sia sempre $v \ll c$. Nel caso che questa condizione non sia soddisfatta, la formula di Larmor [IX.124] deve essere rimpiazzata dalla cosiddetta «formula di Lienard»:

Formula di Lienard

$$p = \frac{1}{6\pi} \frac{\mu_0}{c} q^2 \frac{a^2 - (\vec{v} \times \vec{a})^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)} \qquad \text{[IX.125]}$$

La formula di Lienard, che noi non dimostreremo, si riduce naturalmente a quella di Larmor nel limite $v/c \to 0$.

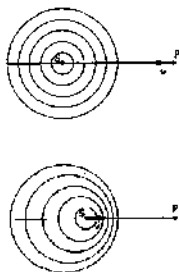
IX.16. Effetto Doppler

Effetto Doppler

Nel corso di meccanica, si è visto che le onde sonore sono soggette all'*effetto Doppler*: se cioè la sorgente S è in moto relativo rispetto all'osservatore P, quest'ultimo percepisce un suono di frequenza diversa rispetto a quella emessa dalla sorgente, e percepita da un osservatore in quiete rispetto a quest'ultima. L'interpretazione di questo effetto è semplice. Se l'osservatore P si muove rispetto alla sorgente S e al mezzo (ad es. aria) che trasmette il suono (ad esempio P si muove verso S con velocità V), allora l'osservatore vedendo arrivare il suono a velocità maggiore, incontra nell'unità di tempo un numero di fronti d'onda maggiore rispetto a quelli che raggiungono un osservatore fermo. Se invece l'osservatore P è fermo rispetto al mezzo, e la sorgente si muove con velocità V verso di esso, allora al momento della emissione dei vari fronti d'onda la sorgente si trova in posizioni diverse, e ciò produce un addensamento dei fronti d'onda che si muovono verso P. Nel limite $|V/v_S| \ll 1$ (dove v_S è la velocità del suono), cosicchè $(V/v_S)^2$ sia trascurabile, lo spostamento di frequenza in entrambi i casi può essere scritto come:

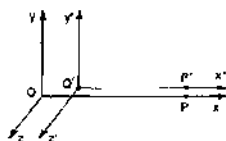
$$\nu = \nu_0 (1 \pm |V/v_S|) \qquad \text{[IX.126]}$$

dove ν_0 è la *frequenza propria* (osservatore e sorgente in quiete relativa) e ν la frequenza percepita quando S e P hanno velocità relativa V, col segno + o − a seconda che essi si stiano avvicinando o allontanando.

Poiché la propagazione delle onde elettromagnetiche non è dovuta ad un mezzo materiale di supporto, e poiché d'altro canto la velocità c delle onde elettromagnetiche non dipende dallo stato di moto relativo osservatore-sorgente (principio di costanza della velocità della luce), ci si potrebbe aspettare che per le onde elettromagnetiche l'effetto Doppler non sussista. In realtà l'effetto Doppler si manifesta anche per le onde elettromagnetiche: per conseguenza delle trasformazioni relativistiche dello spazio-tempo, se la sorgente si muove rispetto all'osservatore, quest'ultimo osserva una frequenza ν diversa dalla frequenza propria ν_0. Come nel caso del suono, $\Delta\nu = \nu - \nu_0$ risulta essere funzione della velocità relativa osservatore-sorgente; mentre, come richiesto dal principio di relatività, $\Delta\nu$

risulta *rigorosamente* indipendente (e non solo approssimativamente, come nel caso del suono) dal fatto che nel riferimento scelto sia l'osservatore a muoversi verso la sorgente o viceversa. Inoltre, nel caso che la velocità relativa V sia molto piccola rispetto alla velocità della luce c, la relazione fra frequenza osservata ν e frequenza propria ν_0 è la stessa ricavata nel caso delle onde sonore:

Variazione di frequenza per effetto Doppler (approssimazione $|V/c| \ll 1$)

$$\nu = \nu_0 (1 \pm |V/c|) \qquad (\text{per } |V/c| \ll 1) \qquad [IX.127]$$

col segno + o il segno − a seconda che osservatore e sorgente si stiano avvicinando o allontanando.

Dimostriamo ora quanto abbiamo appena affermato.

Consideriamo due sistemi di riferimento, $\Sigma \equiv Oxyz$ e $\Sigma' \equiv O'x'y'z'$ con lo stesso orientamento e assi delle ascisse coincidenti ($x = x'$). Sia $\vec{V} \equiv (V, 0, 0)$ la velocità di Σ' rispetto a Σ ($\vec{V}$ è cioè parallela all'asse $x \equiv x'$). Supponiamo che nell'origine O' del sistema Σ' sia disposta una sorgente S che emette un'onda che si possa considerare piana monocromatica che si propaga lungo il verso positivo dell'asse x. Nel sistema Σ', la dipendenza spazio-temporale dell'onda elettromagnetica sia

$$\cos (k_0 x' - \omega_0 t') = \cos 2\pi \left(\frac{x'}{\lambda_0} - \nu_0 t'\right) \qquad [IX.128]$$

dove $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ e $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ sono rispettivamente il numero d'onda e la pulsazione dell'onda monocromatica (λ_0, ν_0 la corrispondente lunghezza d'onda e frequenza), così come l'onda è vista da un osservatore P' solidale con Σ' e dunque fermo rispetto alla sorgente: proprio per indicare che si tratta di grandezze proprie (velocità relativa osservatore-sorgente nulla) le abbiamo indicate con il pedice zero. x', t' sono le coordinate spazio temporali in Σ'. Dall'osservatore P solidale con il sistema $\Sigma \equiv Oxyz$ l'onda sarà ancora osservata come un'onda piana (le trasformazioni di Lorentz, essendo lineari, trasformano piani in piani) con dipendenza spazio-temporale:

$$\cos (kx - \omega t) = \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) \qquad [IX.129]$$

Le relazioni fra λ, ν e λ_0, ν_0 possono essere ottenute immediatamente ricordando che, per le trasformazioni di Lorentz, è:

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - Vt) \qquad \gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2} \\ t' = \gamma (t - (V/c^2)\, x) \end{cases} \qquad [IX.130]$$

Sostituendo le [IX.130] nella [IX.128], questa diviene:

$$\begin{aligned} &\cos\left[2\pi\gamma\left(\frac{x - Vt}{\lambda_0} - \nu_0\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)\right)\right] = \\ &= \cos\left[2\pi\gamma\left(\left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{\nu_0}{c^2}V\right)x - \left(\frac{V}{\lambda_0} + \nu_0\right)t\right)\right] = \qquad [IX.131] \\ &= \cos\left[2\pi\left(\frac{\gamma}{\lambda_0}\left(1 + \frac{V}{c}\right)x - \gamma\nu_0\left(\frac{V}{c} + 1\right)t\right)\right] \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo tenuto conto della relazione $\lambda_0 \nu_0 = c$. Confrontando la [IX.131] con la [IX.129] vediamo che:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\lambda_0 \sqrt{1-(V/c)^2}}{1 + V/c} \\ \nu = \dfrac{\nu_0 (1 + V/c)}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{cases} \qquad \text{[IX.132]}$$

Osserviamo che $\lambda \nu = \lambda_0 \nu_0$, come richiesto dalla condizione che la velocità della luce sia la stessa (pari a c) nei due sistemi di riferimento. Vediamo inoltre che per $V > 0$ (sorgente che si avvicina all'osservatore), l'onda appare all'osservatore con frequenza $\nu > \nu_0$; e se $|V/c| \ll 1$, cosicché i termini quadratici $(V/c)^2$ possano essere trascurati rispetto a 1, le [IX.132] si riducono all'espressione classica [IX.126]:

$$\begin{cases} \nu = \nu_0 (1 \pm |V/c|) \\ \lambda = \dfrac{c}{\nu} \end{cases} \qquad \text{[IX.133]}$$

col segno + o il segno − a seconda che osservatore e sorgente si avvicinino o si allontanino l'uno dall'altra.

Capitolo decimo

Fenomeni classici di interazione fra radiazione e materia

X.1. Condizioni di raccordo per i campi al passaggio da un mezzo materiale a un altro

Abbiamo visto a suo tempo a quali condizioni soddisfino, nel caso stazionario, il campo elettrico e quello magnetico sulla superficie di separazione fra due mezzi materiali dielettrici. Queste condizioni sono riassunte nelle equazioni [III.32] e [VI.22]. Riscrivendo tali equazioni nel precedente capitolo (eq. [IX.8]) abbiamo anticipato che esse possono essere ritenute valide anche in condizioni non stazionarie. Ci proponiamo ora di dimostrare tale affermazione, generalizzandola nel contempo al caso che uno dei due mezzi sia conduttore.

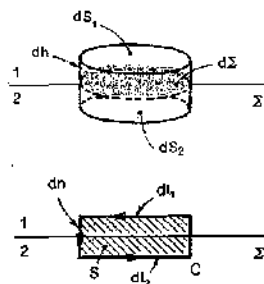
Ricordiamo che le [III.32] e [VI.22] sono state ottenute calcolando il flusso di $\vec{D}$ e di $\vec{B}$ uscente da un cilindretto elementare con basi dS_1 e dS_2 parallele alla superficie di separazione Σ fra i due mezzi; cilindro che intercetta su Σ stessa l'elemento di superficie $d\Sigma$, e la cui altezza dh è infinitesima di ordine superiore rispetto alle dimensioni lineari di $d\Sigma$. E calcolando la circuitazione di $\vec{E}$ e di $\vec{H}$ su un circuito chiuso elementare C di forma rettangolare, coi lati $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$ paralleli a Σ e il lato dn infinitesimo di ordine superiore rispetto a dl_1 e dl_2.

Seguiamo ora lo stesso procedimento, partendo però dalle equazioni di Maxwell nella loro formulazione più generale, valevole anche nel caso non stazionario. Integrando sul volume τ del cilindro la prima equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

abbiamo:

$$\int_\tau (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})\, d\tau = \int_\tau \rho\, d\tau$$

Applicando il teorema della divergenza all'integrale al primo membro $\left(\int_\tau (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})\, d\tau = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}\right.$, dove S è la superficie chiusa che delimita il cilindro)

e facendo poi tendere a zero l'altezza dh, si ottiene immediatamente:

$$(D_{1n} - D_{2n})\, d\Sigma = \sigma\, d\Sigma$$

dove D_{1n} e D_{2n} sono le componenti normali a Σ di $\vec{D}$ nel primo e nel secondo mezzo, e σ è la densità superficiale di carica presente su Σ; da cui:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

Se i due mezzi sono entrambi dielettrici scarichi, è $\sigma = 0$. La precedente relazione è del tutto analoga a quella valida nel caso stazionario, nel qual caso condensa in sé la condizione di raccordo [III.32] fra due dielettrici e il teorema di Coulomb [II.5] quando uno dei due mezzi è conduttore (se $D_{n2} = 0$, è $D_{n1} = \sigma$). Che la situazione non stazionaria debba essere trattata in questo caso in maniera formalmente identica al caso stazionario è d'altra parte evidente considerando che l'equazione di partenza (prima equazione di Maxwell) è la stessa nei due casi.

Consideriamo ora la terza equazione di Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, e calcoliamo il flusso di entrambi i membri attraverso la superficie S che ha come contorno il circuito C rappresentato nella seconda figura di pag. 408:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Trasformando il primo membro col teorema del rotore di Stokes:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Facendo tendere a zero il lato dn del circuito (e dunque anche l'area S del circuito stesso), essendo $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ finito l'integrale al secondo membro si annulla. Si ottiene così:

$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

Procedendo in maniera del tutto analoga per i campi magnetici $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ a partire dalla seconda e dalla quarta equazione di Maxwell, si ottengono immediatamente le condizioni di raccordo $B_{1n} - B_{2n} = 0$ e $H_{1t} - H_{2t} = J_S$, dove J_S rappresenta la eventuale *corrente di superficie* (misurata in ampere/metro) che può essere presente sulla superficie di separazione qualora uno dei due mezzi sia conduttore (con conducibilità che a rigore deve essere infinita, affinché possa essere presente una corrente non nulla su uno strato superficiale di spessore nullo). Mettendo insieme tutte le condizioni di raccordo per i campi abbiamo:

Corrente di superficie

$$\begin{cases} D_{1n} - D_{2n} = \sigma \\ E_{1t} - E_{2t} = 0 \end{cases} \quad \text{[X.1.a]} \qquad \begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} = J_S \end{cases} \quad \text{[X.1.b]}$$

Condizioni di raccordo

Nel caso che la densità di carica superficiale σ e la densità di corrente superficiale J_S siano nulle, riotteniamo le [IX.8]; la cui validità nel caso che

i due mezzi siano dielettrici è pertanto estendibile senza alcuna modifica dal caso stazionario al caso non stazionario, e dunque in particolare al caso di onde elettromagnetiche che attraversino la superficie di interfaccia fra due materiali dielettrici diversi.

X.2. Riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche

Riflessione e rifrazione

È esperienza comune che un raggio luminoso incidente sulla superficie di separazione fra due diversi mezzi trasparenti (ad esempio aria-vetro; aria-acqua; vetro-acqua) viene in parte *riflesso* e in parte deviato (o, come si dice, *rifratto*). Il fenomeno della riflessione-rifrazione riguarda in realtà le onde elettromagnetiche di qualunque lunghezza d'onda, e può essere trattato teoricamente con relativa semplicità a partire dalle considerazioni sviluppate nel precedente paragrafo.

Noi tratteremo esplicitamente il caso in cui la superficie di separazione (*interfaccia*) fra i due mezzi trasparenti omogenei e isotropi sia una superficie piana, e che l'onda sia per sua parte un'onda piana. Quando la configurazione geometrica dell'interfaccia e quella dei fronti d'onda sia di tipo più complicato, il problema può essere risolto suddividendo il sistema in porzioni, entro le quali il fronte d'onda e l'interfaccia siano approssimabili come porzioni di piano. Questo approccio è lecito fino a che le dimensioni lineari di ognuna di tali porzioni del sistema siano grandi rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione incidente. Se questa condizione non è soddisfatta (cioè se la radiazione incontra ostacoli le cui lunghezze caratteristiche siano confrontabili con la sua lunghezza d'onda), si originano fenomeni più complessi (diffrazione) di cui ci occuperemo più avanti.

Consideriamo dunque due mezzi dielettrici trasparenti, caratterizzati rispettivamente da ε_1, μ_1 e ε_2, μ_2 (simboli con cui indichiamo qui la costante dielettrica e la permeabilità magnetica *relative*). Dire trasparenti, fisicamente vuol dire che possono essere trascurati gli effetti di assorbimento della radiazione; e formalmente vuol dire che gli indici di rifrazione $n_1 = c/v_1$ e $n_2 = c/v_2$ possono essere considerati come *numeri reali* (vedi par. IX.6).

θ_i angolo di incidenza

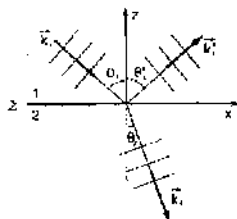
θ_i' angolo di riflessione

θ_r angolo di rifrazione

Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse z ortogonale al piano Σ di interfaccia, e il piano xy coincidente con l'interfaccia stessa (asse y ortogonale al piano del disegno).

Supponiamo che l'onda incidente provenga dal mezzo 1 con vettore d'onda k_i parallelo al piano xz ($k_{iy} = 0$) e formante un angolo θ_i con l'asse z (con la normale all'interfaccia). L'angolo θ_i è detto *angolo di incidenza* ed il piano xz *piano di incidenza*.

Se $\vec{k}_i'$ è il vettore d'onda dell'onda riflessa e $\vec{k}_r$ il vettore d'onda dell'onda rifratta, gli angoli θ_i' e θ_r definiti in figura (angoli che la direzione di propagazione dell'onda riflessa e quella dell'onda rifratta formano con la normale uscente da Σ verso il rispettivo semispazio) sono detti rispettivamente *angolo di riflessione* e *angolo di rifrazione*.

Note le caratteristiche dell'onda incidente, ci proponiamo di calcolare le caratteristiche delle onde emergenti (riflessa e rifratta). Tali caratteristiche vengono usualmente distinte in *caratteristiche cinematiche* (direzione di propagazione, frequenza e lunghezza d'onda) e *caratteristiche dinamiche* (stati di polarizzazione e intensità). Le une caratteristiche e le altre possono essere determinate applicando le condizioni al contorno [X.1] (con $\sigma = 0$ e $J_S = 0$) al campo elettrico e magnetico dell'onda incidente e delle onde

emergenti che, tenendo conto del teorema di Fourier, senza perdere in generalità possiamo assumere essere onde sinusoidali. Usando per tali onde la notazione complessa, i campi elettrico e magnetico delle tre onde possono essere scritti nella forma:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \vec{E}_{oi} e^{j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} \\ \vec{B}_i = \dfrac{n_1}{c} \hat{k}_i \times \vec{E}_i \end{cases} \qquad \text{onda incidente} \qquad [X.2.a]$$

$$\begin{cases} \vec{E}'_i = \vec{E}'_{oi} e^{j(\vec{k}'_i \cdot \vec{r} - \omega'_i t + \varphi')} \\ \vec{B}'_i = \dfrac{n_1}{c} \hat{k}'_i \times \vec{E}'_i \end{cases} \qquad \text{onda riflessa} \qquad [X.2.b]$$

$$\begin{cases} \vec{E}_r = \vec{E}_{or} e^{j(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \\ \vec{B}_r = \dfrac{n_2}{c} \hat{k}_r \times \vec{E}_r \end{cases} \qquad \text{onda rifratta} \qquad [X.2.c]$$

Osserviamo che in queste espressioni le relazioni che esprimono il campo magnetico $\vec{B}$ in funzione del rispettivo campo elettrico $\vec{E}$ non sono altro che un modo diverso di scrivere la [IX.32]; $\hat{k}$ rappresenta il versore del vettore d'onda di ciascuna onda. $\dfrac{c}{n_1}$ e $\dfrac{c}{n_2}$ rappresentano la velocità con cui le onde si propagano rispettivamente nel mezzo 1 (onda incidente e onda riflessa) e nel mezzo 2 (onda rifratta).

X.2.1. Caratteristiche cinematiche dell'onda riflessa e dell'onda rifratta. Legge di Snell

Le [X.1] (con $\sigma = 0$ e $J_S = 0$) ci dicono che sull'interfaccia fra i due mezzi (cioè per $z = 0$) i campi elettrici e magnetici nei due mezzi devono soddisfare relazioni di uguaglianza o di proporzionalità (a seconda che si parli della componente normale o tangenziale). Poiché tali relazioni devono valere in ogni stante t, e in qualunque punto del piano Σ, la loro validità richiede, come condizione necessaria, che gli argomenti degli esponenziali che compaiono nelle [X.2] siano tutti fra di loro uguali:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t = \vec{k}'_i \cdot \vec{r} - \omega'_i t + \varphi' = \vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r \qquad [X.3]$$

Dovendo queste relazioni valere per ogni t e ogni $\vec{r}$ (con $z = 0$), segue che deve essere

$$\begin{cases} 0 = \varphi' = \varphi_r \\ \omega_i = \omega'_i = \omega_r \\ \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}'_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} \end{cases} \qquad [X.4]$$

Le prime due di queste relazioni ci dicono che l'*onda riflessa e quella rifratta devono avere la stessa frequenza dell'onda incidente, e sul piano Σ di interfaccia per le tre onde si possono porre uguali a zero le rispettive fasi*

Notiamo che dal fatto che le tre onde abbiano la stessa frequenza segue che l'onda riflessa (che muovendosi nello stesso mezzo in cui si propaga l'onda incidente ha rispetto a questa la stessa velocità) ha anche la stessa lunghezza d'onda dell'onda incidente; mentre l'onda rifratta che ha diversa velocità ha lunghezza d'onda diversa. Ricordando che $\lambda\nu = v$, si ha più precisamente:

$$\begin{cases} \lambda'_i = \lambda_i = v_1/\nu = \dfrac{c}{n_1}\dfrac{2\pi}{\omega} \\ \lambda_r = v_2/\nu = \dfrac{c}{n_2}\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{n_1}{n_2}\lambda_i \end{cases} \qquad [X.5]$$

dove, come già ricordato, $v_1 = \dfrac{c}{n_1}$ e $v_2 = \dfrac{c}{n_2}$ sono le velocità delle onde nei due mezzi.

Vediamo ora quali conseguenze sulla cinematica delle onde si traggono dalla terza delle [X.4]. Tenendo conto che $\vec{k}_i$ giace nel piano xz ($k_{iy} = 0$) e che le [X.4] devono valere per $z = 0$, esse si esplicitano nella forma

$$k_{ix}x = k'_{ix}x + k'_{iy}y = k_{rx}x + k_{ry}y$$

Affinché queste relazioni siano valide, come devono, per ogni valore di x e y deve essere

$$\begin{cases} 0 = k'_{iy} = k_{ry} \\ k_{ix} = k'_{ix} = k_{rx} \end{cases} \qquad [X.6]$$

Le direzioni dell'onda riflessa e rifratta sono coplanari alla direzione dell'onda incidente

La prima di queste relazioni ci dice che i vettori d'onda $\vec{k}'_i$ e $\vec{k}_r$ dell'onda riflessa e dell'onda rifratta (avendo componente secondo y nulla) giacciono nel piano xz: *le direzioni di propagazione dell'onda riflessa e dell'onda rifratta sono coplanari con la direzione di propagazione dell'onda incidente.*

La seconda delle [X.6], ricordando che il vettore d'onda $\vec{k}$ è definito come il vettore di modulo $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ diretto secondo la direzione di propagazione dell'onda, diviene:

$$\frac{2\pi}{\lambda_i}\sin\theta_i = \frac{2\pi}{\lambda'_i}\sin\theta'_i = \frac{2\pi}{\lambda_r}\sin\theta_r$$

da cui, utilizzando le [X.5], segue immediatamente:

Legge della riflessione: $\theta_i = \theta'_i$

$$\sin\theta'_i = \sin\theta_i \qquad [X.7]$$

Legge di Snell: $n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_r$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{n_2}{n_1} \equiv n_{21} \quad \text{ovvero} \quad \sin\theta_r = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \equiv n_{12}\sin\theta_i \qquad [X.8]$$

La [X.7] ci dice che l'**angolo di riflessione è pari all'angolo di incidenza**: si dice anche che *la riflessione è speculare*.

La [X.8] è detta **legge di Snell**, ed esprime in termini semplici l'angolo di rifrazione in funzione dell'angolo di incidenza e degli indici di rifrazione n_1 ed n_2 dei due mezzi. Nella [X.8] abbiamo introdotto, come è d'uso, il

simbolo n_{21} (n_{12}) a indicare il rapporto $n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \left(n_{12} = \frac{n_1}{n_2} \right)$ fra gli indici di rifrazione. La quantità n_{21} viene detta *indice di rifrazione relativo del mezzo 2 rispetto al mezzo 1*.

Indice di rifrazione relativo

La [X.8] mostra che se $n_2 > n_1$ ($n_{21} > 1$), cioè se l'onda incidente proviene dal mezzo meno rifrangente, allora $\sin\theta_r < \sin\theta_i$ e dunque $\theta_r < \theta_i$: il raggio rifratto si avvicina alla normale al piano di interfaccia Σ. In questo caso, per qualunque valore dell'angolo di incidenza ($0 \leq \theta_i \leq \pi/2$, cioè $0 \leq \sin\theta_i \leq 1$) la legge di Snell ci dà un valore ammesso per $\sin\theta_r$ ($0 \leq \sin\theta_r \leq n_1/n_2 < 1$).

Se al contrario l'onda incidente proviene dal mezzo più rifrangente ($n_1 > n_2$), la direzione dell'onda rifratta si allontana dalla normale all'interfaccia Σ.

Per $\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1}$, si ha $\sin\theta_r = 1$ cioè $\theta_r = \pi/2$. In corrispondenza di questo valore dell'angolo di incidenza la direzione di propagazione dell'onda rifratta procede parallelamente al piano di interfaccia Σ; e la sua intensità, come vedremo meglio fra poco, diviene nulla.

Per angoli di incidenza ancora maggiori $\left(\frac{n_2}{n_1} < \sin\theta_i \leq 1 \right)$, la legge di Snell ci fornisce valori non ammessi per $\sin\theta_r$ ($\sin\theta_r > 1$), e non si può allora avere alcuna onda rifratta. Per questi valori dell'angolo di incidenza l'onda incidente viene allora solo riflessa; e come vedremo meglio fra poco, nell'ipotesi che stiamo facendo di mezzi completamente trasparenti (assenza di assorbimento nei due mezzi) l'intensità dell'onda riflessa è pari all'intensità dell'onda incidente (*riflessione totale*). L'angolo θ_i per cui $\boxed{\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1}}$ viene detto *angolo di riflessione totale o angolo limite*.

Riflessione totale

Angolo di riflessione totale o angolo limite

La cinematica della riflessione e della rifrazione, le cui leggi sono state da noi qui ricavate a partire dalle condizioni di raccordo [X.1], può essere ricavata anche con approcci diversi. In meccanica, trattando le onde in mezzi elastici, abbiamo ricavato le leggi della riflessione e della rifrazione partendo dal principio di Huygens-Fresnel; lo stesso procedimento è applicabile anche alle onde elettromagnetiche, e si perviene naturalmente alle stesse [X.7] e [X.8].

Lo stesso risultato può essere ottenuto anche applicando il **principio di Fermat**, secondo cui il percorso seguito dalla luce (e dalle onde elettromagnetiche in generale) per andare da una posizione A a una posizione B qualunque è quello che rende minimo (o comunque stazionario) il tempo di percorrenza. Il principio di Fermat è un principio di grande generalità, che consente di pervenire con procedimento compatto e celere a una vasta gamma di risultati di grande interesse pratico e teorico: in particolare esso è stato ed è uno strumento di grande efficacia per l'elaborazione delle conseguenze della Teoria della Relatività Generale. Riteniamo dunque istruttivo mostrare, nell'esempio E.X.1., come da tale principio possa essere ricavata la legge di Snell [X.8].

Principio di Fermat

Esempi

E.X.1. *Una sorgente puntiforme di luce (o più generalmente di onde elettromagnetiche) è posta entro un mezzo 1 di indice di rifrazione n_1 nel punto A a distanza d_1 dal piano Σ di interfaccia con un mezzo 2 trasparente di indice di*

rifrazione n_2. Consideriamo un punto B internamente al mezzo 2, a distanza d_2 da Σ. Mostrare che fra i possibili raggi congiungenti A con B, quello per cui è minimo il tempo di percorrenza t_p soddisfa la legge di Snell [X.8].

Internamente a ogni materiale omogeneo, in cui la velocità della luce è la stessa in ogni posizione e in ogni direzione, il percorso che rende minimo il tempo di percorrenza è quello di minima lunghezza, cioè quello rettilineo. Pertanto il percorso di minimo tempo t_p non può che essere una spezzata ACB.

Dette A' e B' le proiezioni di A e B su Σ, e d la distanza $A'B'$, si tratta di trovare la distanza x di C da A' per cui è minimo il tempo:

$$t_p = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} = n_1 \frac{AC}{c} + n_2 \frac{CB}{c}$$

D'altra parte si ha $AC = \sqrt{d_1^2 + x^2}$ e $CB = \sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}$; per cui

$$t_p = \frac{1}{c}\left(n_1 \sqrt{d_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}\right),$$

Per trovare il minimo, deriviamo rispetto a x e uguagliamo a zero; abbiamo:

$$\frac{dt_p}{dx} = \frac{1}{c}\left(\frac{n_1 x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}}\right) = 0$$

Osserviamo ora che $x/\sqrt{d_1^2 + x^2} = \sin\theta_i$ e $(d-x)/\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2} = \sin\theta_r$; per cui la precedente relazione ci fornisce:

Principio di Fermat e legge di Snell

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$$

che equivale alla legge di Snell.

E.X.2. *L'indice di rifrazione dell'acqua vale circa $n_a = 1,33$. Calcolare l'angolo di riflessione totale nell'interfaccia acqua-aria.*

Sia θ_L l'angolo limite al di sopra del quale si ha riflessione totale, deve essere

$$n_a \operatorname{sen}\theta_L = n_{aria} \operatorname{sen}(\pi/2)$$

da cui:

$$\sin\theta_L = \frac{n_{aria}}{n_{acqua}} = \frac{1}{n_a} = \frac{1}{1,33} \simeq 0,75$$

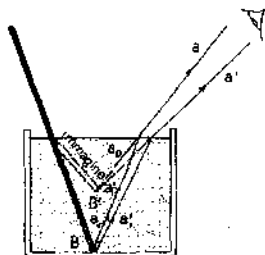
Il corrispondente angolo è $\theta_L \simeq 49°$.

E.X.3. *Una sbarretta rettilinea è parzialmente immersa in una vaschetta piena d'acqua. Discutere qualitativamente l'immagine riflessa che l'occhio vede della porzione non immersa, e l'immagine rifratta della porzione immersa.*

Come vedremo in dettaglio nel cap. XI, un'onda sferica di piccola lunghezza d'onda emessa da una sorgente puntiforme può essere pensata come decomposta in un insieme di piccolissimi coni aventi vertice nel punto sorgente, all'interno di ciascuno dei quali si propaga un'onda approssimativamente piana. Ciascuno di questi coni si dice *raggio*.

I raggi a_r e a_r' provenienti dall'estremo A e riflessi sulla superficie libera, giungono all'occhio dalle direzioni a e a'. L'occhio vede i prolungamenti di tali raggi incontrarsi in A', che rappresenta l'immagine riflessa di A.

Tale immagine viene detta *virtuale*, perché punto di incontro di *prolungamenti* geometrici di raggi reali. Analogamente si potrebbe costruire l'immagine di ogni altro punto della porzione non immersa della sbarretta, la cui immagine complessiva è data dunque dalla figura ombreggiata.

Lo stesso procedimento si applica al caso della rifrazione. I raggi a_r e a_r' provenienti dall'estremo immerso B e rifratti sulla superficie libera dell'acqua, giungono all'occhio dalle direzioni a e a'. L'occhio vede incontrare i prolungamenti di tali raggi in B', che rappresenta l'immagine virtuale, rifratta, di B.

X.2.2. Caratteristiche dinamiche della riflessione e della rifrazione. Relazioni di Fresnel

Abbiamo visto che le caratteristiche cinematiche della riflessione-rifrazione possono essere ricavate imponendo, come richiesto dalle condizioni al contorno [X.1], che sulla superficie Σ di separazione fra i due dielettrici siano, nei due mezzi, fra di loro uguali *gli argomenti* dei campi ondulatori [X.2]. Le caratteristiche dinamiche si ottengono invece imponendo le stesse condizioni [X.1] alle *ampiezze* di tali campi.

Tenuto conto che sulla superficie di interfaccia Σ è $\sigma = 0$ e $J_S = 0$, e tenuto conto che nel mezzo 1 è presente sia l'onda incidente che l'onda riflessa, mentre nel mezzo 2 è presente solo l'onda rifratta, tali condizioni si esplicitano nella forma:

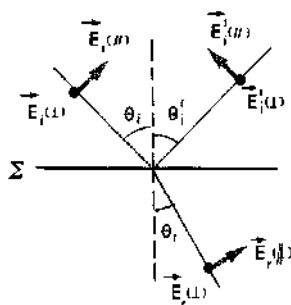
$$\begin{cases} [\varepsilon_1(\vec{E}_{oi} + \vec{E}'_{oi}) - \varepsilon_2 \vec{E}_{or}] \cdot \hat{n} = 0 \\ (\vec{E}_{oi} + \vec{E}'_{oi} - \vec{E}_{or}) \times \hat{n} = 0 \end{cases} \qquad \text{[X.9.a]}$$

$$\begin{cases} (n_1 \hat{k}_i \times \vec{E}_{oi} + n_1 \hat{k}'_i \times \vec{E}'_{oi} - n_2 \hat{k}_r \times \vec{E}_{or}) \cdot \hat{n} = 0 \\ \left[\dfrac{n_1}{\mu_1} (\hat{k}_i \times \vec{E}_{oi} + \hat{k}'_i \times \vec{E}'_{oi}) - \dfrac{n_2}{\mu_2} \hat{k}_r \times \vec{E}_{or}\right] \times \hat{n} = 0 \end{cases} \qquad \text{[X.9.b]}$$

dove $\hat{n}$ indica il versore della normale a Σ, e dunque il prodotto scalare per $\hat{n}$ e il prodotto vettoriale per $\hat{n}$ rappresentano un modo compatto per indicare la componente dei campi rispettivamente normalmente e parallelamente a Σ. Le [X.9.a] esplicitano dunque (nel caso che i campi siano rappresentati dalle onde piane [X.2]) le condizioni [X.1.a] per i campi elettrici; e le [X.9.b] esplicitano le [X.1.b] per i campi magnetici.

Conviene trattare separatamente il caso in cui le onde siano polarizzate linearmente in direzione ortogonale al piano di incidenza (contenente $\hat{k}_i$ e $\hat{n}$), cioè col vettore elettrico parallelo a Σ ((in questo caso specifichiamo i vettori con il simbolo $\perp$); e il caso in cui le onde siano polarizzate linearmente parallelamente al piano di incidenza (vettore elettrico contenuto nel piano definito da $\hat{k}_i$ ed $\hat{n}$, nel qual caso specifichiamo i vettori con il simbolo //). Il caso generale si otterrà decomponendo l'onda in tali componenti di polarizzazione.

Vediamo prima il caso che l'onda sia polarizzata ortogonalmente al piano di incidenza. In questo caso le [X.9.b] divengono:

$$\begin{cases} E_{oi}(\perp) + E'_{oi}(\perp) - E_{or}(\perp) = 0 \\ \dfrac{n_1}{\mu_1} [E_{oi}(\perp) - E'_{oi}(\perp)] \cos\theta_i - \dfrac{n_2}{\mu_2} E_{or}(\perp) \cos\theta_r = 0 \end{cases} \qquad \text{[X.10]}$$

da cui con semplici passaggi algebrici segue:

polarizzazione normale al piano di incidenza

$$\begin{cases} \dfrac{E'_{oi}(\perp)}{E_{oi}(\perp)} = \dfrac{(n_1/\mu_1)\cos\theta_i - (n_2/\mu_2)\cos\theta_r}{(n_1/\mu_1)\cos\theta_i + (n_2/\mu_2)\cos\theta_r} \\[2ex] \dfrac{E_{or}(\perp)}{E_{oi}(\perp)} = \dfrac{2\,(n_1/\mu_1)\cos\theta_i}{(n_1/\mu_1)\cos\theta_i + (n_2/\mu_2)\cos\theta_r} \end{cases} \qquad \text{[X.11]}$$

Almeno per frequenze ottiche, si può porre in ottima approssimazione $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq 1$ in tutti i mezzi trasparenti. Dividendo allora numeratore e denominatore delle [X.11] per n_1, e tenuto conto della legge di Snell, con passaggi immediati si ottiene:

Relazioni di Fresnel per polarizzazione normale al piano di incidenza

polarizzazione normale al piano di incidenza

$$\begin{cases} \dfrac{E'_{oi}(\perp)}{E_{oi}(\perp)} = -\dfrac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \\[2ex] \dfrac{E_{or}(\perp)}{E_{oi}(\perp)} = \dfrac{2\sin\theta_r\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \end{cases} \qquad \text{[X.12]}$$

Le [X.12] sono dette relazioni di Fresnel per il campo elettrico di onde polarizzate normalmente: esse legano - per onde con tale stato di polarizzazione - il campo elettrico delle onde emergenti (onda riflessa e onda rifratta) al campo elettrico dell'onda incidente, in funzione dell'angolo di incidenza θ_i e dell'angolo di rifrazione θ_r. Le [X.12] sono naturalmente equivalenti alle [X.11] se in queste si pone $\mu_1 \equiv \mu_2 \simeq 1$. Sostituendo

$$\cos\theta_r = \sqrt{1 - \sin^2\theta_r} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_i}$$

nelle [X.11], esse legano il campo elettrico delle onde emergenti al campo elettrico dell'onda incidente in funzione di θ_i, n_1, n_2 (anziché di θ_i e θ_r).

Con la stessa procedura, a partire dalla prima delle [X.9.a] e dalle [X.9.b], si calcolano immediatamente le analoghe delle [X.11] e delle [X.12] nel caso di onde con campo elettrico polarizzato parallelamente al piano di incidenza. Si ottiene:

polarizzazione parallela al piano di incidenza

$$\begin{cases} \dfrac{E'_{oi}(//)}{E_{oi}(//)} = \dfrac{(n_2/\mu_2)\cos\theta_i - (n_1/\mu_1)\cos\theta_r}{(n_2/\mu_2)\cos\theta_i + (n_1/\mu_1)\cos\theta_r} \\[2ex] \dfrac{E_{or}(//)}{E_{oi}(//)} = \dfrac{2\,(n_1/\mu_1)\cos\theta_i}{(n_2/\mu_2)\cos\theta_i + (n_1/\mu_1)\cos\theta_r} \end{cases} \qquad \text{[X.13]}$$

Ovvero (nell'approssimazione $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq 1$):

Relazioni di Fresnel per polarizzazione parallela

polarizzazione parallela al piano di incidenza

$$\begin{cases} \dfrac{E'_{oi}(//)}{E_{oi}(//)} = \dfrac{\mathrm{tg}(\theta_i - \theta_r)}{\mathrm{tg}(\theta_i + \theta_r)} \\[2ex] \dfrac{E_{or}(//)}{E_{oi}(//)} = \dfrac{2\sin\theta_r\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_r)\cos(\theta_i - \theta_r)} \end{cases} \qquad \text{[X.14]}$$

Ricordando che l'intensità media di un'onda sinusoidale è data da

$$I = \frac{E_0^2}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{E_0^2}{2Z}$$

(vedi eq. [IX.63.a]) quadrando le relazioni di Fresnel per i campi è immediato ottenere, per i diversi stati di polarizzazione, le relazioni che legano l'intensità delle onde riflessa e rifratta all'intensità dell'onda incidente. Il rapporto

$$\frac{I_i'}{I_i} = \left(\frac{E_{0i}'}{E_{0i}}\right)^2 = r\left(\theta_i, \frac{n_2}{n_1}\right)$$

Riflettanza

viene detto *riflettanza* dell'interfaccia; il rapporto

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{E_{0r}^2 n_2}{E_{0i}^2 n_1} = t\left(\theta_i, \frac{n_2}{n_1}\right)$$

Trasmittanza

viene detto *trasmittanza* dell'interfaccia.

Abbiamo indicato esplicitamente il fatto che r e t dipendono da θ_i e dal rapporto n_2/n_1 fra gli indici di rifrazione (ovvero da θ_i e θ_r). Usando le [X.12] e [X.14] abbiamo:

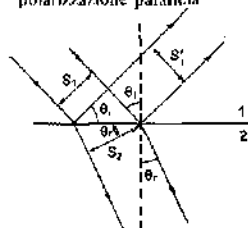
polarizzazione normale

$$\begin{cases} r_\perp = \dfrac{\sin^2(\theta_i - \theta_r)}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)} & \text{riflettanza} \\[2ex] t_\perp = \dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{4\sin^2\theta_r\cos^2\theta_i}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)} & \text{trasmittanza} \end{cases} \qquad \text{[X.15]}$$

Riflettanza e trasmittanza per polarizzazione normale

polarizzazione parallela

$$\begin{cases} r_{//} = \dfrac{\mathrm{tg}^2(\theta_i - \theta_r)}{\mathrm{tg}^2(\theta_i + \theta_r)} & \text{riflettanza} \\[2ex] t_{//} = \dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{4\sin^2\theta_r\cos^2\theta_i}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)\cos^2(\theta_i - \theta_r)} & \text{trasmittanza} \end{cases} \qquad \text{[X.16]}$$

Riflettanza e trasmittanza per polarizzazione parallela

Queste relazioni vengono dette *relazioni di Fresnel per le intensità*.

Ricordando la definizione di intensità di un'onda (energia per unità di tempo attraverso l'unità di superficie normale alla direzione di propagazione dell'onda) poiché la conservazione dell'energia impone che l'energia incidente sull'unità di superficie dell'interfaccia sia pari all'energia emergente nell'unità di tempo, deve essere $I_i \cos\theta_i = I_i' \cos\theta_i + I_r \cos\theta_r$; ovvero, dividendo per $I_i \cos\theta_i$:

$$1 = r + t\frac{\cos\theta_r}{\cos\theta_i} \qquad \text{[X.17]}$$

Potenza attraverso S_1 : $I_i S_1$
Potenza attraverso S_1': $I_i' S_1$
Potenza attraverso S_2 : $I_r S_2$
con $S_1' = S_1$ e

$$\frac{S_1}{\cos\theta_i} = \frac{S_2}{\cos\theta_r},$$

$$I_i S_1 = I_i' S_1 + I_r S_1 \frac{\cos\theta_r}{\cos\theta_i}$$

È facile verificare che questa relazione è identicamente soddisfatta dalle [X.15] e [X.16]. Osserviamo che per $\theta_r = \pi/2$ (situazione che può presentarsi solo se $\theta_i < \theta_r$, cioè se $n_1 < n_2$) dalle [X.15] e [X.16] risulta $t_\perp = t_{//} = 0$ e $r_\perp = r_{//} = 1$. L'intensità dell'onda rifratta si annulla, mentre l'onda riflessa ha la stessa intensità dell'onda incidente (riflessione totale), come avevamo anticipato alla fine del paragrafo X.2.1.

Abbiamo già osservato che un'onda completamente non polarizzata (cioè un'onda per la quale il vettore $\vec{E}$ ha componenti di valore efficace uguale in tutte le direzioni e con fasi tra loro indipendenti) può essere considerata come combinazione, con ugual peso, di un'onda polarizzata normalmente e di un'onda polarizzata parallelamente al piano di incidenza. Per un'onda non polarizzata, riflettanza r e trasmittanza t saranno date dunque dalla media, rispettivamente di $r_\perp$ e $r_{//}$ e di $t_\perp$ e $t_{//}$. Si ha pertanto

Onda non polarizzata

$$\begin{cases} r = \dfrac{1}{2}(r_\perp + r_{//}) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin^2(\theta_i - \theta_r)}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)} + \dfrac{\text{tg}^2(\theta_i - \theta_r)}{\text{tg}^2(\theta_i + \theta_r)}\right] \\ t = \dfrac{1}{2}(t_\perp + t_{//}) = 2\,\dfrac{n_2 \sin^2\theta_r \cos^2\theta_i}{n_1 \sin^2(\theta_i + \theta_r)}\left(\dfrac{\cos^2(\theta_i - \theta_r) + 1}{\cos^2(\theta_i - \theta_r)}\right) \end{cases} \quad \text{[X.18]}$$

In particolare, per incidenza normale ($\theta_i = \theta_r = 0$), le [X.18] (che vanno calcolate in questo caso limite direttamente a partire dalle [X.11] e [X.13]) divengono

Onda incidente normalmente alla interfaccia

$$r = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad t = \left(\frac{2\, n_1 n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{[X.19]}$$

Dalle [X.16] risulta che esiste un angolo di incidenza θ_{iB} per cui $r_{//} = 0$. Quest'angolo, detto *angolo di Brewster*, è quello per cui $\text{tg}(\theta_{iB} + \theta_{rB}) = \infty$, essendo θ_{rB} l'angolo di rifrazione corrispondente a θ_{iB}. Affinché sia $\text{tg}(\theta_{iB} + \theta_{rB}) = \infty$, deve essere $\theta_{iB} + \theta_{rB} = \pi/2$, ovvero $\theta_{rB} = \pi/2 - \theta_{iB}$. Si ha dunque $(n_2/n_1) = (\sin\theta_{iB})/(\sin\theta_{rB}) = (\sin\theta_{iB})/(\cos\theta_{iB}) = \text{tg}\,\theta_{iB}$. Da cui

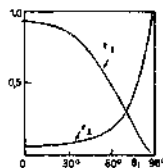
Angolo di Brewster

$$\theta_{iB} = \text{artg}\,\frac{n_2}{n_1} \quad \text{[X.20]}$$

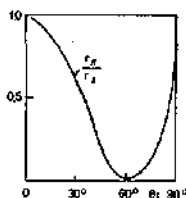
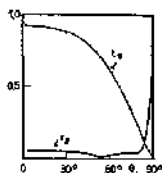
Se un'onda piana completamente non polarizzata incide con angolo di incidenza pari all'angolo di Brewster, l'onda riflessa è completamente polarizzata con vettore elettrico ortogonale al piano di incidenza (cioè parallelo al piano riflettente). Anche per angoli di incidenza diversi dall'angolo di Brewster, è $r_{//} < r_\perp$; cosicché anche se l'onda incidente è completamente non polarizzata, l'*onda riflessa è almeno parzialmente polarizzata*. Benché esistano tecniche più efficaci per produrre onde polarizzate (tecniche basate sull'uso di mezzi anisotropi) questo fatto ha notevoli applicazioni pratiche; in particolare, l'uso di occhiali da sole con lenti trasparenti alla sola luce polarizzata verticalmente, attenua fortemente la visibilità dei riflessi generati dal terreno, essendo questi polarizzati prevalentemente sul piano orizzontale.

Esempi

1,0 0,5 $r_\perp$ $r_{//}$ 0 30° 60° θ_i 90°

E.X.4. *Discutiamo l'andamento delle relazioni di Fresnel per il caso di un vetro (con indice di rifrazione $n_2 = 1,5$) immerso in aria ($n_1 = 1$).*

Il calcolo delle riflettanze corrispondenti agli stati di polarizzazione normale e parallela si effettua facilmente tramite le [X.15] e [X.16], dopo avere calcolato per ogni angolo di incidenza θ_i il corrispondente valore di θ_r mediante la legge di Snell. Il calcolo delle corrispondenti trasmittanze può essere fatto facilmente tramite la [X.17]: $t = (1 - r)\,\dfrac{\cos\theta_r}{\cos\theta_i}$.

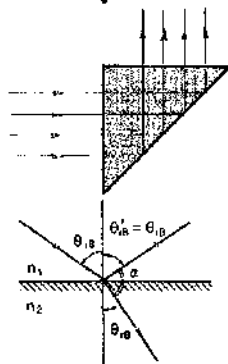
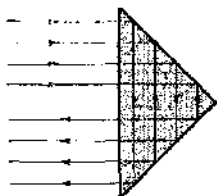
Gli andamenti di r e t che si ricavano così sono mostrati nelle prime due figure. Come si vede, per incidenza normale ($\theta_i = \theta_r = 0$) la riflettanza è di circa il 7%, e la trasmittanza di circa il 93%. Via via che aumenta l'angolo di incidenza, la trasmittanza diminuisce, per ridursi a zero per $\theta_i = 90°$. La riflettanza $r_\perp$, all'aumentare di θ_i aumenta progressivamente, fino a portarsi al valore $r_\perp = 1$ per incidenza tangenziale all'interfaccia ($\theta_i = 90°$); la riflettanza $r_{//}$ invece diminuisce lentamente all'aumentare di θ_i, per annullarsi per $\theta_i = 56°$ (angolo di Brewster) ed aumentare successivamente per divenire anch'essa pari a 1 per $\theta_i = 90°$.

Nella terza figura riportiamo invece l'andamento del rapporto $r_{//}/r_\perp$ fra la riflettanza di radiazione polarizzata parallelamente e la riflettanza di radiazione polarizzata normalmente. Come si vede, tale rapporto è sempre minore di 1; ma in particolare per θ_i compreso fra $\sim 50°$ e $\sim 70°$ si mantiene sempre inferiore a 0,1. Se una radiazione completamente non polarizzata incide dunque ad angoli grandi ($\theta_i \simeq 60°$), la radiazione riflessa è quasi completamente polarizzata, con vettore elettrico parallelo al piano di interfaccia fra aria e vetro.

E.X.5. *Il fenomeno della riflessione totale* ha molte applicazioni negli strumenti ottici. Alcune configurazioni tipiche di impiego di *prismi a riflessione* totale sono mostrate nelle due figure.

E.X.6. *Dimostrare che quando l'angolo di incidenza è pari all'angolo di Brewster, il raggio riflesso e quello rifratto formano fra di loro un angolo retto.*

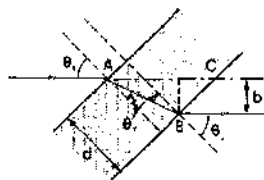
Sia α l'angolo fra il raggio riflesso e quello rifratto. Dalla figura risulta immediatamente:

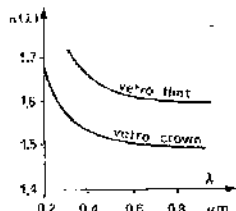
$$\alpha = \pi - \theta_{iB} - \theta_{rB} = \pi - (\theta_{iB} + \theta_{rB})$$

D'altro lato, la condizione che definisce l'angolo di Brewster deriva dalla condizione $\theta_{iB} + \theta_{rB} = \pi/2$; inserendo questa condizione nella relazione precedente risulta immediatamente $\alpha = \pi/2$, che è quanto volevamo dimostrare.

X.3. Dispersione della luce. Analisi spettrale e misura dell'indice di rifrazione

Nel precedente paragrafo abbiamo trattato teoricamente il comportamento delle onde elettromagnetiche sulla superficie di interfaccia fra due dielettrici completamente trasparenti. Tenuto conto di quanto abbiamo visto nel par. IX.6, ci aspettiamo che in realtà i due dielettrici siano solo parzialmente trasparenti, ed inoltre che il coefficiente di assorbimento e l'indice di rifrazione dipendano dalla frequenza dell'onda incidente.

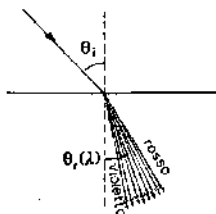
In particolare, nella regione di lunghezza d'onda compresa fra l'ultravioletto e il lontano infrarosso ($0{,}1\ \mu m \leq \lambda \leq 100\ \mu m$) sono presenti in tutti i materiali solidi (ma anche liquidi e gassosi) molteplici bande di assorbimento che occupano la maggior parte dello spettro, lasciando libere solo particolari «finestre» di trasparenza. Si dicono di solito «trasparenti» i materiali che abbiano una finestra di trasparenza che copra lo spettro visibile (vetri, materie plastiche, ecc.); di solito tale finestra di trasparenza si estende anche al vicino infrarosso ($0{,}3\ \mu m \leq \lambda \leq 2{,}5\ \mu m$), anche se il cammino di assorbimento difficilmente è maggiore di qualche centimetro, o addirittura talvolta di qualche millimetro.

L'esperienza dimostra che per i materiali trasparenti, fino a che lo spessore è piccolo rispetto al cammino di assorbimento, le relazioni di Fresnel descrivono con ottima approssimazione il comportamento reale.

Va osservato che quando si ha a che fare con una lastra di materiale trasparente, per attraversarla la radiazione incontra prima una interfaccia $n_1 n_2$, e poi una interfaccia $n_2 n_1$: se supponiamo che si tratti di una lastra a facce piane parallele, allora il raggio luminoso emerge parallelamente a quello incidente, traslato di un tratto b pari a $b = AB \sin B\hat{A}C$; ed essendo $AB = \dfrac{d}{\cos\theta_r}$ e $B\hat{A}C = (\theta_i - \theta_r)$:

$$b = \frac{d \sin(\theta_i - \theta_r)}{\cos\theta_r} \qquad [X.21]$$

dove d è lo spessore della lastra.

Nelle regioni di lunghezza d'onda per cui il materiale è trasparente, sappiamo dal par. IX.6 che l'indice di rifrazione è funzione della lunghezza d'onda ($n = n(\lambda)$). Più precisamente, salvo che nelle zone di dispersione anomala, $n(\lambda)$ è una funzione monotona decrescente della lunghezza d'onda λ. Ad esempio l'andamento di $n(\lambda)$ nella regione del visibile ($0{,}3\ \mu m < \lambda \leq 0{,}8\ \mu m$) per due vetri comunemente usati in apparecchiature ottiche (vetro flint e vetro crown) è quello mostrato in figura.

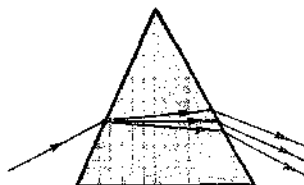
Supponiamo che sull'interfaccia che separa l'aria da un materiale trasparente incida un'onda piana non monocromatica, cioè un'onda il cui spettro di Fourier comprende molte lunghezze d'onda (o molte frequenze). In generale lo spettro di Fourier non è approssimabile convenientemente come una sommatoria discreta pesata sulle varie frequenze, ma piuttosto come un integrale su un continuo di frequenze; al posto della [VIII.37] si avrà cioè un'espressione del tipo

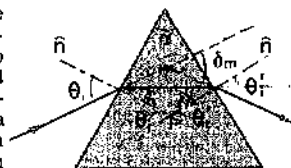
$$f(x, t) = \int g(\omega)\, e^{j(\omega t - kx)}\, d\omega$$

Se la funzione $g(\omega)$ nello sviluppo dell'intensità dell'onda è costante in funzione di ω (spettro «piatto») si usa dire che la radiazione in oggetto è *bianca*. Se dunque una radiazione non monocromatica (ad esempio bianca) incide sull'interfaccia a un angolo θ_i diverso da zero, poiché l'indice di rifrazione è funzione di λ, ogni componente armonica dello spettro viene rifratta a un'angolo diverso, così come viene mostrato in figura (in misura esaltata rispetto alla realtà). Questo fenomeno è detto *dispersione*.

Dispersione

Se si tratta di radiazione luminosa, poiché ogni diversa frequenza è avvertita dall'occhio come un diverso colore, la luce bianca incidente viene scissa in *componenti cromatiche*. Misurando l'intensità dell'onda in funzione dell'angolo di rifrazione θ_r è così possibile effettuare l'*analisi spettrale* dell'onda, cioè misurare il peso $g(\omega)$ che ogni componente armonica ha nello sviluppo di Fourier dell'onda.

Analisi spettrale

Naturalmente, per effettuare le misure è necessario che il raggio rifratto venga fatto nuovamente emergere dal mezzo dielettrico verso l'aria. Se per fare ciò si predispone una interfaccia dielettrico-aria parallela alla prima interfaccia aria-dielettrico (materiale analizzatore a forma di lastra piana), come abbiamo già osservato tutte le componenti del raggio emergente escono parallelamente alla direzione del raggio incidente. In questo modo riesce difficile evitare sovrapposizioni fra le varie componenti del raggio disperso e fra queste e il raggio incidente, cosicché l'analisi spettrale risulta difficoltosa. Per evitare questa difficoltà, il materiale analizzatore viene costruito nella forma di *prisma*.

Se un prisma a sezione triangolare isoscele viene investito da luce monocromatica, è facile vedere – e noi lo mostriamo nell'esempio E.X.7 – che l'angolo di deviazione totale δ del raggio emergente rispetto a quello incidente diviene minimo ($\delta = \delta_m$) quando la luce viene fatta incidere ad un angolo θ_i tale che internamente al prisma il raggio proceda parallelamente alla base. In questa situazione si ha perfetta simmetria geometrica fra raggio incidente e raggio emergente, ed è $\theta_i = \theta_i'$ e $\theta_r = \theta_r'$. In base a semplici considerazioni geometriche dimostrate nell'esempio E.X.7, si ha in queste condizioni $\theta_i = \dfrac{\delta_m + \alpha}{2}$ e $\theta_r = \dfrac{\alpha}{2}$; per cui

$$n = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{\sin\left(\dfrac{\delta_m + \alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \qquad [X.22]$$

Misura dell'indice di rifrazione

Poiché l'angolo al vertice α del prisma è noto, una misura dell'angolo di deflessione minima δ_m consente di misurare l'indice di rifrazione n del prisma rispetto all'aria per la considerata lunghezza d'onda.

Esempio

E.X.7. *Mostrare che l'angolo di deflessione δ diviene minimo quando $\theta_i' = \theta_i$ (e $\theta_r' = \theta_r$).*

Dal triangolo DEB si ha:

$$\delta = (\theta_i - \theta_r) + (\theta_i' - \theta_r') = (\theta_i + \theta_i') - (\theta_r + \theta_r')$$

Dal quadrangolo $ABCD$ si ha che l'angolo in C vale $(\pi - \alpha)$; e dal triangolo DBC risulta pertanto:

$$\theta_r + \theta_r' = \alpha \qquad [X.23]$$

La relazione precedente diviene dunque:

$$\theta_i + \theta_i' = \delta + (\theta_r + \theta_r') = \delta + \alpha \qquad [X.24]$$

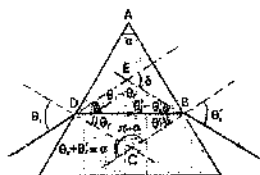
Per trovare l'angolo di deviazione minima δ_m, uguagliamo a zero la derivata $\dfrac{d\delta}{d\theta_i}$. Dalla [X.24], tenuto conto che α è costante, risulta:

$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = \frac{d\theta_i}{d\theta_i} + \frac{d\theta_i'}{d\theta_i} = 1 + \frac{d\theta_i'}{d\theta_i}$$

per cui la condizione di δ minimo diviene

$$\frac{d\theta_i'}{d\theta_i} = -1 \qquad [X.25]$$

D'altra parte per la legge di Snell possiamo scrivere

$$\begin{cases} \sin\theta_i = n\sin\theta_r \\ \sin\theta_i' = n\sin\theta_r' \end{cases}$$

Indice di rifrazione di alcune sostanze per onde elettromagnetiche (valor medio nella regione visibile dello spettro).

Sostanza	n
Acqua	1,33
Alcool etilico	1,36
Aria	1,00029
Bisolfuro di carbonio	1,63
Cloruro di sodio	1,52
Diamante	2,42
Ghiaccio	1,31
Idrogeno	1,00014
Ossido di carbonio	1,00045
Quarzo	1,51
Sodio (liquido)	4,22
Vetro crown	1,52
Vetro flint	1,65

I dati si riferiscono alla temperatura ambiente e, per le sostanze gassose, alla pressione di 1 atmosfera.

Differenziando:

$$\begin{cases} \cos\theta_i\, d\theta_i = n\cos\theta_r\, d\theta_r \\ \cos\theta_i'\, d\theta_i' = n\cos\theta_r'\, d\theta_r' \end{cases}$$

Ma dalla[X.23] risulta:

$$d\theta_r + d\theta_r' = 0\,; \qquad \text{ovvero} \quad d\theta_r' = -d\theta_r$$

per cui le relazioni precedenti divengono:

$$\begin{cases} \cos\theta_i\, d\theta_i = n\cos\theta_r\, d\theta_r \\ \cos\theta_i'\, d\theta_i' = -n\cos\theta_r'\, d\theta_r \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro fra queste equazioni otteniamo:

$$\frac{d\theta_i'}{d\theta_i} = -\frac{\cos\theta_r'}{\cos\theta_r}\,\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_i'}$$

Per la [X.25], la configurazione di minima deviazione δ si ottiene uguagliando questa espressione a -1; tenuto conto inoltre che $\theta_r' = \alpha - \theta_r$ (per la [X.23]), abbiamo che la configurazione per cui δ risulta pari al suo valor minimo δ_m si ha per

$$\frac{\cos(\alpha-\theta_r)}{\cos\theta_r}\cdot\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_i'} = 1$$

Questa relazione è soddisfatta per $\theta_i' = \theta_i$ e $\theta_r = \alpha/2 = \theta_r'$, che è quanto volevamo dimostrare. In tale ipotesi, tenuto conto anche della [X.24], si ha in definitiva

Angolo di deviazione minima

$$\theta_i' = \theta_i = \frac{\alpha+\delta_m}{2}$$

$$\theta_r' = \theta_r = \frac{\alpha}{2}$$

da cui segue la [X.22].

X.4. Riflessione su superfici metalliche lucide

Riflessione su superficie metallica ideale

La teoria della riflessione su superficie metallica di un'onda elettromagnetica proveniente da un mezzo trasparente è, in linea di principio e nei fatti, più complessa rispetto al caso dell'interfaccia fra dielettrici trasparenti, perché le condizioni di raccordo [X.1] contengono al secondo membro le quantità σ e J_S. Per conseguenza della conducibilità elettrica del mezzo, come abbiamo visto nel par. IX.7, internamente al metallo l'intensità dell'onda rifratta si riduce a zero entro spessori molti piccoli di materiale in prossimità della superficie.

Tuttavia per un metallo «ideale» (conducibilità infinita) e per radiazione di lunghezza d'onda molto maggiore delle dimensioni atomiche, si può ritenere valida l'approssimazione che tale assorbimento avvenga entro uno spessore nullo, ed allora la trattazione teorica della riflessione diviene molto semplice. In tal caso, nelle [X.1] i campi $\vec{E}_2, \vec{B}_2$ entro il secondo mezzo (metallico) possono essere posti uguali a zero; e le [X.1] stesse divengono:

$$\begin{cases} D_{1n} = \sigma \\ E_{1t} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{1n} = 0 \\ H_{1t} = J_S \end{cases} \qquad \text{[X.26]}$$

dove $\vec{E}_1$ e $\vec{B}_1$ (nonché $\vec{D}_1$ e $\vec{H}_1$) sono i campi nel mezzo dielettrico (che in particolare può essere l'aria, o il vuoto). In pratica, per una superficie lucidata di metallo puro, questa approssimazione è valida per radiazione di lunghezza d'onda $\lambda \geq (0{,}5 \div 1)\,\mu m$; per alcuni metalli (ad esempio per l'alluminio), anche per $\lambda \geq 0{,}3\,\mu m$.

Nell'ipotesi che valgano le [X.26], tenuto conto che nel mezzo 1 è presente sia l'onda incidente $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ che l'onda riflessa $(\vec{E}_i', \vec{B}_i')$, e dunque $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_i'$ e $\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_i'$; le [X.26] stesse si esplicitano nella forma:

$$\begin{cases} E_{in} = -E_{in}' + \sigma/\varepsilon \\ E_{it} = -E_{it}' \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{in} = -B_{in}' \\ B_{it} = -B_{it}' + \mu J_S \end{cases} \qquad \text{[X.26.a]}$$

Caratteristiche cinematiche dell'onda riflessa

Con ragionamenti del tutto analoghi a quelli da noi svolti nel par. X.2 nel caso dell'interfaccia fra due dielettrici, le caratteristiche cinematiche dell'onda riflessa seguono dalle [X.26.a] imponendo la condizione che tutte le grandezze che in esse compaiono siano funzioni dello stesso argomento (abbiano la stessa dipendenza spazio temporale sulla superficie metallica): segue che *l'onda riflessa ha la stessa frequenza* e la stessa lunghezza d'onda *dell'onda incidente*; e che *l'angolo di riflessione è pari all'angolo di incidenza.* Quanto alle caratteristiche dinamiche, vediamo che nell'approssimazione in cui valgono le [X.26.a] *la componente del campo elettrico tangenziale alla superficie* metallica *cambia semplicemente segno* passando dall'onda incidente all'onda riflessa, *mantenendo invariato il suo modulo*; e lo stesso accade alla componente normale di $\vec{B}$.

Caratteristiche dinamiche dell'onda riflessa

Tenuto conto che per l'onda riflessa (così come accade per qualunque onda elettromagnetica) sussiste una relazione univoca che in ogni mezzo lega il modulo di $\vec{E}$ al modulo di $\vec{B}$, segue che il modulo di $\vec{E}_i'$ e $\vec{B}_i'$ è pari rispettivamente al modulo di $\vec{E}_i$ e $\vec{B}_i$; la componente tangenziale di $\vec{E}$ cambia segno mentre la componente tangenziale di $\vec{B}$ si conserva; mentre l'opposto accade alle componenti normali (quella di $\vec{E}$ si conserva e quella di $\vec{B}$ cambia segno). Tutto ciò è coerente con quanto richiesto dalla [IX.32] (valida per ogni onda elettromagnetica), considerato che la velocità $\vec{v}$ dell'onda si riflette specularmente sulla superficie metallica. Tenuto conto che $E_{in}' = E_{in}$ e $B_{it}' = B_{it}$, dalla prima e dalla quarta delle [X.26.a] segue

$$\begin{cases} \sigma = 2\varepsilon E_{in} \\ J_S = \dfrac{2 B_{it}}{\mu} \end{cases} \qquad \text{[X.27]}$$

Nella pratica, come abbiamo già accennato, questa trattazione per la riflessione su superficie metallica lucidata vale in ragionevole approssimazione soltanto per lunghezze d'onda superiori a $(0{,}5 \div 1)\,\mu m$.

Esempio

E.X.8. *Consideriamo il caso in cui l'onda incida normalmente alla superficie metallica.*

Se $\vec{E}_i$ e $\vec{B}_i$ (entrambi tangenti alla superficie del metallo) hanno le direzioni indicate in figura (ricordiamo che la velocità $\vec{v}$ è parallela al vettore di Poynting $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu}$), i campi riflessi hanno le direzioni mostrate anch'esse in figura. Notiamo che il fatto che il verso di $\vec{E}_i$ si inverta, equivale a dire che il campo elettrico (componente tangenziale) subisce nella riflessione uno sfasamento di π (mentre $\vec{B}$ non subisce alcuno sfasamento). Lo stesso può accadere, per inciso, anche per riflessione normale su una interfaccia fra due dielettrici (vedi esercizio X.5).

Per lunghezze d'onda più brevi di circa 1 μm, l'approssimazione che abbiamo più sopra fatta (assenza di onda rifratta) non è più valida; e la trattazione teorica della riflessione su superficie metallica diviene assai complessa.

Senza entrare qui minimamente negli aspetti teorici del caso generale di riflessione su superficie metallica, ci limitiamo a riportare e commentare alcuni dati sperimentali relativi alla riflettanta normale (cioè per incidenza ortogonale alla superficie) di alcuni metalli di uso comune, in funzione della lunghezza d'onda della radiazione fra $\lambda \simeq 0{,}2$ μm e $\lambda \simeq 0{,}8$ μm (ultravioletto-visibile).

Riflettanza selettiva

Come si vede, la riflettanza varia al variare della lunghezza d'onda: come si usa dire, i metalli presentano una *riflettanza selettiva*. Più precisamente, la riflettanza va aumentando con λ. Coerentemente con quanto da noi dedotto a partire dalle [X.26.a], nell'infrarosso tutti i metalli lucidati presentano una riflettanza superiore al 90% (ed anzi, per metalli puri, spesso superiore a 95 ÷ 98%). Nel visibile ($0{,}4 \leq \lambda \leq 0{,}7$ μm), la riflettanza più elevata è quella dell'argento; ma di poco inferiore è anche la riflettanza dell'alluminio, che si mantiene notevolmente elevata anche nell'infrarosso. Considerato che l'alluminio lucidato esposto all'aria si mantiene inalterato per molti anni (contrariamente all'argento che si ossida e si deteriora in pochi giorni) le superfici speculari sono di solito realizzate in alluminio, almeno quando non si tratti di lastre di vetro metallizzate posteriormente (ma spesso anche in questo caso). L'oro, e ancor più il rame, hanno una riflettanza relativamente bassa per lunghezze d'onda verso l'estremo inferiore dello spettro visibile: se la radiazione visibile incidente è bianca, nello spettro riflesso predominano le lunghezze d'onda più lunghe, prossime all'estremo rosso dell'intervallo visibile. La luce riflessa appare allora all'occhio di colore giallo-arancio. Così come nel caso di riflessione sull'interfaccia fra dielettrici, anche nel caso di riflessione su superficie metallica, la luce visibile riflessa risulta almeno parzialmente polarizzata con vettore elettrico parallelo al piano riflettente (ortogonale al piano di incidenza).

X.5. Luce naturale e radiazione polarizzata

Molti degli sviluppi presentati nei precedenti paragrafi furono ricavati nel secolo scorso da Fresnel e da altri, prima della definitiva formalizzazione delle equazioni di Maxwell, ipotizzando che il comportamento ondulatorio della luce (evidenziato in molti esperimenti, relativi principalmente a fenomeni di interferenza e diffrazione di cui ci occuperemo nel prosieguo del capitolo) fosse riconducibile alla teoria delle onde in mezzi elastici; teoria che è stata sviluppata nel corso di meccanica. Questa ipotesi, mentre appare a prima vista assai naturale nel caso della propagazione di radiazione in mezzi dielettrici solidi, pone evidenti difficoltà ad individuare quale sia il supporto meccanico delle onde elastiche nel caso della propagazione di radiazione nel vuoto. L'introduzione dell'etere, come supporto materiale delle onde, ingenera una serie di difficoltà. L'etere dovrebbe essere un mezzo impalpabile, entro cui cioè il moto degli oggetti materiali (e in particolare dei corpi celesti) dovrebbe poter procedere senza subire alcun disturbo. Nello stesso tempo, però, dovrebbe trattarsi di un mezzo estremamente rigido. Ricordiamo infatti che la velocità delle onde elastiche in un mezzo tridimensionale è data da (vedi ad es. Fisica I di C. Mencuccini e V. Silvestrini, eq. [X.25]):

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

dove ρ è la densità e k il modulo di elasticità. Anche ipotizzando una densità dell'ordine di quella dell'aria ($\rho \simeq 1$ kg/m^3; ma non si può capire come un mezzo possa essere estremamente rigido avendo bassa densità, e infatti

all'epoca si arrivò a valutare per l'etere un valore di ρ dell'ordine di milioni di kg per cm^3!) affinché sia $v = 3 \cdot 10^8$ m/s dovrebbe essere per l'etere $k \simeq 10^{17}\ N/m^2$ (mentre ricordiamo che, ad esempio, per l'acciaio è $k \simeq 10^{11}\ N/m^2$).

Va inoltre osservato che in un mezzo tridimensionale non solido possono propagarsi solo onde elastiche longitudinali; mentre come abbiamo visto nel precedente capitolo e come abbiamo in seguito più volte ricordato, le equazioni di Maxwell prevedono che le onde elettromagnetiche siano trasversali. Come sappiamo, l'ipotesi dell'etere fu definitivamente abbandonata in seguito ai risultati dell'esperimento di Michelson e ai successi della teoria di Einstein: il campo elettromagnetico è presente anche nello spazio vuoto, e le sue oscillazioni si propagano nella forma di onde.

Tuttavia la teoria che interpretava le onde elettromagnetiche in termini di onde elastiche era già stata messa in definitiva crisi anche da misure che mettevano in evidenza l'esistenza di radiazione polarizzata. Nei fatti, l'esistenza di luce polarizzata dimostra la trasversalità delle onde, considerato che le onde longitudinali sono necessariamente caratterizzate da simmetria cilindrica intorno alla direzione di propagazione e dunque non possono essere soggette al fenomeno della polarizzazione.

Per effettuare esperimenti e misure relativi alla polarizzazione delle onde elettromagnetiche e in particolare della luce si può procedere facendo riflettere la radiazione stessa, ad un angolo prossimo all'angolo di Brewster, sull'interfaccia fra due mezzi trasparenti; ma è più conveniente ricorrere all'uso di materiali anisotropi, cioè di materiali caratterizzati da proprietà ottiche diverse a seconda della direzione in cui la luce si propaga in essi. Sono anisotropi la maggior parte dei cristalli (con l'esclusione di quelli del sistema cubico) per conseguenza della anisotropia nella organizzazione spaziale degli atomi nel reticolo cristallino; e molti materiali organici, quando le relative molecole non hanno simmetria sferica e sono dotate di un orientamento preferenziale nello spazio conseguente alla loro organizzazione strutturale (polimeri).

Polaroidi

Gli analizzatori di polarizzazione «classici» sono realizzati con cristalli anisotropi costruiti in forma opportuna; ma oggi è più comodo ricorrere a dispositivi realizzati con materiali organici (materie plastiche) e comunemente in commercio nella forma di sottili dischetti (diametro alcuni centimetri; spessore dell'ordine del millimetro) detti *polaroidi*.

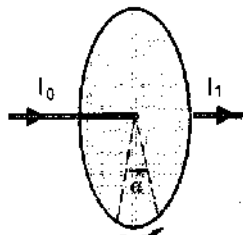
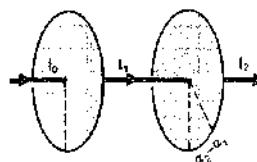
Se un fascio di luce «naturale» (ad esempio di luce solare; o di luce prodotta da una lampada a incandescenza) viene fatto incidere ortogonalmente a un polaroide, si riscontra che nell'attraversamento l'intensità I_0 della luce incidente subisce una attenuazione; dal dischetto emerge un fascio di intensità $I_1 \leq 1/2\, I_0$. Se si fa ruotare il polaroide intorno al proprio asse, l'intensità I_1 non cambia; essa è cioè indipendente dall'angolo α di cui si è ruotato il polaroide.

Facciamo ora incidere il fascio I_1 su un secondo polaroide. Si trova che l'intensità I_2 emergente da questo *non* è indipendente dall'angolo $(\alpha_2 - \alpha_1)$ di cui il secondo polaroide viene ruotato rispetto al primo, ma varia secondo la legge

$$I_2 = I_1 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad [X.28]$$

Legge di Malus

detta *legge di Malus*.

Questo esperimento, dimostrando che il fascio I_1 ha caratteristiche che non hanno simmetria cilindrica rispetto alla direzione di propagazione, dimostra intanto che le onde elettromagnetiche non sono longitudinali,

coerentemente con la previsione discendente dalle equazioni di Maxwell che esse siano onde trasversali. Nel suo insieme, l'esperimento testé descritto ha la seguente interpretazione:

a) La luce naturale non è polarizzata, ed è perciò che essa viene trasmessa dal primo polaroide in misura indipendente dall'angolo α di rotazione di quest'ultimo. In effetti, la luce naturale è prodotta da un insieme di processi elementari fra di loro indipendenti e scorrelati. Ognuno di tali processi produce un treno d'onda elettromagnetico, con campo elettrico $\vec{E}(t)$ dato da:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

La luce naturale è non polarizzata e non coerente.

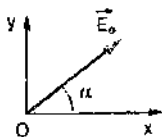
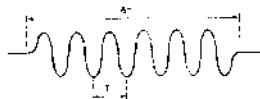
(stiamo ipotizzando, per fissare le idee, di avere a che fare con un'onda piana che si propaga lungo l'asse delle z). La durata Δt di ogni treno d'onda è molto maggiore del periodo $T = 2\pi/\omega$. La direzione di $\vec{E}_0$ (ortogonale all'asse z) è peraltro del tutto casuale. $\vec{E}_0$ forma pertanto con il piano xy un angolo α il cui valor medio (cioè mediato su molti treni d'onda) è nullo. In ogni misura di intensità luminosa, si somma il contributo di un numero assai grande di processi elementari; ed avendo questi il campo $\vec{E}$ distribuito con direzione α casuale, il raggio di luce naturale ha nel suo complesso simmetria cilindrica intorno alla direzione di propagazione. La luce naturale è dunque perfettamente *non polarizzata*. Analogamente, anche la fase φ di ogni treno d'onda è completamente scorrelata fra un processo elementare e l'altro. Per il fascio di luce naturale nel suo complesso non si può dunque parlare di fase φ definita. Ciò si esprime dicendo che la luce naturale *non è coerente*.

b) Il polaroide è anisotropo, e la sua trasparenza è funzione dell'angolo α che la direzione di vibrazione del campo elettrico $\vec{E}_0$ (piano di vibrazione) forma con un asse caratteristico del polaroide, giacente nel piano del polaroide stesso; asse che per fissare le idee supponiamo che sia orientato secondo l'asse x. Più precisamente, per un polaroide ideale la trasparenza t è perfetta ($t = 1$) per luce con piano di vibrazione parallelo all'asse x (asse del polaroide) ed è nulla ($t = 0$) quando il piano di vibrazione è ortogonale a x. Quando il piano contenente il vettore elettrico e la direzione di propagazione forma un angolo α con l'asse x (asse del polaroide), il polaroide lascia passare la componente x (pari a $E_0 \cos\alpha$) dell'ampiezza del campo elettrico. L'intensità I_1 è pertanto pari a:

$$I_1 = \frac{(E_{eff} \cos\alpha)^2}{Z_0} = \frac{E_{eff}^2}{Z_0} \cos^2\alpha = I_0 \cos^2\alpha \qquad \text{[X.29]}$$

Ma poiché i vari treni d'onda che compongono la luce naturale hanno angolo del tutto casuale (ogni valore di α è equiprobabile), la [X.29] va mediata uniformemente su α; ed essendo il valor medio di $\cos^2\alpha = 1/2$, dalla [X.29] segue (per un polaroide perfetto):

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

c) La luce che emerge dal primo polaroide ha ora, per quanto visto, vettore elettrico parallelo all'asse x (di ogni treno, solo la componente E_x secondo x è stata trasmessa); essa è dunque polarizzata linearmente

secondo tale asse. Di essa attraversa il secondo polaroide solo la componente secondo l'asse di quest'ultimo; e ciò spiega la legge di Malus.

Onda polarizzata linearmente

In generale, un'onda piana procedente lungo l'asse z, $\vec{E} = \vec{E}_o \cos(kz - \omega t + \varphi)$ polarizzata linearmente in una direzione qualunque α, può essere considerata come somma di due onde caratterizzate dalla stessa fase, una polarizzata secondo l'asse x e una secondo l'asse y:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \hat{i} E_{o1} \cos(kz - \omega t + \varphi) \\ \vec{E}_2 = \hat{j} E_{o2} \cos(kz - \omega t + \varphi) \end{cases} \qquad \text{[X.30]}$$

dove $\hat{i}$ e $\hat{j}$ sono i versori dell'asse x e y, ed $E_{o1} = E_o \cos\alpha$ e $E_{o2} = E_o \sin\alpha$.

Può capitare che le due componenti $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ non abbiano la stessa fase iniziale φ, ma siano fra di loro sfasate. Poniamo in particolare che $\vec{E}_1$ abbia fase $\varphi_1 = 0$, ed $\vec{E}_2$ fase $\varphi_2 = \pi/2$. Le [X.30] divengono allora:

$$\vec{E}_1 = \hat{i} E_{o1} \cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{j} E_{o2} \cos(kz - \omega t + \pi/2) = -\hat{j} E_{o2} \sin(kz - \omega t)$$

Poniamoci, a titolo di esempio, sul piano $z = 0$ (ma lo stesso ragionamento può essere fatto per ogni fissato valore di z); si ha allora:

Onda con polarizzazione ellittica

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \hat{i} E_{o1} \cos\omega t + \hat{j} E_{o2} \sin\omega t \qquad \text{[X.31]}$$

Vediamo che il campo elettrico $\vec{E}$ ruota con velocità angolare ω intorno alla direzione di propagazione, e il suo estremo libero percorre una ellisse.

Se x e y sono le coordinate dell'estremo libero di $\vec{E}$, dalla [X.31] si ha infatti $x = E_{o1} \cos\omega t$ e $y = E_{o2} \sin\omega t$; da cui:

$$\frac{x^2}{E_{o1}^2} + \frac{y^2}{E_{o2}^2} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$$

Poiché E_{o1} ed E_{o2} sono costanti, questa rappresenta l'equazione di una ellisse: si dice allora che l'onda è *polarizzata ellitticamente*. In particolare, se $E_{o1} = E_{o2}$ (cioè se le due onde componenti, fra di loro sfasate di $\pi/2$, hanno la stessa ampiezza) l'onda risultante è *polarizzata circolarmente*.

$E_{o1} = E_{o2}$
Polarizzazione circolare

In pratica, per ottenere un'onda polarizzata circolarmente a partire da un'onda non polarizzata, si può fare incidere l'onda su una cosiddetta *lamina a quarto d'onda*. Si tratta di una lamina trasparente costruita con un opportuno cristallo anisotropo, entro cui la velocità di un'onda elettromagnetica è diversa a seconda che il piano di vibrazione del vettore elettrico sia parallelo o ortogonale ad un asse caratteristico del cristallo contenuto nella giacitura della lamina. Lo spessore della lamina di cristallo è tale che il ritardo accumulato nell'attraversamento dalla più lenta fra le due componenti di polarizzazione del raggio incidente corrisponde a un quarto di periodo (ovvero un quarto di lunghezza d'onda). Pertanto, all'uscita le due componenti di polarizzazione sono sfasate di un angolo $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; e ciò genera, come abbiamo appena visto, un raggio polarizzato circolarmente. (Per altri, essendo la stessa onda, le due componenti avranno anche stessa ampiezza $E_{01} = E_{02}$)

Lamina a quarto d'onda

X.6. Velocità di gruppo

Fino qui, abbiamo dedicato la nostra attenzione soprattutto a onde elettromagnetiche monocromatiche, cioè a onde sinusoidali (armoniche) di frequenza perfettamente definita e costante nel tempo, e di durata molto lunga rispetto al periodo (teoricamente infinita). Abbiamo più volte accennato al fatto che un'onda periodica di forma qualunque può essere sviluppata in serie di armoniche utilizzando il teorema di Fourier. Se una tale onda si propaga nel vuoto, la sua composizione armonica non cambia nel tempo. Se invece si propaga in un mezzo materiale, in generale le diverse armoniche hanno un diverso comportamento. L'indice di rifrazione (sia la sua parte reale che quella immaginaria) dipende dalla frequenza: le diverse armoniche si propagano allora a velocità diverse, e con diverso cammino di attenuazione. Dopo che l'onda periodica ha compiuto un certo cammino nel mezzo materiale, le varie armoniche hanno dunque diversa fase relativa (*dispersione*) o diversa ampiezza relativa (*dissipazione*): e ciò comporta che l'onda assuma caratteristiche fisiche diverse rispetto a quelle che aveva inizialmente. È esperienza comune, ad esempio, che un raggio luminoso cambi colore attraversando un mezzo materiale. Se in particolare il mezzo materiale è apprezzabilmente trasparente solo in una certa banda di frequenza, il raggio emergente può contenere solo tali frequenze, tutte le altre essendo state assorbite. Si dice allora che il materiale rappresenta un *filtro* ad assorbimento (o filtro dissipativo). Questo ed altri fenomeni cosiddetti selettivi, di cui noi ci siamo sostanzialmente disinteressati (salvo quando, nel par. X.3, abbiamo introdotto l'*analisi spettrale* per rifrazione) possono essere trattati con relativa semplicità quando l'effetto selettivo sia causato solo da fenomeni dissipativi; la trattazione consiste allora semplicemente nell'introdurre – nella serie o nell'integrale di Fourier che rappresenta l'onda incidente – l'andamento dell'ampiezza delle varie armoniche in funzione del percorso compiuto nel materiale. Il fenomeno diviene più complesso quando il comportamento selettivo del materiale sia anche dispersivo, cioè produca anche uno sfasamento relativo delle varie componenti armoniche; soprattutto quando l'onda incidente non sia un'onda periodica.

Filtri ottici

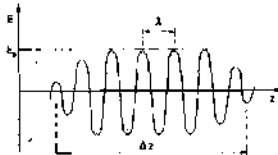
Al riguardo, va notato che la schematizzazione di onda periodica corrisponde assai raramente ai casi di effettivo interesse. A rigore, per essere periodica un'onda deve avere lunghezza spazio-temporale infinita, e ampiezza delle varie armoniche costante nello spazio e nel tempo. Osserviamo fra parentesi che un'onda rigorosamente periodica trasporta energia ma non può trasportare alcun segnale; i segnali possono infatti essere comunicati solo attraverso modulazioni (in ampiezza o in frequenza) dell'onda portante, e dunque attraverso caratterizzazioni non periodiche di quest'ultima.

Qui ci limitiamo a trattare il caso semplice di un treno d'onda sinusoidale procedente lungo l'asse z, di durata Δt e corrispondente lunghezza Δz.

Sia $E(z,t)$ una grandezza scalare caratteristica dell'onda (ad esempio una componente cartesiana del campo elettrico). Vogliamo vedere come evolve la configurazione spaziale del treno d'onda, al passare del tempo, via via che esso procede lungo l'asse z entro un mezzo materiale *non dissipativo* (cioè con indice di rifrazione n reale) ma *dispersivo*: cioè con n funzione di ω o, equivalentemente, del numero d'onda k: $n = n(k)$. Per conseguenza, dalla relazione generale $\lambda\nu = v = c/n$ (ovvero $\nu = c/(\lambda n)$) segue

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda n} = c\frac{|k|}{n(k)} = \omega(k) \qquad [X.32]$$

avendo ricordato la definizione $|k| = 2\pi/\lambda$. Poiché le proprietà dispersive del materiale non possono dipendere dal *verso* di propagazione, deve essere $\omega(-k) = \omega(k)$ ($\omega(k)$ è una funzione pari); supponiamo inoltre che $\omega(k)$ sia una funzione lentamente variabile di k, ipotesi verificata quando ci si trova lontani da regioni di dispersione anomala.

Ad ogni istante t eseguiamo lo sviluppo di Fourier dell'onda $E(z,t)$ nella variabile z. Poiché il treno d'onda rappresenta (per conseguenza della sua lunghezza

limitata Δz) una grandezza *non* periodica, la matematica ci dice che la serie di Fourier [VII].37] deve essere sostituita da un'integrale:

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{j(kz-\omega t)}\, dk \qquad [X.33]$$

Trasformata di Fourier

La funzione $g(k)$ è la cosiddetta *trasformata di Fourier* (secondo la variabile z) dell'onda. Osserviamo che per l'ipotesi che il mezzo sia non dissipativo $g(k)$ è indipendente dal tempo: infatti l'ampiezza di ogni armonica non varia via via che, al passare del tempo, l'onda procede; ma varia solo la relativa fase per il fatto che – essendo $\omega/k = \lambda\nu = v$ funzione di k – ogni armonica procede a velocità diversa.

Poiché $g(k)$ è indipendente dal tempo, il suo calcolo può essere effettuato, per semplicità, all'istante $t = 0$. Ponendo nella [X.33] $t = 0$, moltiplicando per $e^{-jk'z}\, dz$ e integrando rispetto a z da $-\infty$ a $+\infty$, si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(z,0)\, e^{-jk'z}\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, dk \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(k-k')z}\, dz \qquad [X.34]$$

L'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(k-k')z}\, dz$ può essere scritto come:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(k-k')z}\, dz = \delta(k-k') \qquad [X.35]$$

Delta di Dirac

dove il simbolo $\delta(k-k')$ è detto funzione *delta di Dirac*.

La delta di Dirac gode della proprietà che, data una qualunque funzione $g(k)$, il prodotto $g(k)\,\delta(k-k')$ ha per integrale:

Proprietà fondamentale della delta di Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, \delta(k-k')\, dk = g(k') \qquad [X.36]$$

In realtà la [X.36] rappresenta la proprietà definitoria della funzione δ: dicesi δ di Dirac qualunque funzione soddisfi la [X.36], ed è facile verificare che tale relazione è soddisfatta in particolare dalla [X.35].

Tenuto conto della [X.36], la [X.34] diviene

$$2\pi\, g(k') = \int_{-\infty}^{\infty} E(z,0)\, e^{-jk'z}\, dz\,;$$

ovvero, cambiando nome alla variabile k' ($k' \to k$):

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(z,0)\, e^{-jkz}\, dz \qquad [X.37]$$

Nota la forma $E(z,0)$ dell'onda all'istante $t = 0$, la [X.37] permette dunque il calcolo esplicito della sua trasformata di Fourier $g(k)$. Se la $E(z,0)$ è, come abbiamo ipotizzato, un treno d'onda sinusoidale con numero d'onda «proprio» $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ e lunghezza Δz, la sua trasformata di Fourier ha l'andamento qualitativo mostrato in figura, e si può dimostrare che la sua larghezza Δk è legata alla lunghezza Δz del treno d'onda dalla relazione

$$\Delta k \cdot \Delta z \geq 1/2 \qquad [X.38]$$

In particolare, se il treno d'onda è infinitamente lungo (cioè se per $t = 0$, così come in qualunque altro istante, esso è esprimibile come $E_0\, e^{j(k_0 z - \omega_0 t)}$ per ogni valore di z) sostituendo nella [X.37] $E_0\, e^{jk_0 z}$ al posto di $E(z,0)$ si ha:

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0\, e^{j(k-k_0)z}\, dz = E_0\, \delta(k-k_0)$$

La trasformata $g(k)$ è in questo caso piccata, con larghezza nulla, intorno a k_0; essa è in effetti proporzionale a una δ di Dirac.

Torniamo ora al caso di un treno d'onda di lunghezza Δz finita. Nell'ipotesi di trovarci lontano dalle regioni di dispersione anomala (cosicché $\omega(k)$ vari lentamente con k), se la lunghezza Δz è abbastanza grande (e dunque se conseguentemente $g(k)$ è sufficientemente localizzata intorno a k_0) la funzione $\omega = \omega(k)$ può essere sviluppata in serie al primo ordine intorno a k_0

$$\omega \equiv \omega(k) = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 (k - k_0) \qquad \text{[X.39]}$$

dove con $\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0$ si intende $\frac{d\omega}{dk}$ calcolato per $k = k_0$. Sostituiamo la [X.39] nella [X.33]; si ottiene:

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k)\, e^{j\left[kz - \omega_0 t - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 (k-k_0)t\right]} =$$

$$= e^{j\left(k_0 \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 - \omega_0\right)t} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k)\, e^{jk\left(z - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 t\right)}$$

ovvero:

$$\begin{cases} E(z,t) = e^{j\alpha_0 t} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(k)\, e^{jk\xi}\, dk \\ \text{con } \alpha_0 = k_0 \left.\dfrac{d\omega}{dk}\right|_0 - \omega_0\,; \quad \xi = z - \left.\dfrac{d\omega}{dk}\right|_0 t \end{cases} \qquad \text{[X.40]}$$

Dal confronto fra la [X.40] e la [X.33] calcolata per $t = 0$, vediamo che, nell'approssimazione in cui vale la [X.39], a parte il fattore di fase $e^{j\alpha_0 t}$ variabile nel tempo, il pacchetto d'onda ha in funzione della variabile ξ lo stesso andamento che all'istante $t = 0$ esso aveva in funzione di z. Considerato che la quantità $\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0$, essendo calcolata per $k = k_0$, rappresenta un parametro costante, la variabile ξ ha l'espressione

$$\xi = z - v_g t \qquad \text{[X.41]}$$

e dunque la [X.40] rappresenta un pacchetto che ha la stessa forma del pacchetto iniziale, e che si propaga con velocità

Velocità di gruppo

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 \qquad \text{[X.42]}$$

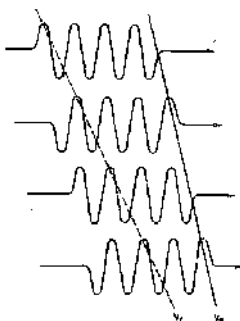
detta *velocità di gruppo*. La [X.32] consente di calcolare, e di confrontare fra di loro, sia la velocità di fase v_f che la velocità di gruppo v_g; si ha infatti:

$$v_f = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(k_0)}$$

$$1/v_g = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega n}{c}\right) = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}$$

ovvero:

$$\begin{cases} v_f = c/n \\ v_g = \dfrac{c}{\left(n + \omega \dfrac{dn}{d\omega}\right)} \end{cases} \qquad \text{[X.43]}$$

Vediamo che in generale la velocità di gruppo v_g differisce dalla velocità di fase v_f, coincidendo con essa solo se $\frac{dn}{d\omega} = 0$; cioè solo se n (e dunque anche la velocità di fase c/n) è indipendente dalla frequenza. Salvo che nelle zone di dispersione anomala, è $\frac{dn}{d\omega} > 0$ e dunque la velocità di gruppo v_g è minore della velocità di fase v_f; quest'ultima a sua volta è di norma minore della velocità c della luce nel vuoto, salvo che in particolari zone dello spettro in cui, per il materiale in esame, l'indice di rifrazione n sia minore di 1. Va osservato che il segnale e l'energia trasportati dal treno d'onda viaggiano a velocità pari alla velocità di gruppo, e non alla velocità di fase; ciò risulta evidente osservando la figura a lato, che illustra il significato della velocità di fase v_f e della velocità di gruppo v_g. Nelle zone di dispersione anomala, in cui $\frac{dn}{d\omega}$ è negativo, la [X.43] può fornire per v_g valori maggiori di c, e ciò appare in contraddizione col principio della velocità limite secondo cui nessun segnale può propagarsi a velocità maggiore di c. In effetti, nelle regioni di dispersione anomala le approssimazioni adottate per il calcolo della [X.43] non sono applicabili: nei fatti, la velocità di gruppo risulta essere sempre minore di c, coerentemente coi principi su cui si basa la teoria della relatività.

Esempio

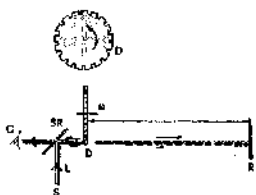
E.X.9. *Misure della velocità di gruppo della luce.*

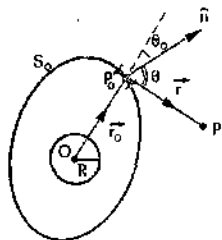
Metodo di Fizeau

La velocità della luce è stata misurata per la prima volta, con tecniche non astronomiche, nel 1849 da Fizeau. L'apparato sperimentale è schematicamente illustrato nel disegno, in cui peraltro si tralascia di indicare i dispositivi (lenti, diaframmi, ecc.) necessari per realizzare il sottile fascio di luce collimato L. Tale fascio, prodotto dalla sorgente S, per riflessione sullo specchio semiriflettente SR viene inviato verso lo specchio R. Qui il fascio viene riflesso a 180° e inviato nuovamente verso lo specchio semiriflettente SR, passando attraverso il quale può essere osservato dall'osservatore O. Sul suo cammino, il raggio incontra la ruota dentata D, che ruotando con velocità angolare ω spezza il fascio in tanti piccoli pacchetti. La velocità angolare ω può essere variata con continuità. Aumentando via via ω, si raggiunge un valore ω_0 di essa per cui l'osservatore non rivela alcun raggio di ritorno. Ciò accade quando il tempo impiegato da ogni pacchetto a compiere il percorso di andata e ritorno DRD è pari al tempo che la ruota impiega per sostituire lungo il percorso del raggio a un vuoto fra dente e dente il dente successivo; cosicché quest'ultimo intercetta il raggio di ritorno. Conoscendo la geometria del sistema, misurando la velocità ω_0 risulta immediato il calcolo della velocità della luce. Tenuto conto che la grandezza misurata è sostanzialmente il tempo che un pacchetto impiega per compiere un determinato percorso, è chiaro che la grandezza misurata è la *velocità di gruppo*.

Qualora sul percorso DRD venisse interposto un mezzo trasparente, si potrebbe misurare la velocità v della luce in quel mezzo. Tuttavia per raggiungere una precisione sufficiente nella misura (dell'ordine di qualche per cento nel primo esperimento di Fizeau) il percorso deve essere di molti chilometri (quasi 9 km nell'esperimento di Fizeau): l'ipotesi di riempire tale spazio con un mezzo trasparente non è dunque praticabile, per motivi di complicazione meccanica e di trasparenza del mezzo.

Metodo di Foucault

È ben noto che usando una tecnica basata su uno specchio ruotante, Foucault riuscì a misurare la velocità della luce su percorsi dell'ordine di pochi metri, rendendo fattibile anche la misura in mezzi trasparenti diversi dall'aria. Tralasciamo di descrivere questa ed altre tecniche di misura della velocità della luce, descritte nella maggior parte dei testi di ottica e di fisica generale.

X.7. Principio di Huygens-Fresnel e teorema di Kirchhoff

Teorema di Kirchhoff

Nel corso di meccanica, trattando le onde elastiche è stato introdotto il cosiddetto principio di Huygens-Fresnel come strumento per risolvere in termini approssimati in un mezzo omogeneo ed isotropo l'equazione delle onde in presenza di ostacoli che vincolino e perturbino il movimento delle onde stesse. In effetti, a meno che la geometria delle condizioni al contorno (sorgenti delle onde e ostacoli interposti sul loro cammino) non sia particolarmente semplice, la soluzione esatta della equazione tridimensionale delle onde comporta difficoltà proibitive. Introduciamo qui, senza dimostrarlo, un fondamentale teorema di Kirchhoff che costituisce la base formale del principio che Huygens e Fresnel avevano introdotto in termini semiempirici approssimati. Daremo di tale teorema l'enunciato più adatto a trarne le conclusioni che più ci interessano; per poi vedere in che modo, e con quali limitazioni, da esse si possano trarre le regole di calcolo che sono alla base degli sviluppi presentati nei prossimi paragrafi a proposito dei fenomeni di interferenza e diffrazione.

S₀ P₀ θ₀ θ n r r₀ O R P

Consideriamo dunque una superficie geometrica chiusa S_0 contenente al suo interno la sorgente delle onde elettromagnetiche. Supponiamo in particolare – per semplicità – che la sorgente, situata in O, sia puntiforme, anche se non necessariamente dotata di simmetria sferica (potrebbe essere, ad esempio, un dipolo oscillante). Senza perdere in generalità, possiamo immaginare che l'onda emessa dalla sorgente sia sinusoidale, cosicché nel punto P_0 generico appartenente a S_0 una qualunque grandezza scalare E caratteristica dell'onda (ad esempio una componente cartesiana del campo elettrico) ha l'espressione:

$$E(P_0, t) = R\,\frac{E_0}{r_0}\cos(kr_0 - \omega t)$$

dove r_0 è la distanza OP_0 ed E_0 è il valore assunto dall'ampiezza a distanza R dal centro O. Nel punto generico P, la grandezza E al tempo t può essere espressa in termini dei valori che essa aveva su S_0 all'istante $(t - r/v)$, dove r è la distanza P_0P e v la velocità dell'onda. Più precisamente vale la relazione

$$E(P, t) = \frac{R}{2\lambda}\int_{S_0}\frac{E_0}{r_0 r}(\cos\theta_0 + \cos\theta)\cos[k(r_0 + r) - \omega t - \pi/2]\,dS_0 \quad \text{[X.44]}$$

dove θ_0 e θ sono gli angoli che $\vec{r}_0$ ed $\vec{r}$ formano con la normale $\hat{n}$ a dS_0; dS_0 è l'elemento di superficie di S_0.

Questa relazione deriva da elaborazioni di carattere puramente matematico, basate su proprietà generali della equazione delle onde e sulla considerazione che, fissate le condizioni al contorno, la soluzione deve essere unica.

L'interpretazione e l'uso della [X.44] divengono notevolmente semplici specie quando la superficie S_0 coincida con un fronte d'onda; in questo caso, il modulo r_0 di $\vec{r}_0$ è costante su tutta S_0, e in ogni punto $\vec{r}_0$ è diretto normalmente all'elemento di superficie dS_0, e dunque è $\cos\theta_0 = 1$. L'onda che arriva in P può allora essere costruita immaginando che ogni elemento del fronte d'onda S_0 divenga sorgente di onde «secondarie». Queste onde secondarie sono emesse fra di loro in fase, e anticipate di un quarto di periodo rispetto all'onda «primaria» incidente su S_0.

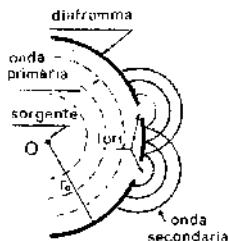
Onde secondarie

L'ampiezza dell'onda secondaria (più precisamente, di ogni sua componente) è proporzionale, tramite il fattore $\frac{dS_0}{2\lambda}$, all'ampiezza RE_0/r_0 della corrispondente componente dell'onda primaria. In virtù del fattore $\cos\theta_0 + \cos\theta = 1 + \cos\theta$ (detto «fattore di obliquità») le onde secondarie sono emesse sostanzialmente in avanti. Infatti in virtù di tale fattore l'ampiezza dell'onda secondaria emessa in P_0 è proporzionale a $\frac{E_0\, dS_0}{\lambda r_0}$ nella direzione di propagazione dell'onda primaria ($\cos\theta = 1$); ed è nulla nella direzione opposta (non v'è onda secondaria regressiva).

Fattore di obliquità

Queste regole, che come abbiamo visto derivano dal teorema di Kirchhoff, costituiscono in sostanza quello che usualmente va sotto il nome di «Principio di Huygens-Fresnel», benché la sua formulazione empirica originaria fosse meno puntuale.

Principio di Huygens-Fresnel

L'uso del principio di Huygens-Fresnel risulta particolarmente utile ed efficace quando sul percorso dell'onda emessa dalla sorgente, a intercettare un fronte d'onda sia disposto un diaframma dotato di caratteristiche geometriche e fisiche definite e semplici: ad esempio un diaframma che assorbe tutto il fronte d'onda, esclusa la parte che incide su pochi fori o fenditure. In questo caso si può di solito pensare che le caratteristiche dell'onda primaria incidente sul diaframma siano note con buona approssimazione: infatti se il diaframma è assorbente la forma dell'onda «a monte» del diaframma stesso è determinata sostanzialmente solo dalle caratteristiche della sorgente, e non da quelle del diaframma. A valle del diaframma, la soluzione può essere allora costruita immaginando che ogni elemento di superficie dS_0 dei fori (o fenditure) nel diaframma divenga sorgente di onde sferiche di ampiezza e fase note. L'ampiezza dell'onda secondaria emessa in una certa direzione è infatti pari a $\frac{E_0\, dS_0}{2\lambda r_0}(1 + \cos\theta)$, dove θ è l'angolo fra la direzione di emissione e la direzione di provenienza su dS_0 dell'onda primaria; mentre la fase dell'onda secondaria si ottiene sommando $\pi/2$ alla fase dell'onda primaria (o equivalentemente sommando un quarto di lunghezza d'onda $\lambda/4$ al suo percorso r, ovvero sottraendo un quarto di periodo $T/4$ al tempo t).

Queste regole verranno da noi sistematicamente adottate nei prossimi paragrafi per trattare i fenomeni di interferenza e diffrazione.

X.8. Interferenza

Consideriamo due onde piane monocromatiche che si propagano nel verso positivo dell'asse z, entrambe polarizzate linearmente nella stessa direzione (ad esempio col campo elettrico diretto secondo l'asse y):

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(k_1 z - \omega_1 t + \varphi_1)$$
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(k_2 z - \omega_2 t + \varphi_2)$$

Per l'ipotesi fatta a proposito della polarizzazione delle due onde, $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ sono fra di loro paralleli. Sommando le due onde, considerata la linearità della equazione delle onde si ottiene una nuova soluzione (onda risultante):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$